М. И. БАТЬ, Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ, А. С. КЕЛЬЗОН [illegible]

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

III

М. И. БАТЬ, Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ, А. С. КЕЛЬЗОН

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Под редакцией
Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ и Д. Р. МЕРКИНА

ТОМ ТРЕТИЙ
СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МЕХАНИКИ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических учебных заведений



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

531
Б 28
УДК 531

Теоретическая механика в примерах и задачах, т. III (специальные главы механики), Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С., под редакцией Г. Ю. Джанелидзе и Д. Р. Меркина, учебное пособие, М. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973 г., 488 стр.

Книга представляет собой пособие по решению задач теоретической механики для студентов, а также для лиц, занимающихся самообразованием. В каждом из разделов и подразделов книги после конспективного обзора теории указываются типы задач, решаемые с помощью перечисленных в обзоре теорем и положений; приводятся рекомендации о последовательности действий при решении задач. Затем даются примеры решения конкретных задач, причем часто сравниваются и оцениваются различные методы решения. Цель пособия — научить студентов самостоятельно решать задачи по курсу теоретической механики (изучение теории должно производиться по какому-либо из существующих учебников).

В третьем томе содержится около 160 решенных задач по равновесию гибкой нити, кинематике точки в криволинейных координатах, динамике твердого тела, космической динамике, динамике точки переменной массы, аналитической механике, линейным и нелинейным колебаниям.

Рисунков 169.

Б $\frac{0242-1834}{042\ (02)\text{-}73}$ 138-73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Немногочисленные законы и теоремы, лежащие в основе теоретической механики, находят весьма разнообразные и обширные применения. Поэтому у лиц, изучающих или использующих в своей деятельности теоретическую механику, наибольшие затруднения вызывают приложения общих положений теории к решению конкретных задач.

В обширной литературе, посвященной теоретической механике, имеется мало книг, ставящих своей целью научить читателя методам решения задач и примеров. Между тем потребность в таких руководствах ощущается как студентами в процессе обучения (в особенности студентами заочных и вечерних факультетов), так и инженерами и техниками в их практической деятельности.

Авторы настоящей книги, опираясь на многолетний опыт преподавания теоретической механики в Ленинградском политехническом институте им. М. И. Калинина и Ленинградском Высшем инженерном морском училище им. адмирала С. О. Макарова, поставили своей целью создание руководства по решению задач.

В соответствии с этим замыслом в книге даны в конспективной форме лишь краткие сведения из теории — предполагается, что для изучения теории читатель пользуется одним из курсов теоретической механики. Из большого числа учебников по этому предмету, опубликованных в СССР, отметим курс Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье «Теоретическая механика», т. 1, т. 2 (книга, определившая современные традиции преподавания механики во втузах), а также учебники: Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин, Курс теоретической механики, т. 1, т. 2, В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин, А. Л. Дворников, Курс теоретической механики, С. М. Тарг, Краткий курс теоретической механики, А. А. Яблонский, Курс теоретической механики. Кроме того, рекомендуем при изучении отдельных глав настоящего тома следующие книги: Н. В. Бутенин, Введение в аналитическую механику, 1971, А. И. Лурье, Аналитическая механика, 1961, Я. Л. Лунц, Введение в теорию гироскопов, 1972, Д. Р. Меркин, Введение в теорию устойчивости движения, 1971, Я. Г. Пановко, Введение в теорию механических колебаний, 1971.

В настоящем руководстве основное внимание уделено решению конкретных задач, специально составленных для того, чтобы, с одной стороны, избежать разбора задач, входящих в сборник И. В. Мещер-

ского и иные распространенные в СССР задачники, а с другой — дать возможность после изучения книги (или ее разделов) самостоятельно решать главные типы задач. Для облегчения активного изучения материалов в каждом разделе книги даны краткие рекомендации о последовательности решения тех или иных типов задач и лишь после этого приведено подробное рассмотрение подобных задач, причем зачастую сравнены и оценены различные методы решения.

Предполагается, что параллельно с разбором материала по руководству читатель на основе изученного решает соответствующие задачи из сборника задач И. В. Мещерского (переработанное 32 издание 1970 г. и последующие издания) и тем самым научается применять полученные знания.

Сравнительно большой объем руководства объясняется тем, что оно составлено в расчете как на последовательное изучение, так и на выборочное использование. Последний способ и является главной формой применения ввиду различия объема материала и порядка его прохождения в различных высших учебных заведениях.

Первое издание этой книги вышло в свет в двух томах в 1961 г. С тех пор книга неоднократно переиздавалась.

Идя навстречу многочисленным пожеланиям, авторы внесли в настоящее издание новые главы, освещающие дополнительные разделы курса теоретической механики.

Из большого числа неохваченных ранее вопросов были выбраны немногие разделы, получившие за последние годы наиболее важное и широкое применение в современных инженерных расчетах и исследованиях. Это потребовало увеличения объема книги, в связи с чем настоящее издание выходит в трех томах.

Первые два тома охватывают материал, отвечающий основному курсу теоретической механики, а третий том содержит колебания системы материальных точек и дополнительные главы механики. В связи с этим некоторые разделы перенесены из первых двух томов в эту книгу.

В настоящем томе главы 15, 17, §§ 1, 2, 3, 4 и пункты 1° и 2° § 6 главы 20 написал М. И. Бать. Главы 13, 14, 16, 18, 19, а также § 5 и пункт 3° § 6 главы 20 написал А. С. Кельзон.

Авторский коллектив понес невосполнимую утрату в лице безвременно скончавшегося профессора Г. Ю. Джанелидзе, соавтора и первого редактора книги.

Авторы считают своим приятным долгом принести глубокую благодарность Н. В. Бутенину, Д. Р. Меркину, В. К. Прокопову за ценные советы, позволившие улучшить рукопись; Н. И. Алексеевой, Е. Г. Бергер, А. П. Зобнину и В. И. Прядилову за темы некоторых задач; Р. А. Кельзону за участие в написании глав 13 и 19.

Ленинград, март 1971 г. *М. И. Бать, А. С. Кельзон*

РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МЕХАНИКИ

ГЛАВА XIII

РАВНОВЕСИЕ ГИБКИХ НЕРАСТЯЖИМЫХ ПОДВЕСНЫХ НИТЕЙ

§ 1. Основные определения и зависимости

В инженерных конструкциях нередко приходится встречаться с цепями или тросами, подвешенными по концам между двумя опорами и находящимися под действием вертикальной нагрузки, непрерывно распределенной по всей длине нити (рис. 13.1). Мы будем изучать задачи, в которых заданы величины пролета l, провесов f_1 и f_2, а также эпюра распределенной нагрузки $aA'B'b$.

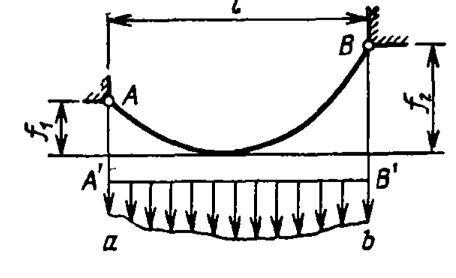


Рис. 13.1.

При исследовании равновесия цепей или тросов нужно ответить, как правило, на два вопроса: 1) какова будет форма кривой, которую займет цепь или трос в положении равновесия? 2) чему равно натяжение цепи (троса) в любой точке по длине кривой?

Для ответа на поставленные вопросы рассмотрим равновесие участка CD нити (рис. 13.2, *а*). Точка C — нижняя точка кривой, точка D — произвольная точка нити с координатами x и y. (Направления осей координат показаны там же.)

Отсеченный участок CD, который можно рассматривать на основании принципа отвердевания как твердое тело, находится в равновесии под действием трех сил: вертикальной силы Q, представляющей собой равнодействующую распределенной нагрузки на участке CD, и двух растягивающих усилий H и T, представляющих реакции со стороны каждого из отброшенных участков нити (рис. 13.2, *б*). Силы H и T направлены по касательной к кривой соответственно в точках C и D. Вертикальная сила Q проходит через центр тяжести той части эпюры, которая расположена между рассматриваемыми сечениями. Эти три силы должны образовать замкнутый силовой

треугольник, показанный на рис. 13.2, *в*. Из этого треугольника находим

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{Q}{H}.$$

Так как $\operatorname{tg}\theta = dy/dx$, это выражение принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H}. \qquad (1^*)$$

С другой стороны, из силового треугольника следует, что

$$T = \sqrt{H^2 + Q^2}. \qquad (2^*)$$

Уравнения (1*) и (2*) являются основными при расчете гибких подвесных нитей. В этих уравнениях сила H постоянна, а сила Q является, очевидно, функцией x.

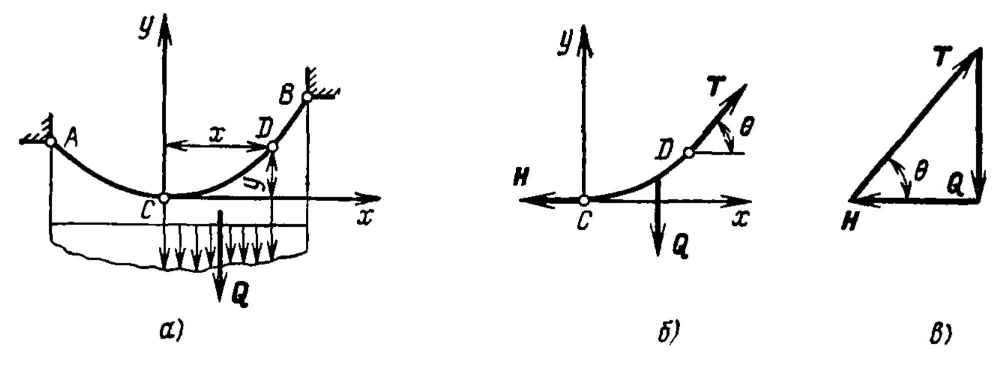


Рис. 13.2.

Уравнение (1*) является дифференциальным уравнением кривой в положении равновесия и после интегрирования дает ответ на первый из поставленных выше вопросов. Второе уравнение отвечает на второй вопрос.

Относительно характера внешней нагрузки на нить необходимо отметить следующее. На практике наиболее часто встречаются два случая распределения этой нагрузки.

1) Тонкий трос или легкая цепь подвержены воздействию равномерно распределенной нагрузки, приложенной с помощью вертикальных подвесок (рис. 13.3). Обычно эта нагрузка велика по сравнению с весом самого троса или цепи, и можно считать, что она распределена равномерно по длине горизонтального пролета.

2) Гибкая нить свободно висит в поле сил тяжести, находясь под действием только собственного распределенного веса (рис. 13.4). Эпюра такой нагрузки определяется, очевидно, видом кривой, форму которой принимает нить.

В первом случае нагруженная гибкая нить принимает форму параболы, во втором — цепной линии. Приведем основные формулы для определения характеристик нити в обоих основных случаях.

Параболическая нить. Если на нить действует равномерно распределенная по длине пролета l вертикальная нагрузка интенсивности q (рис. 13.3), то уравнение равновесной кривой нити при выбранном направлении осей координат имеет вид

$$y=\frac{qx^2}{2H}, \tag{3*}$$

т. е. нить образует участок параболы с вертикальной осью.

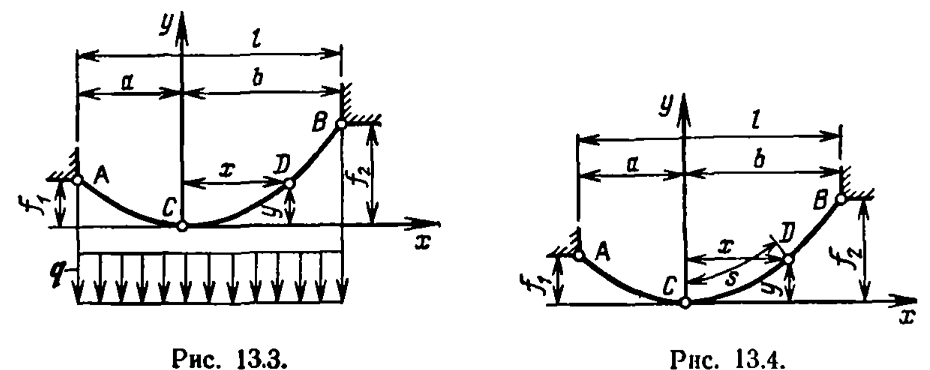


Рис. 13.3. Рис. 13.4.

Натяжение нити вдоль кривой изменяется в соответствии с уравнением (2*)

$$T=\sqrt{H^2+(qx)^2}, \tag{4*}$$

откуда следует, что натяжение нити будет минимальным в самой нижней точке C (где оно равно H) и что оно увеличивается к концам нити, достигая максимума в верхней опоре.

Силы натяжения на концах нити в точках A и B соответственно равны

$$T_a=\sqrt{H^2+q^2a^2}, \qquad T_b=\sqrt{H^2+q^2b^2}, \tag{5*}$$

где расстояния a и b нижней точки C относительно опор A и B определяются из уравнений

$$f_1=\frac{qa^2}{2H}, \qquad f_2=\frac{qb^2}{2H} \tag{6*а}$$

или из уравнений

$$a=\frac{l}{2}-\frac{(f_2-f_1)H}{ql}, \qquad b=\frac{l}{2}+\frac{(f_2-f_1)H}{ql}. \tag{6*б}$$

Во всех этих уравнениях остается пока неизвестной величина минимального натяжения H. Она определяется по формуле

$$H=\frac{ql^2}{2(\sqrt{f_1}\pm\sqrt{f_2})^2}. \tag{7*}$$

В этом уравнении знак плюс соответствует случаю, когда вершина параболы, определяющей положение равновесия нити, расположена между опорами, как это показано на фигуре. Знак минус относится к тому случаю, когда вершина параболы лежит по одну сторону от обеих опор.

В важном частном случае, когда обе опоры находятся на одном уровне, имеем

$$f_1=f_2=f, \qquad a=b=\frac{l}{2} \quad \text{и} \quad H=\frac{ql^2}{8f}.$$

Цепная линия. Будем считать, что нить свободно подвешена в поле сил тяжести и подвержена действию только собственного веса, равномерно распределенного по длине нити (рис. 13.4). Введем следующие обозначения: q — вес единицы длины нити, s — длина дуги CD. Тогда связь между координатами s и x точки D дается уравнением *)

$$s=\frac{H}{q}\operatorname{sh}\frac{qx}{H}. \tag{8*}$$

Длина нити L между опорами равна

$$L=\frac{H}{q}\left(\operatorname{sh}\frac{qa}{H}+\operatorname{sh}\frac{qb}{H}\right). \tag{9*}$$

Уравнение равновесной кривой нити при выбранном направлении координатных осей имеет вид

$$y=\frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qx}{H}-1\right). \tag{10*}$$

Это уравнение цепной линии с вертикальной осью.

Натяжение нити в произвольной точке D равно

$$T=H+qy. \tag{11*}$$

Из этого уравнения следует, что натяжение T будет минимальным в нижней точке C нити, где оно равно H, затем оно увеличивается к концам нити и достигает наибольшей величины в верхней опоре. Натяжения на концах A и B соответственно равны

$$T_a=H+qf_1, \qquad T_b=H+qf_2. \tag{12*}$$

Если требуется определить расстояния a и b, то следует воспользоваться формулами

$$a=\frac{H}{q}\operatorname{arch}\left(\frac{qf_1}{H}+1\right), \qquad b=\frac{H}{q}\operatorname{arch}\left(\frac{qf_2}{H}+1\right). \tag{13*}$$

---

*) Напомним, что гиперболические синус и косинус определяются формулами

$$\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}), \qquad \operatorname{ch} z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}).$$

Наконец, величина H находится из уравнения

$$\frac{ql}{H}=\operatorname{arch}\left(\frac{qf_1}{H}+1\right)+\operatorname{arch}\left(\frac{qf_2}{H}+1\right) \qquad (14^*)$$

с помощью таблиц гиперболических функций.

При решении задач на равновесие гибких нитей необходимо:

1) определить вид нагрузки, действующей на нить (собственный вес, нагрузка, равномерно распределенная по горизонтальному пролету, и т. п.);

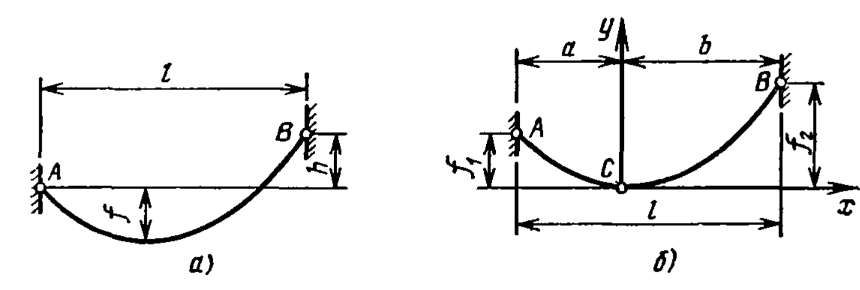
2) выбрать систему координат и составить дифференциальное уравнение равновесия нити и уравнение для растягивающего усилия T;

3) проинтегрировав уравнение равновесия, найти уравнение равновесной кривой нити;

4) в зависимости от конкретных условий задачи найти искомые параметры.

§ 2. Параболическая нить

Задача 13.1. На рис. *а* изображен трос подвесного моста, несущий равномерно распределенную по его горизонтальной длине l нагрузку $Q=54$ *Т*. Определить вид кривой, которую займет трос, и максимальное натяжение троса, если $l=30$ *м*, $f=3{,}6$ *м*, $h=3$ *м*.



К задаче 13.1.

Решение. Выбираем систему координат, помещая начало в нижней точке троса C и направляя ось x горизонтально вправо, а ось y — вертикально вверх (рис. *б*). Провисания троса, очевидно, равны $f_1=f=3{,}6$ *м*, $f_2=f+h=6{,}6$ *м*. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q=Q/l=\frac{54}{30}=1{,}8$ *Т/м*.

Чтобы написать уравнение равновесной кривой троса, воспользуемся уравнением (1*). В данном случае сила Q равна

$$Q=qx,$$

и уравнение принимает вид

$$\frac{dy}{dx}=\frac{qx}{H}.$$

Интегрируя, получаем

$$y=\frac{qx^2}{2H}+C_2.$$

Поскольку при выбранной системе координат при $x=0$ координата $y=0$, произвольная постоянная $C_2=0$ и уравнение равновесной кривой троса будет

$$y=\frac{qx^2}{2H}. \qquad (1)$$

Это уравнение параболы с вертикальной осью и с вершиной в точке C. Для нахождения натяжения троса T воспользуемся уравнением (2*), которое примет вид

$$T=\sqrt{H^2+(qx)^2}.$$

Поскольку, как это следует из формулы, натяжение T возрастает по мере удаления от точки C, максимальное натяжение троса будет иметь место в точке B и составит величину

$$T_b=\sqrt{H^2+q^2b^2},$$

где b — расстояние точки C от опоры B, взятое по горизонтали.

Для нахождения неизвестных пока величин b и H можно воспользоваться формулами (6*) и (7*); проделаем это подробнее.

Применив уравнение равновесной кривой троса (1) к точкам A и B, найдем

$$f_1=\frac{qa^2}{2H}, \quad f_2=\frac{qb^2}{2H}. \qquad (2)$$

Вычтя первое уравнение из второго, получим

$$2(f_2-f_1)H=q(b^2-a^2).$$

Одновременно имеем, что

$$a+b=l.$$

Из последних двух уравнений следует

$$a=\frac{l}{2}-\frac{(f_2-f_1)H}{ql}, \quad b=\frac{l}{2}+\frac{(f_2-f_1)H}{ql}. \qquad (3)$$

Выражение для нахождения величины H может быть найдено подстановкой полученного значения для b во второе уравнение системы (2). Получаем

$$(f_2-f_1)^2H^2-ql^2(f_2+f_1)H+\frac{q^2l^4}{4}=0;$$

Решая это квадратное уравнение, находим

$$H=\frac{ql^2}{2(\sqrt{f_1}\pm\sqrt{f_2})^2}.$$

В этом уравнении следует принять знак плюс, так как вершина параболы лежит между опорами. Следовательно, минимальное натяжение H равно

$$H=\frac{ql^2}{2(\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2})^2}=\frac{1,8\cdot 30^2}{2(\sqrt{3,6}+\sqrt{6,6})^2}\approx 40,6\ T.$$

Величину b можно теперь найти либо из второго уравнения (2), либо из второго уравнения (3). Воспользовавшись последним, получаем

$$b=\frac{l}{2}+\frac{(f_2-f_1)H}{ql}=\frac{30}{2}+\frac{(6,6-3,6)\cdot 40,6}{1,8\cdot 30}\approx 17,25\ м.$$

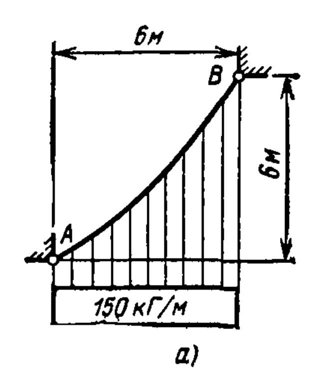
Теперь уравнение (1) равновесной кривой троса принимает вид

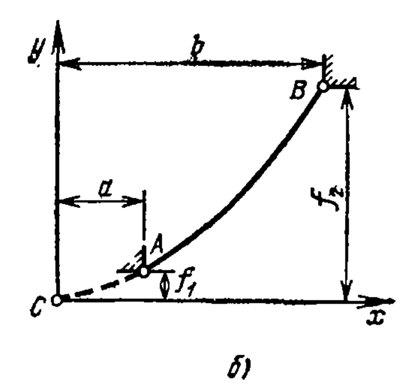
$$y=\frac{1,8}{2\cdot 40,6}x^2=0,0222\ x^2.$$

Максимальное натяжение троса

$$T_b=\sqrt{H^2+q^2b^2}=\sqrt{40,6^2+1,8^2\cdot 17,25^2}\approx 51,1\ T.$$

Задача 13.2. Канат несет нагрузку в 150 *кГ* на каждый метр длины горизонтального пролета (рис. *а*). Определить максимальное





К задаче 13 2.

растягивающее усилие в канате, если натяжение в точке B в 2 раза больше, чем в точке A. Размеры конструкции даны на рис. *а*.

Решение. Предположим, что вершина C параболы, определяющей положение равновесия каната, лежит слева от обеих опор (рис. *б*). Обозначим, как обычно, через a и b расстояния опор A и B от вершины C по горизонтали, а через f_1 и f_2 эти же расстояния по вертикали.

Имеем очевидные равенства

$$b=a+6, \quad (1)$$

$$f_2=f_1+6. \quad (2)$$

В задаче указано, что натяжение каната в точке B в 2 раза больше, чем в точке A. Запишем это условие в виде уравнения, использовав непосредственно формулы (5*) и учитывая равенство (1). Имеем

$$2\sqrt{H^2+q^2a^2}=\sqrt{H^2+q^2(a+6)^2}, \tag{3}$$

где H — натяжение каната в точке C в *кГ*, q — интенсивность распределенной нагрузки в *кГ/м*. В этом уравнении два неизвестных a и H. Для их определения необходимо составить еще одно уравнение. Оно получается из (2), если величины f_1 и f_2 выразить по формулам (6*а) и учесть снова равенство (1)

$$\frac{q(a+6)^2}{2H}=\frac{qa^2}{2H}+6. \tag{4}$$

Возводя обе части уравнения (3) в квадрат и раскрывая скобки в левой части уравнения (4), получим после некоторых упрощений:

$$\left.\begin{aligned} H^2+q^2a^2-4q^2a-12q^2=0,\\ \frac{qa}{H}+\frac{3q}{H}=1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Из второго уравнения этой системы находим

$$H=q(a+3). \tag{6}$$

Подставляя это значение H в первое уравнение системы (5), получаем квадратное уравнение

$$2a^2+2a-3=0,$$

откуда

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+6}}{2}.$$

Таким образом, имеется два значения a.

Выбрав положительное значение, находим

$$a=\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\approx 0{,}823 \text{ м}.$$

Из уравнения (6) определяем H:

$$H=q(a+3)=150(0{,}823+3)\approx 573{,}4 \text{ кГ}.$$

Возвратившись опять ко второй формуле (5*), находим искомое максимальное усилие в канате

$$T_b=\sqrt{H^2+q^2(a+6)^2}=\sqrt{573{,}4^2+150^2(0{,}823+6)^2}\approx 1173 \text{ кГ}.$$

В этом случае вершина параболы C лежит слева от обеих опор (рис. *б*).

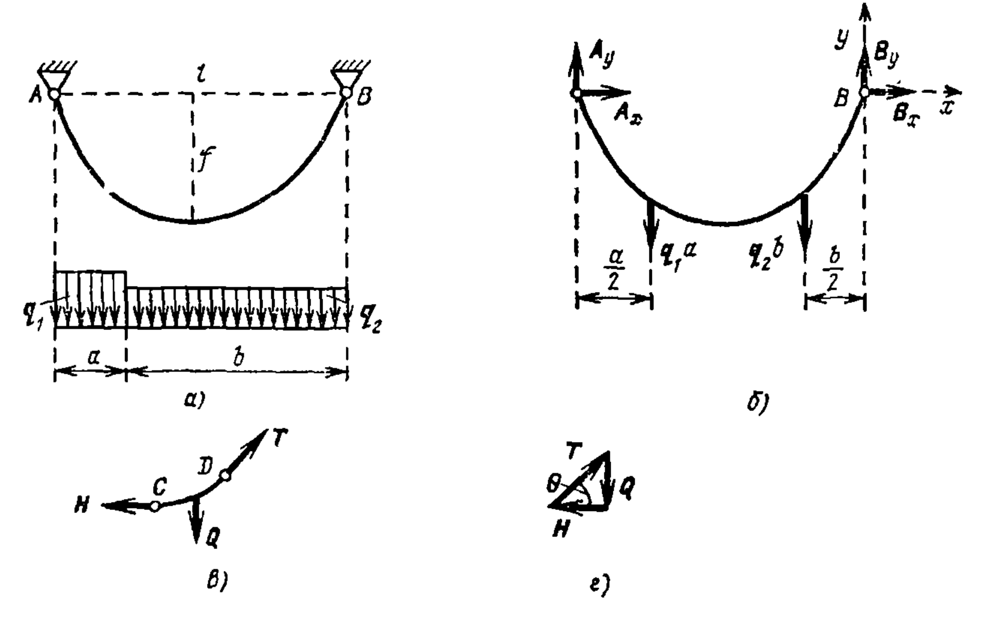
Если же выбрать второй отрицательный корень, то

$$a=\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\approx -1{,}823 \text{ м}.$$

и вершина параболы лежит между опорами. Для этого случая находим:

$$b=4{,}177 \text{ м},\quad H=176{,}6 \text{ кГ},\quad T_a=325{,}5 \text{ кГ},$$
$$T_b=651 \text{ кГ},\quad f_1=1{,}46 \text{ м},\quad f_2=7{,}46 \text{ м}.$$

Задача 13.3. Гибкая нерастяжимая нить прикреплена в точках A и B, лежащих на одной горизонтали (рис. *а*). На нить действует вертикальная нагрузка, распределенная по всей длине пролета, причем на участке длины a интенсивность нагрузки q_1, а на участке



К задаче 13.3.

длины b ее интенсивность q_2. Длина пролета $AB=l$, наибольший провес f. Определить горизонтальное натяжение нити, если $a \leqslant b$ и наинизшая точка лежит на участке b.

Решение. Рассмотрим равновесие всей нити, отбросив мысленно опоры и заменив их действие реакциями (рис. *б*). Для определения составляющей реакции $\boldsymbol{B}_y$ составим сумму моментов всех сил относительно точки A

$$B_y l - q_1 a\frac{a}{2} - q_2 b\left(l-\frac{b}{2}\right)=0, \qquad (1)$$

откуда

$$B_y=\frac{q_1a^2+2q_2bl-q_2b^2}{2l}. \qquad (2)$$

Рассмотрим равновесие отрезка гибкой нити CD, где C — наинизшая точка, а D — произвольная точка правой части нити. Она находится под действием трех сил: натяжения $\boldsymbol{H}$ в точке C, натяжения $\boldsymbol{T}$ в точке D и вертикальной нагрузки $\boldsymbol{Q}$ (рис. *в*). Строим на этих трех силах замкнутый силовой треугольник, откуда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H}. \tag{3}$$

Но вертикальная нагрузка

$$Q = B_y - q_2 x, \tag{4}$$

где x отсчитывается по горизонтали от опоры B.

Внеся (4) в (3), имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y - q_2 x}{H}. \tag{5}$$

Отделяя переменные и интегрируя, находим

$$Hy = B_y x - \frac{1}{2} q_2 x^2 + C_1. \tag{6}$$

Произвольная постоянная $C_1 = 0$, так как при $x = 0$ $y = 0$. С другой стороны, в точке C

$$\frac{dy}{dx} = 0 \tag{7}$$

и из (5) определяем

$$x_1 = \frac{B_y}{q_2}. \tag{8}$$

Подставив в уравнение (6) $y = f$, а вместо x его значение (8), получим

$$Hf = \frac{B_y^2}{2q_2}. \tag{9}$$

Внеся в это равенство значение B_y из (2), окончательно находим

$$H = \frac{(q_1 a^2 + 2q_2 bl - q_2 b^2)^2}{8q_2 f l^2}. \tag{10}$$

Задача 13.4. Канат подвешен к точкам A и B, лежащим на одной горизонтали. Он несет нагрузку, равномерно распределенную по горизонтали интенсивности q *кГ/м*. Расстояние $AB = l$. Провес в середине пролета f. Определить длину каната, а также изменение провеса, если длина каната вследствие температурного скачка изменилась на величину ΔS. Ввиду малости отношения $f/l \leqslant 1/10$ членами, содержащими его в степени выше второй, пренебречь.

Решение. Выбираем начало координат в точке A. Тогда уравнение (1*) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{qx}{H} + C_1. \tag{1}$$

Интегрируя его, находим уравнение кривой

$$y=-\frac{qx^2}{2H}+C_1x+C_2. \tag{2}$$

Граничные условия:

$$y=0 \quad \text{при} \quad x=0,$$
$$y=0 \quad \text{при} \quad x=l.$$

Внося эти условия в уравнение (2), получаем уравнение кривой

$$y=\frac{q}{2H}x(l-x). \tag{3}$$

Это парабола с вертикальной осью.

Вычисляя от (3) производную по x и приравнивая ее нулю, находим, что наибольший провес расположен посредине и равен

$$f=\frac{ql^2}{8H}. \tag{4}$$

Длину каната вычисляем по формуле

$$S=\int_0^l \sqrt{1+y'^2}\,dx, \tag{5}$$

внося в эту формулу значение

$$y'=\frac{q}{2H}(l-2x)=\frac{4f}{l}\left(1-2\frac{x}{l}\right) \tag{6}$$

Разлагая подынтегральную функцию в ряд и интегрируя, находим

$$S=l\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{f}{l}\right)^2-\frac{32}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^4+\frac{256}{7}\left(\frac{f}{l}\right)^6-\ldots\right]. \tag{7}$$

Для параболы с малой стрелкой прогиба, ограничиваемся приближенно значением

$$S=l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right). \tag{8}$$

Отсюда находим зависимость вариации провеса от вариации длины

$$\Delta S=\frac{16}{3}\frac{f}{l}\Delta f \tag{9}$$

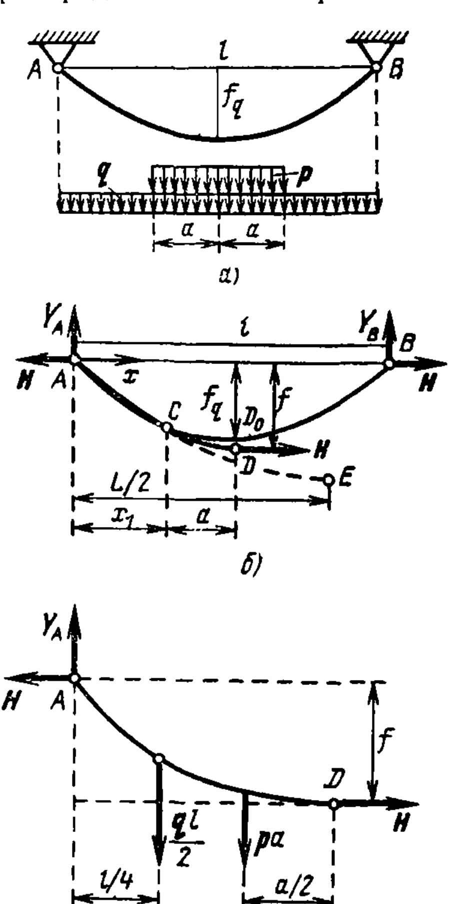
или окончательно

$$\Delta f=\frac{3}{16}\frac{l}{f}\Delta S. \tag{10}$$

Заметим, что формула (8) с учетом (4) может быть записана в виде

$$S=l\left(1+\frac{q^2l^2}{24H^2}\right). \tag{11}$$

Задача 13.5. Гибкая нерастяжимая нить, закрепленная в точках A и B, лежащих на одной горизонтали, и нагруженная равномерно распределенной по горизонтали нагрузкой q *кГ/м*, имеет провес f_q. Расстояние $AB = l$. Затем нить догрузили симметрично расположенной равномерно распределенной по горизонтали нагрузкой p *кГ/м* на участке длиной $2a$ (рис. *а*). Найти уравнения кривой равновесия нити, полагая стрелку провеса малой. Определить изменения провеса f и горизонтального натяжения H. Найти отношение $2a/l$, при котором провес f становится максимальным.



К задаче 13.5.

Решение. Обозначим буквой C точку нити, расположенную на вертикали, проходящей на расстоянии a от центральной оси. Точка C делит нить AD на две параболические ветви AC и CD, которые в точке C имеют общую касательную (рис. *б*).

В самом деле, разрежем мысленно нить в точке C и рассмотрим равновесие этой точки. На точку C действуют две реакции — натяжение части нити AC и части нити CD. Под действием двух сил точка C может находиться в равновесии только при условии, что они направлены по одной прямой. Но натяжения направлены по касательным к соответствующей части нити. Следовательно, касательные к частям нити AC и CD в точке C должны совпадать.

Выбирая оси координат с началом в точке A, запишем уравнение ветви AC, согласно (1*), в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{qx}{H} + C_1. \tag{1}$$

Интегрируя его и учитывая начальное условие $y = 0$ при $x = 0$, получим

$$y = -\frac{qx^2}{2H} + C_1 x. \tag{2}$$

Аналогично находим уравнение ветви CD:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q+p}{H}x + D_1, \tag{3}$$

интегрируя которое находим

$$y = -\frac{q+p}{2H}x^2 + D_1 x + D_2. \tag{4}$$

В точке C с абсциссой $x_1 = \frac{l}{2} - a$ равны ординаты обеих ветвей и их производные, определяющие угол наклона касательных:

$$-\frac{qx_1}{H} + C_1 = -\frac{q+p}{H}x_1 + D_1, \tag{5}$$

$$-\frac{qx_1^2}{2H} + C_1 x_1 = -\frac{q+p}{2H}x_1^2 + D_1 x_1 + D_2. \tag{6}$$

Из (5) и (6) находим

$$D_1 = C_1 + \frac{p}{H}x_1, \tag{7}$$

$$D_2 = -\frac{p}{2H}x_1^2. \tag{8}$$

Тогда уравнение параболической ветви CD будет

$$y = -\frac{qx^2}{2H} + C_1 x - \frac{p}{2H}(x - x_1)^2. \tag{9}$$

Для определения произвольной постоянной интегрирования C_1 воспользуемся условием горизонтальности касательной к кривой посредине пролета, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = l/2. \tag{10}$$

Подставляя эти условия в (9), находим

$$C_1 = \frac{ql}{2H} + \frac{pa}{H}. \tag{11}$$

Итак, уравнение ветви CD окончательно будет

$$y = -\frac{qx^2}{2H} + \left(\frac{ql}{2H} + \frac{pa}{H}\right)x - \frac{p}{2H}(x - x_1)^2. \tag{12}$$

Из этого уравнения находится провес f, если подставить значение $x = l/2$:

$$f = \frac{1}{2H}\left[\frac{ql^2}{4} + pa(l - a)\right] \tag{13}$$

Заметим, что формулу (13) можно получить и другим путем. Действительно, рассмотрим равновесие половины нити AD (рис. *в*),

находящейся под действием нагрузок: $ql/2$, pa, горизонтальных реакций H и вертикальной составляющей реакции Y_A. Из равенства нулю суммы проекций всех сил на ось y находим

$$Y_A=\frac{ql}{2}+pa.$$

Составляя далее сумму моментов всех сил относительно точки D, получим

$$fH-Y_A\frac{l}{2}+\frac{ql}{2}\cdot\frac{l}{4}+pa\cdot\frac{a}{2}=0$$

или

$$fH=\frac{ql^2}{8}+\frac{pa}{2}(l-a),$$

что совпадает с (13).

Уравнение ветви AC получаем, внося в равенство (2) значение произвольной постоянной интегрирования (11):

$$y=\left(\frac{ql}{2H}+\frac{pa}{H}\right)x-\frac{qx^2}{2H}. \tag{14}$$

Найдем абсциссу точки E вершины параболы AC. Для этого приравняем нулю производную (14)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ql}{2H}+\frac{pa}{H}-\frac{qx_2}{H}=0, \tag{15}$$

откуда

$$x_2=\frac{L}{2}=\frac{l}{2}+\frac{p}{q}a. \tag{16}$$

Переходим к определению горизонтального натяжения H. Для этого находим длину половины нити AD_0 при равномерно распределенной по горизонтали нагрузке q, согласно равенству (8) предыдущей задачи

$$AD_0=\frac{l}{2}\left(1+\frac{8}{3}\frac{f_q^2}{l^2}\right), \tag{17}$$

где f_q — провес нити под действием нагрузки q. После приложения добавочной равномерно распределенной по горизонтали нагрузки p длина половины нити AD найдется из равенства (рис. б)

$$AD=AE-CE+CD. \tag{18}$$

Находим слагаемые правой части, пользуясь формулой (11) предыдущей задачи. Имеем

$$AE=\frac{L}{2}\left(1+\frac{q^2L^2}{24H^2}\right). \tag{19}$$

Далее, замечая, что с учетом (16)

$$\frac{L}{2}-x_1=\left(1+\frac{p}{q}\right)a,$$

находим

$$CE=\left(1+\frac{p}{q}\right)a\left[1+\frac{(p+q)^2}{6H^2}a^2\right] \tag{20}$$

и

$$CD=a\left[1+\frac{(p+q)^2a^2}{6H^2}\right]. \tag{21}$$

Ввиду того, что нить нерастяжима, длина участка нити $AD_0=AD$. Внося значения (19), (20) и (21) в формулу (18) и приравнивая ее (17), найдем

$$\frac{l}{2}\left(1+\frac{8}{3}\frac{f_q^2}{l^2}\right)=\frac{l}{2}(1+zn)\left[1+\frac{q^2l^2(1+zn)^2}{24H^2}\right]-a(n+1)\left[1+\frac{a^2(p+q)^2}{6H^2}\right]+$$
$$+a\left[1+\frac{a^2(p+q)^2}{6H^2}\right], \tag{22}$$

где обозначено $p/q=n$, $2a/l=z$. При этом учтено, что $L=l(1+zn)$. Согласно формуле (4) предыдущей задачи

$$H_q=\frac{ql^2}{8f_q}. \tag{23}$$

Тогда формула (22) может быть переписана в виде

$$H=H_q\sqrt{1+3nz+3n^2z^2-(2n^2+n)z^3}. \tag{24}$$

Заменяя H и H_q через f и f_q по формулам (13) и (23), находим

$$\frac{f}{f_q}=\frac{1+nz(2-z)}{\sqrt{1+3nz+3n^2z^2-(2n^2+n)z^3}}. \tag{25}$$

Для определения участка $2a_1$, на котором надо расположить добавочную нагрузку p, чтобы провес достиг максимума, надо вычислить производную $\partial f/\partial z$ и приравнять ее нулю. Это приводит к уравнению

$$(2n^2+n)z^4-(2n^2-2n)z^3-3(n-1)z^2-4z+1=0.$$

Корни этого уравнения $z_1=2a_1/l$ могут быть найдены графически или приближенными методами. Ниже в таблице приводятся искомые значения при $0\leqslant n\leqslant 1$.

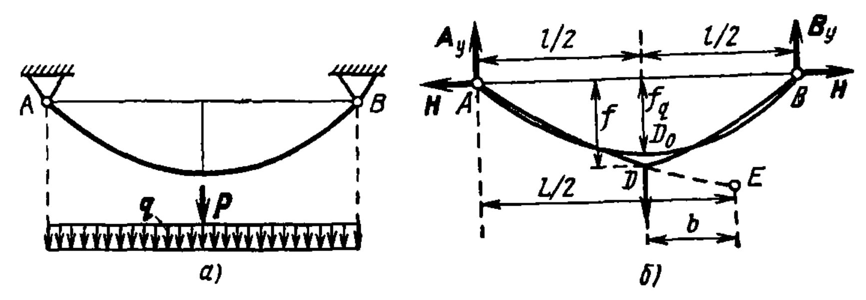
n	0	0,10	0,25	0,50	1,00
z_1	$0,33\dot{3}$	0,322	0,306	0,289	0,253
f/f_q-1	0	0,0069	0,0151	0,0281	0,0456
H/H_q	1	1,047	0,112	0,213	1,379

Эта задача впервые была корректно решена С. П. Тимошенко *).

*) S. Timoshenko, Journal Franklin Institute, № 235, 1943, стр. 213.

Задача 13.6. Гибкий нерастяжимый канат подвешен к шарнирам A и B, лежащим на одной горизонтали. Канат находится под действием нагрузки q *кГ/м*, равномерно распределенной по горизонтали. Затем в наинизшей точке к канату приложили сосредоточенную силу $\boldsymbol{P}$ (рис. *а*).

Требуется определить изменение провеса и горизонтального натяжения, если отношение $f/l \leqslant 10$ и членами, содержащими это отношение в степени выше второй, можно пренебречь.



К задаче 13.6.

Решение. Кривая, образованная канатом при одновременном действии двух нагрузок, состоит из двух симметричных ветвей парабол AD и BD (рис. *б*). В точке D обе кривые образуют угловую точку D.

Горизонтальное натяжение H_q при действии только распределенной нагрузки q равно

$$H_q = \frac{ql^2}{8f_q}. \tag{1}$$

Проектируя все силы, действующие на канат (включая силу $\boldsymbol{P}$), на вертикальную ось и замечая, что $A_y = B_y$ ввиду симметрии, находим

$$A_y = \frac{1}{2}(ql + P) = \frac{ql}{2}(1 + \nu), \tag{2}$$

где обозначено $P/ql = \nu$.

Разрежем мысленно канат в точке D и составим сумму моментов всех сил относительно этой точки:

$$A_y \frac{l}{2} - q\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4} - Hf = 0. \tag{3}$$

Тогда, подставляя в это уравнение величину A_y из (2), получаем

$$f = \frac{1}{H}\left(\frac{ql^2}{8} + \frac{Pl}{4}\right) = \frac{ql^2}{8H}(1 + 2\nu). \tag{4}$$

Согласно условию канат нерастяжим. Следовательно, длины дуг AD_0 до приложения силы $\boldsymbol{P}$ и AD после приложения силы $\boldsymbol{P}$ равны.

Длина дуги AD_0 равна (см. формулу (8) задачи 13.4)

$$AD_0=\frac{l}{2}\left(1+\frac{8}{3}\frac{f_q^2}{l^2}\right). \tag{5}$$

С другой стороны, длина дуги $AD=AE-DE$.

Пользуясь формулой (11) задачи 13.4, находим

$$AE=\frac{L}{2}\left(1+\frac{q^2L^2}{24H^2}\right), \qquad DE=b\left(1+\frac{q^2b^2}{6H^2}\right), \tag{6}$$

где $L/2$ — расстояние до вершины параболы E от вертикали, проходящей через шарнир A, b — расстояние от той же точки E до вертикали, проходящей через точку D. Так как канат нагружен только вертикальными силами и горизонтальные натяжения в любой точке каната равны, то расстояние b можно найти, приравнивая вертикальную составляющую в точке D. Фиктивная вертикальная нагрузка на участке DE, равная qb, должна равняться вертикальной нагрузке в точке D, равной для левой половины каната $P/2$, т. е.

$$\frac{P}{2}=qb$$

или

$$b=\frac{P}{2q}=\frac{l\nu}{2}.$$

Приравнивая длины дуг $AD_0=AD$ с учетом (5) и (6), находим

$$\frac{l}{2}\left(1+\frac{8}{3}\frac{f_q^2}{l^2}\right)=\frac{l}{2}(1+\nu)\left[1+\frac{q^2l^2(1+\nu)^2}{24H^2}\right]-\frac{l}{2}\nu\left(1+\frac{q^2l^2\nu^2}{24H^2}\right).$$

Если учесть (1), то после несложных преобразований находим

$$H=H_q\sqrt{1+3\nu+3\nu^2},$$
$$f=f_q\frac{1+2\nu}{\sqrt{1+3\nu+3\nu^2}}.$$

Эти формулы определяют изменения горизонтального натяжения и провеса, вызванные приложением сосредоточенной силы P.

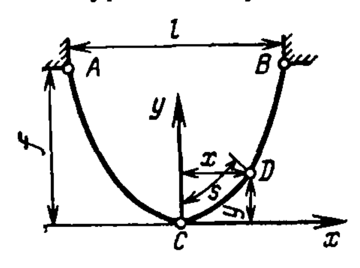
§ 3. Цепная линия

Задача 13.7. Гибкая нить длины 30 *м* и веса единицы длины 7,5 *кГ/м* свободно подвешена к двум опорам, находящимся на взаимном расстоянии 15 *м* и на одном уровне. Определить стрелу провисания в середине пролета и максимальное натяжение нити.

Решение. Изобразим схематически равновесное положение нити. В задаче заданы: расстояние между опорами $l=15$ *м*, длина всей нити $L=30$ *м* и вес единицы длины нити $q=7,5$ *кГ/м*. Здесь имеет

место второй основной случай нагружения, когда нить принимает форму цепной линии.

Для определения величины провисания нити f необходимо составить уравнение равновесной кривой нити. Выбрав систему координат Cxy, как показано на рисунке, воспользуемся основным дифференциальным уравнением (1*), которое принимает вид



К задаче 13.7.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{qs}{H}, \tag{1}$$

где s — длина дуги CD.

Для интегрирования этого уравнения надо предварительно выразить длину s как функцию координат x и y. Для этого используем известное соотношение

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

которое после подстановки в него значения dy/dx из уравнения (1) примет вид

$$\frac{ds}{\sqrt{1+\left(\frac{ds}{H}\right)^2}}=dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\frac{H}{q}\operatorname{arsh}\frac{qs}{H}=x+C_1. \tag{2}$$

Постоянная интегрирования C_1 определяется из условия, что для выбранной системы координат $s=0$ при $x=0$. Отсюда $C_1=0$. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$s=\frac{H}{q}\operatorname{sh}\frac{qx}{H}. \tag{3}$$

Подставив это выражение для s в уравнение (1), получаем дифференциальное уравнение равновесной кривой нити

$$dy=\operatorname{sh}\frac{qx}{H}\,dx.$$

После интегрирования найдем

$$y=\frac{H}{q}\operatorname{ch}\frac{qx}{H}+C_2.$$

Поскольку при $x=0$ координата $y=0$, получаем $C_2=-H/q$ и окончательно

$$y=\frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qx}{H}-1\right). \tag{4}$$

Теперь мы имеем все уравнения, необходимые для решения задачи. Действительно, положив в уравнении (3) $x=l/2$, получим

$$\frac{L}{2}=\frac{H}{q}\operatorname{sh}\frac{ql}{2H},$$

или, после подстановки числовых значений,

$$\frac{112{,}5}{H}=\operatorname{sh}\frac{56{,}25}{H}.$$

Это уравнение вида $2z=\operatorname{sh} z$. С помощью таблиц гиперболического синуса находим подбором его решение *)

$$z=\frac{56{,}25}{H}\approx 2{,}177,$$

откуда определяем натяжение нити в точке B: $H\approx 25{,}84$ *кГ*.

Искомое провисание нити найдется теперь из уравнения (4), если положить в нем $x=l/2$:

$$f=\frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{ql}{2H}-1\right)=\frac{25{,}84}{7{,}5}\left(\operatorname{ch}\frac{7{,}5\cdot 15}{2\cdot 25{,}84}-1\right)\approx 11{,}94\ \text{м}.$$

Для определения натяжения нити используем основное соотношение (2*). Вспомнив, что $Q=qs$, и, применив уравнение (3), найдем

$$Q=H\operatorname{sh}\frac{qx}{H}.$$

Подставив это в уравнение (2*), получим

$$T=\sqrt{H^2+Q^2}=H\operatorname{ch}\frac{qx}{H},$$

или, используя соотношение (4),

$$T=H+qy.$$

Из последнего уравнения следует, что натяжение нити достигает максимума в точках закрепления A и B, где оно равно

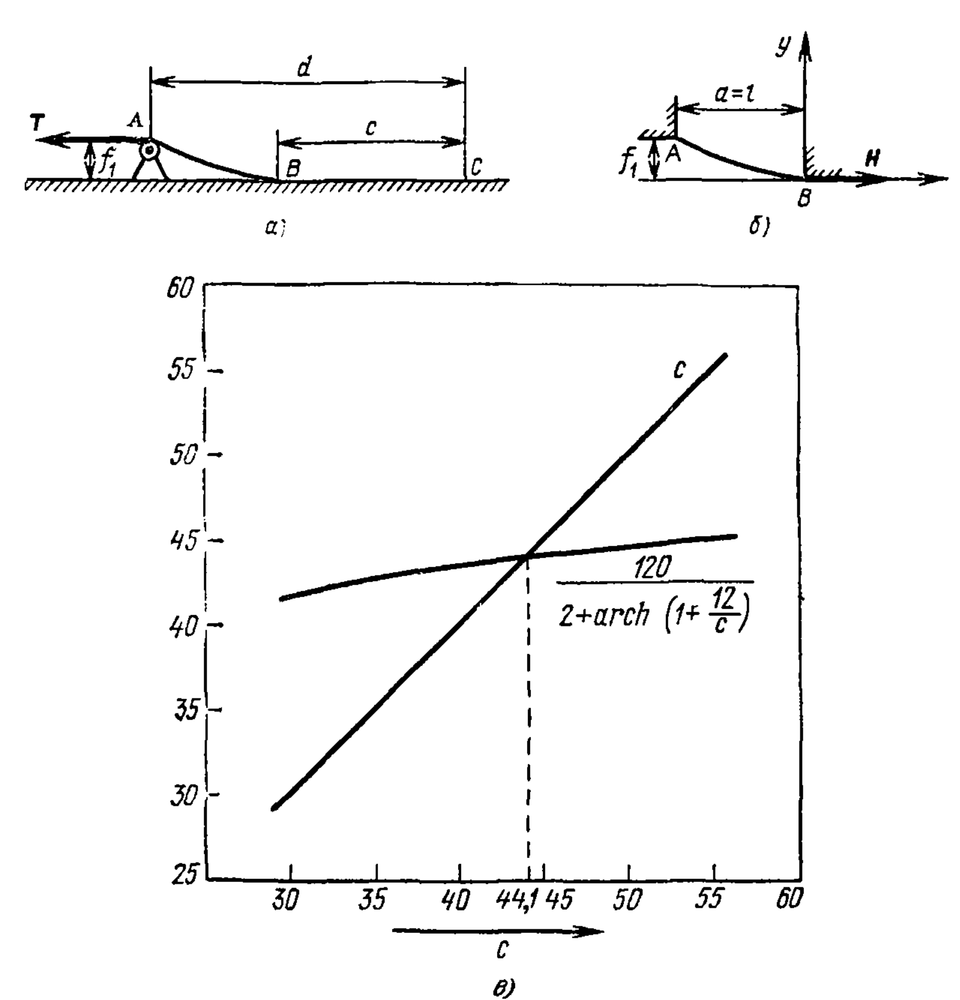
$$T_{\max}=H+qf=25{,}84+7{,}5\cdot 11{,}94\approx 115{,}4\ \text{кГ}.$$

Задача 13.8. Часть гибкой нити с равномерно распределенным по длине весом лежит на горизонтальной плоскости. Остальная часть нити проходит над небольшим блоком A (рис. *а*). К концу нити прикладывается постепенно увеличивающаяся сила $\boldsymbol{T}$. При этом длина линии контакта BC нити с плоскостью уменьшается и стремится к какому-то определенному пределу c, при котором начинается скольжение нити по плоскости. Определить это предельное значение c, если $d=60$ *м*, $f_1=6$ *м*, коэффициент трения между нитью и плоскостью $f_0=0{,}5$.

---

*) О других способах решения подобных уравнений см. в задаче 13.8.

Решение. Участок AB нити, который примет форму цепной линии, изображен схематически на рис. б. При решении этой задачи будем пользоваться формулами, данными в начале этой главы, учитывая, что в данном случае точка B является нижней точкой кривой.



К задаче 13.8.

Следовательно, во всех этих формулах надо положить $a = l$, $b = 0$, $f_2 = 0$, $T_b = H$, $T_a = T$.

С увеличением силы $\boldsymbol{T}$ возрастает и натяжение нити H в точке B. Нить начнет скользить, когда это натяжение станет равным силе трения между участком BC нити и плоскостью. Запишем это условие в виде уравнения

$$H = qcf_0, \tag{1}$$

где q — вес единицы длины нити.

Величина H должна удовлетворять уравнению (14*), которое в данной задаче принимает вид

$$\frac{ql}{H} = \operatorname{arch}\left(\frac{qf_1}{H} + 1\right). \tag{2}$$

Исключая из уравнений (1). и (2) величину H, получаем уравнение

$$\frac{l}{cf_0} = \operatorname{arch}\left(\frac{f_1}{cf_0} + 1\right),$$

из которого и определяется искомый размер c. Поскольку $l = d - c$, это уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{cf_0} - \frac{1}{f_0} = \operatorname{arch}\left(\frac{f_1}{cf_0} + 1\right)$$

или, подставляя сюда известные величины,

$$\frac{120}{c} - 2 = \operatorname{arch}\left(\frac{12}{c} + 1\right). \tag{3}$$

Разрешить это трансцендентное уравнение относительно c с помощью точных алгебраических методов не представляется возможным. Поэтому для нахождения его корней приходится пользоваться приближенными способами. Рассмотрим два таких способа: графический и метод итераций.

Графический способ заключается в том, что на одном чертеже строятся графики левой и правой частей уравнения. Абсциссы точек пересечения этих графиков и дают приближенные значения корней. Для некоторого упрощения представим сначала уравнение (3) в виде

$$c = \frac{120}{2 + \operatorname{arch}\left(\frac{12}{c} + 1\right)}. \tag{4}$$

Графиком левой части уравнения (4) является биссектриса первого координатного угла. Для построения графика правой части вычислим ее величину при нескольких значениях c, взятых около предполагаемого значения корня. Результаты вычислений сведены в табл. 1.

Таблица 1

c	$\frac{12}{c}$	$1+\frac{12}{c}$	$\operatorname{arch}\left(1+\frac{12}{c}\right)$	$2+\operatorname{arch}\left(1+\frac{12}{c}\right)$	$\frac{120}{2+\operatorname{arch}\left(1+\frac{12}{c}\right)}$
30	0,4000	1,4000	0,8670	2,8670	41,86
35	0,3429	1,3429	0,8062	2,8062	42,76
40	0,3000	1,3000	0,7557	2,7557	43,55
45	0,2667	1,2667	0,7150	2,7150	44,20
50	0,2400	1,2400	0,6800	2,6800	44,78
55	0,2182	1,2182	0,6491	2,6491	45,30

$c \approx 44{,}1$ *м*

По данным таблицы построен рис. *в*, из которого следует, что искомое значение c равно 44,1.

Метод итераций состоит в следующем. Данное уравнение $F(x)=0$ записывают в виде $x=\varphi(x)$ и находят более точное значение корня x_1 по первому приближению x_0 с помощью формулы $x_1=\varphi(x_0)$. Повторив этот процесс несколько раз, можно получить значение корня с любой степенью точности, если на интервале между корнем уравнения и первым приближением $|\varphi'(x)|<1$. Если же это условие не выполнено, то уравнение следует преобразовать (хотя бы переходом к обратной функции).

Нетрудно убедиться, что модуль производной правой части уравнения (4) при $30<c<55$ меньше 1. Следовательно, это уравнение можно итерировать, приняв за первое приближение c_0 значение c из указанного интервала.

Принимая $c_0=46$ *м*, находим

$$c_1=\frac{120}{2+\operatorname{arch}\left(\frac{12}{46}+1\right)}=44{,}3\ м$$

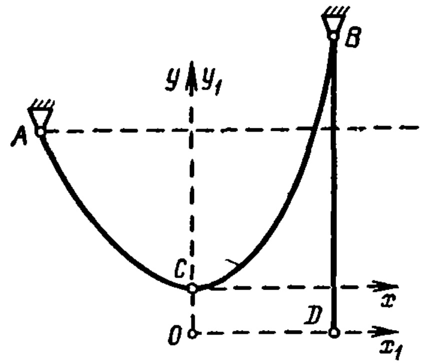
и далее

$$c_2=\frac{120}{2+\operatorname{arch}\left(\frac{12}{44{,}3}+1\right)}=44{,}12\ м,$$

$$c_3=\frac{120}{2+\operatorname{arch}\left(\frac{12}{44{,}12}+1\right)}=44{,}08\ м.$$

На этом процесс итераций можно закончить, приняв окончательно $c=44{,}1$ *м*.

Задача 13.9. Гибкая нерастяжимая нить подвешена к опоре A и пропущена в точке B через ничтожно малый блок. Вес единицы длины нити q. Определить длину свободно свешивающейся части нити, при которой равновесие не нарушится. Трением в блоке пренебречь.



К задаче 13.9.

Решение. Выбрав начало координат в наинизшей точке кривой, воспользуемся для нахождения уравнения кривой уравнением (1*)

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{H},$$

где H — натяжение в точке c.

Тогда, замечая, что приращение вертикальной нагрузки $dQ=q\,ds$, имеем

$$dy'=\frac{dQ}{H}=\frac{q}{H}\,ds$$

или, подставляя

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{1}$$

и отделяя переменные, находим

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{q}{H}\,dx.$$

Интегрируя, получим

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{x/a} + c_1, \tag{2}$$

где для краткости обозначено $H/q = a$.

Так как

$$(y')_{x=0} = 0,$$

то $c_1 = 0$ и окончательно уравнение (2) имеет вид

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{x/a}. \tag{3}$$

Из уравнения (3) следует, что

$$y' - \sqrt{1+y'^2} = -e^{-x/a}, \tag{4}$$

в чем легко убедиться, перемножив (3) на (4).

Сложив уравнения (3) и (4), имеем

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + c_2. \tag{5}$$

Положив $x = 0$ и $y = 0$, находим $c_2 = a$.

Перенесем начало координат в точку $O(0, -a)$. Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$y_1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{q}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Ось Ox_1 называется основанием цепной линии. Так как нить находится только под действием вертикальной нагрузки, то проекция натяжения на горизонталь неизменна:

$$T\frac{dx}{ds} = H, \quad \text{или} \quad T = H\frac{ds}{dx}.$$

Согласно (1) это равенство можно переписать в виде

$$T = H\sqrt{1+y'^2}.$$

Вычитая из (3) равенство (4), находим

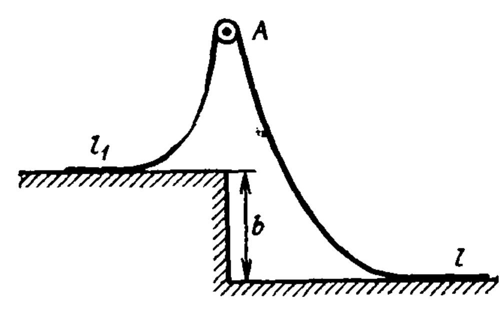
$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=\frac{y_1}{a}$$

и окончательно получаем выражение для натяжения нити в произвольной точке кривой

$$T=\frac{H}{a}y_1=qy_1.$$

Следовательно, нить будет в равновесии, если длина свисающей части будет равна $y_1=BD$.

Задача 13.10. Гибкая нерастяжимая нить перекинута через ничтожно малый гладкий блок A. Концы нити покоятся на двух шероховатых горизонтальных плоскостях. Левая плоскость расположена выше правой на величину b. Определить в предельном случае равновесия разность длин горизонтальных частей нити $l-l_1$.



К задаче 13.10.

Решение. В предыдущей задаче была получена формула для натяжения нити

$$T=qy,$$

где y — координата, отсчитываемая от основания цепной линии. Так как на блоке A натяжения левой и правой цепных линий одинаковы, то и основания у них должны быть одинаковыми.

Обозначая параметры цепных линий через a и a_1, запишем, согласно условию,

$$a-a_1=b. \qquad (1)$$

Натяжение в низшей точке цепной линии $H=aq$ должно равняться силе трения, т. е.

$$aq=fql. \qquad (2)$$

Аналогично для второй цепной линии имеем

$$H_1=a_1q=fql_1. \qquad (3)$$

Вычитая из (2) равенство (3), получаем с учетом (1)

$$l-l_1=\frac{a-a_1}{f}=\frac{b}{f}.$$

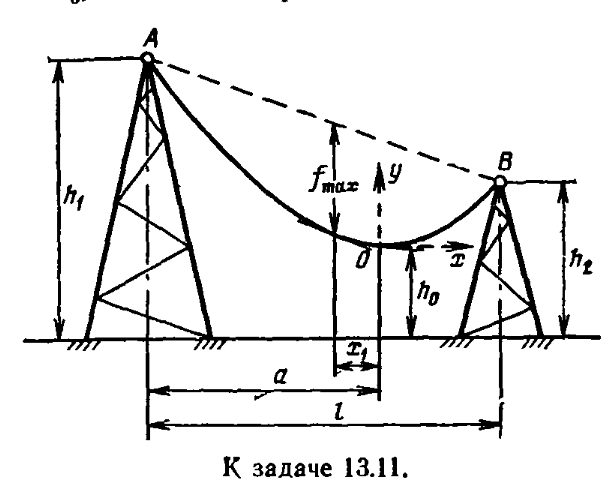
Задача 13.11. Электрический провод на переправе через реку подвешен к двум опорам высотой h_1 и h_2. Длина провода L, а расстояние между основаниями опор l. Вес единицы длины провода q.

Найти уравнение кривой, наибольший провес и максимальное натяжение, если $h_1=30$ *м*, $h_2=12$ *м*, $l=20$ *м*, $L=45$ *м*, $q=1{,}25$ *кГ/м*.

Решение. Если выбрать начало координат в вершине цепной линии O, то уравнение кривой, согласно (10*), будет

$$y=\frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qx}{H}-1\right). \tag{1}$$

При этом неизвестными являются: положение точки O, заданное отрезками a и h_0, а также горизонтальное натяжение H. Для их



К задаче 13.11.

определения воспользуемся условиями прохождения цепной линии через точки крепления A и B, а также формулой, определяющей длину провода между опорами. Имеем

$$h_1-h_0=\frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qa}{H}-1\right), \tag{2}$$

$$h_2-h_0=\frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{l-a}{H}q-1\right). \tag{3}$$

Находим далее длину провода

$$L=\int_{-a}^{l-a}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{-a}^{l-a}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{qx}{H}}\,dx=\int_{-a}^{l-a}\operatorname{ch}\frac{qx}{H}\,dx=$$
$$=\frac{H}{q}\operatorname{sh}\frac{qx}{H}\Big|_{-a}^{l-a}=\frac{H}{q}\left(\operatorname{sh}\frac{l-a}{H}q+\operatorname{sh}\frac{qa}{H}\right)=2\frac{H}{q}\operatorname{sh}\frac{lq}{2H}\operatorname{ch}\frac{2a-l}{2H}q. \tag{4}$$

Вычитая (3) из (2), находим

$$h_1-h_2=\frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qa}{H}-\operatorname{ch}\frac{l-a}{H}q\right)=2\frac{H}{q}\operatorname{sh}\frac{lq}{2H}\operatorname{sh}\frac{2a-l}{2H}q. \tag{5}$$

Для определения горизонтального натяжения H возведем (4) и (5) в квадрат и вычтем из первого второе:

$$L^2-(h_1-h_2)^2=4\left(\frac{H}{q}\right)^2 \operatorname{sh}^2\frac{lq}{2H}\left(\operatorname{ch}^2\frac{2a-l}{2H}q-\operatorname{sh}^2\frac{2a-l}{2H}q\right)=$$

$$=4\left(\frac{H}{q}\right)^2 \operatorname{sh}^2\frac{lq}{2H}.$$

Из этого уравнения находим

$$\operatorname{sh}\frac{lq}{2H}=\frac{lq}{2H}\sqrt{\frac{L^2}{l^2}-\frac{(h_1-h_2)^2}{l^2}}=2{,}06\frac{lq}{2H}.$$

Это трансцендентное уравнение вида $\operatorname{sh} z=2{,}06\,z$ решается графически построением двух кривых (или подбором по таблице) $f_1(z)=\operatorname{sh} z$, $f_2(z)=2{,}06z$. Их пересечение дает $z=lq/2H=2{,}23$, откуда

$$\frac{H}{q}=\frac{20}{4{,}46}=4{,}48 \text{ м}, \tag{6}$$

$$H=4{,}48\cdot 1{,}25=5{,}6 \text{ кГ}.$$

Для нахождения a разделим (5) на (4). Имеем

$$\frac{h_1-h_2}{L}=\operatorname{th}\frac{2a-l}{2H}q,$$

откуда

$$a=\frac{H}{q}\operatorname{arth}\frac{h_1-h_2}{L}+\frac{l}{2}=11{,}9 \text{ м}.$$

Остается найти h_0 из (2) с учетом (6)

$$h_0=h_1-\frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qa}{H}-1\right)=2{,}28 \text{ м}.$$

Уравнение кривой найдем, подставив найденные значения в уравнение (1)

$$y=4{,}48\left(\operatorname{ch}\frac{x}{4{,}48}-1\right).$$

Переходим далее к определению наибольшего провеса провода. Наибольший провес будет в той точке кривой, где касательная к ней будет параллельна прямой AB:

$$\frac{dy}{dx}=y'=\operatorname{sh}\frac{qx_1}{H}=-\frac{h_1-h_2}{l}.$$

Из этого равенства находим абсциссу искомой точки кривой

$$x_1=\frac{H}{q}\operatorname{arsh}\frac{h_2-h_1}{l}=-3{,}61 \text{ м}.$$

Наибольший провес равен

$$f_{\max}=h_1-\frac{h_1-h_2}{l}(a-x_1)-h_0-y(x_1)=$$
$$=h_1-\frac{h_1-h_2}{l}(a-x_1)-h_0-\frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qx_1}{H}-1\right)=18{,}74\ \text{м}.$$

Натяжение провода, согласно (11*), будет

$$T_A=H+qf_1=H+q(h_1-h_0)=40{,}5\ \text{кГ},$$
$$T_B=H+qf_2=H+q(h_2-h_0)=17{,}8\ \text{кГ}.$$

Задача 13.12. Цепью равного сопротивления называется цепь переменной толщины, у которой толщина в каждой точке пропорциональна натяжению T. У такой цепи вероятность разрыва во всех точках одинакова. Определить уравнение равновесной кривой и закон изменения толщины цепи.

Решение. Обозначим буквой σ переменное сечение цепи, изменяющееся вдоль ее длины. Если обозначить вес единицы объема цепи через p, а ее длину через s, то вес элемента ds равен $p\sigma\,ds$.

Выберем начало координат в самой низкой точке цепи. Для нахождения уравнения кривой воспользуемся уравнением (1*)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{H}, \qquad (1)$$

где H — натяжение в самой низкой точке цепи.

Замечаем, что приращение вертикальной нагрузки $dQ=p\sigma\,ds$, а натяжение цепи, согласно условию, пропорционально толщине, т. е. равно $T=k\sigma$, где k — коэффициент пропорциональности.

Вычисляя от обеих частей равенства (1) дифференциал, находим

$$dy'=\frac{dQ}{H}=\frac{p\sigma}{H}\,ds. \qquad (2)$$

С другой стороны, так как на цепь действует только вертикальная нагрузка, то проекция натяжения на горизонтальную ось x есть величина постоянная

$$H=T\frac{dx}{ds}=k\sigma\frac{dx}{ds}=\text{const},$$

откуда

$$\sigma=\frac{H}{k}\frac{ds}{dx}. \qquad (3)$$

Значение σ вносим в уравнение (2). Тогда находим

$$dy'=\frac{p\sigma}{H}\,ds=\frac{p}{k}\frac{ds\cdot ds}{dx}=\frac{p}{k}(1+y')^2\,dx,$$

где учтено, что $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Отделяя переменные, получим

$$\frac{dy'}{(1+y')^2}=\frac{p}{k}\,dx$$

и, интегрируя, имеем

$$\operatorname{arctg} y' = \frac{p}{k} x + c_1.$$

Начало координат выбрано в самой низкой точке, где у кривой минимум. Следовательно, при $x=0$ $y'=0$ и $c_1=0$. Итак,

$$y' = \operatorname{tg} \frac{p}{k} x, \tag{4}$$

$$dy = \operatorname{tg} \frac{p}{k} x \, dx.$$

Интегрируя, находим

$$y = -\frac{k}{p} \ln \cos \frac{p}{k} x + c_2.$$

При $x=0$ $y=0$ и $c_2=0$.

Итак,

$$-\frac{p}{k} y = \ln \cos \frac{p}{k} x, \quad e^{-\frac{p}{k} y} = \cos \frac{p}{k} x$$

или окончательно

$$e^{\frac{p}{k} y} \cos \frac{p}{k} x = 1.$$

Это и есть уравнение кривой равного сопротивления. Чтобы найти закон изменения толщины цепи, воспользуемся равенством (3), откуда получаем с учетом (4)

$$\sigma = \frac{H}{k} \frac{ds}{dx} = \frac{H}{k} \sqrt{1+y'^2} = \frac{H}{k} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \frac{p}{k} x} = \frac{H}{k \cos \frac{p}{k} x}.$$

Эта задача была впервые рассмотрена Кориолисом.

ГЛАВА XIV

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

§ 1. Основные определения и зависимости

Три величины q_1, q_2, q_3 называются криволинейными координатами точки, если они однозначно определяют положение этой точки в пространстве. Если принято правило отсчета этих величин для любого положения точки в пространстве, то тем самым определена криволинейная система координат. Так как радиус-вектор точки $\boldsymbol{r}$ и криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 независимо и однозначно определяют положение точки, то можно рассматривать радиус-вектор как функцию криволинейных координат

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3). \qquad (1^*)$$

Координатной линией (q_1) называется линия, которую описывает конец радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ при изменении координаты q_1 и фиксированных значениях двух других координат (q_{20}, q_{30}). Уравнение этой координатной линии будет

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1, q_{20}, q_{30}). \qquad (2^*)$$

Аналогичным образом могут быть получены две другие координатные линии

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_{10}, q_2, q_{30}), \qquad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_{10}, q_{20}, q_3),$$

проходящие через точку $M_O(q_{10}, q_{20}, q_{30})$. Следовательно, через каждую точку пространства можно провести три координатные линии (q_1), (q_2), (q_3).

Касательные, проведенные в данной точке к каждой из трех координатных линий, называются координатными осями и обозначаются $[q_1]$, $[q_2]$, $[q_3]$. Положительное направление каждой координатной оси выбирается в сторону возрастания соответствующей криволинейной координаты. Орты координатных осей будем обозначать $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$.

Координатными поверхностями называются поверхности, проходящие через фиксированную точку M_O, определяемые уравнениями:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_{30}), \quad \text{поверхность} \quad (q_1, q_2),$$
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_{10}, q_2, q_3), \quad \text{поверхность} \quad (q_2, q_3),$$
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1, q_{20}, q_3), \quad \text{поверхность} \quad (q_3, q_1).$$

Система криволинейных координат называется ортогональной, если в каждой точке пространства оси координат взаимно перпендикулярны. Условием ортогональности является

$$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{k}_j = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{3*}$$

Коэффициентами Ляме называются

$$H_i = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \right| = -\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{4*}$$

Орты криволинейных осей координат выражаются через коэффициенты Ляме формулами

$$\boldsymbol{k}_i = \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{5*}$$

Дифференциалы дуг координатных линий равны

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3.$$

Пользуясь этими формулами, можно легко находить коэффициенты Ляме для различных систем криволинейных координат.

Проекции скорости и ускорения на оси криволинейных координат даются формулами

$$v_{q_i} = H_i \dot{q}_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{6*}$$

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right), \tag{7*}$$

где

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2}\left(H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2\right). \tag{8*}$$

Решение задач на кинематику точки в криволинейных координатах рекомендуется вести в следующей последовательности:

1) для заданной системы криволинейных координат определить коэффициенты Ляме;

2) установить, является ли система криволинейных координат ортогональной;

3) найти проекции скорости на оси криволинейных координат;

4) найти проекции ускорения на оси криволинейных координат.

§ 2. Системы криволинейных координат. Координатные оси, линии и поверхности. Коэффициенты Ляме

Задача 14.1. Выразить в декартовых координатах условия, при которых система криволинейных координат будет ортогональной. Проверить ортогональность сферической системы координат.

Решение. 1) Общий случай. Пусть положение точки M в пространстве определяется в прямоугольной декартовой системе

координат координатами x, y, z, в криволинейной системе координат координатами q_1, q_2, q_3. Радиус-вектор точки M, проведенный из начала декартовой системы, равен $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. Координатная линия криволинейной системы координат является годографом радиуса-вектора $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3)$ при изменении только одной криволинейной координаты q_i. Тогда, задавая направление координатных осей $[q_1]$, $[q_2]$, $[q_3]$ ортами $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ и замечая, что координатная ось направлена по касательной к координатной линии (в сторону возрастания координаты), можно записать

$$\boldsymbol{k}_i=\frac{\partial\boldsymbol{r}/\partial q_i}{|\partial\boldsymbol{r}/\partial q_i|}. \tag{1}$$

Это равенство следует из того, что оба вектора $\partial\boldsymbol{r}/\partial q_i$ и $\boldsymbol{k}_i$ направлены по касательной к годографу радиуса-вектора в сторону увеличения координаты q_i. Знаменатель в (1) равен коэффициенту Ляме

$$\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right|=\left|\frac{\partial x}{\partial q_i}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\boldsymbol{k}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}=H_i.$$

Тогда формула (1) может быть переписана в виде

$$\boldsymbol{k}_i=\frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i} \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Условие ортогональности криволинейной системы координат есть

$$\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j=0 \qquad (i\neq j). \tag{3}$$

Учитывая равенство (2), получим вместо (3)

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_j}=0 \qquad (i\neq j),$$

что дает три равенства

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_1}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_2}=0; \qquad \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_3}=0; \qquad \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_1}=0. \tag{4}$$

Выразив радиус-вектор через декартовы координаты, запишем (4) в виде

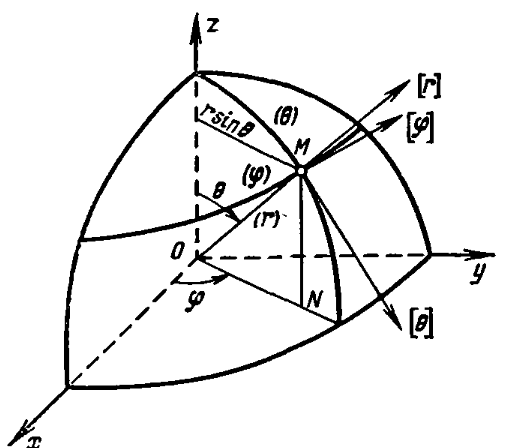
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_2}=0,\\
&\frac{\partial x}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_3}+\frac{\partial y}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_3}+\frac{\partial z}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_3}=0,\\
&\frac{\partial x}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_3}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_3}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_3}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Эти равенства — аналитические условия ортогональности криволинейной системы координат.

2) Сферическая система координат (см. рисунок). Сферические координаты таковы:

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi.$$

Координатная линия (r) и ось $[r]$ совпадают, это — прямая, проведенная через начало координат и точку M. Координатная линия (θ) — окружность большого круга, проведенного радиусом OM, ось $[\theta]$ — касательная к этой окружности, проведенная в точке M в сторону возрастания угла θ. Координатная линия (φ) — окружность параллельного круга радиуса $r\sin\theta$, ось $[\varphi]$ — касательная к этой окружности, проведенная в точке M в сторону возрастания угла φ.



К задаче 14 1.

Декартовы координаты могут быть выражены через сферические соотношениями

$$x = r\sin\theta \cdot \cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta \sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Внеся эти значения координат в систему уравнений (5), находим

$$\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta}=$$
$$= r\sin\theta\cdot\cos\theta\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) - r\sin\theta\cdot\cos\theta = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}= r\sin^2\theta\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi - r\sin^2\theta\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=$$
$$= -r^2\cos\theta\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi + r^2\cos\theta\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi = 0.$$

Таким образом, сферическая система координат ортогональна.

Задача 14.2. Уравнения движения точки заданы в цилиндрической системе координат. Зная формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$

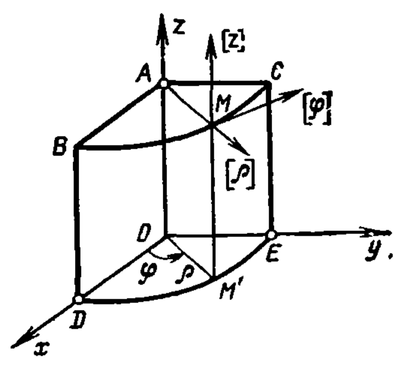
проверить ортогональность цилиндрической системы координат. Найти координатные линии, оси и координатные поверхности.

Решение. Подставив аналитические условия ортогональности криволинейной системы координат (5) из задачи 14.1 $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$,

$q_3 = z$ и воспользовавшись зависимостями (1), найдем

$$-\rho\cos\varphi\cdot\sin\varphi+\rho\sin\varphi\cdot\cos\varphi=0,$$
$$-\rho\sin\varphi\cdot 0+\rho\cdot\cos\varphi\cdot 0+0\cdot 1=0,$$
$$\cos\varphi\cdot 0+\sin\varphi\cdot 0+0\cdot 1=0.$$

Таким образом, цилиндрическая система координат ортогональна. Это показано на рисунке, где в точке M проведены цилиндрические оси координат: $[\rho]$, $[\varphi]$, $[z]$. Координатными линиями в этом случае являются: линия (ρ) — прямая AM, проходящая через точку M, вдоль которой $\varphi=\text{const}$ и $z=\text{const}$; линия (φ) — дуга окружности BMC, вдоль которой $\varphi=\text{const}$ и $z=\text{const}$. Координатными поверхностями в системе цилиндрических координат являются: а) поверхность $BCED$ цилиндра радиуса ρ с осью Oz, проходящая через заданную точку M, для которой $\rho=\text{const}$; б) полуплоскость $OAMM_1$ проходящая через ось Oz и точку M, для которой $\varphi=\text{const}$; в) горизонтальная плоскость ABC, проходящая через точку M, для которой $z=\text{const}$.



К задаче 14.2.

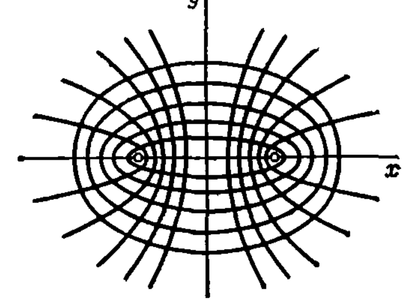
Задача 14.3. Эллиптическими координатами на плоскости называются координаты η_1, η_2, связанные с декартовыми координатами уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2+\eta_1}+\frac{y^2}{b^2+\eta_1}=1, \qquad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2+\eta_2}+\frac{y^2}{b^2+\eta_2}=1, \qquad (2)$$

где a и b — постоянные величины.

Определить границы изменений эллиптических координат η_1 и η_2 так, чтобы (1) представляло семейство софокусных эллипсов, а уравнение (2) — семейство софокусных гипербол (рис. *а*). Найти коэффициенты Ляме, координатные линии и оси, проверить ортогональность системы, если $a>b$.



К задаче 14.3, *а*.

Решение. Докажем, что уравнение (1) представляет собой семейство эллипсов, софокусных эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3)$$

В самом деле, фокусное расстояние эллипса (3) равно

$$c=\sqrt{a^2-b^2}, \qquad (4)$$

полуоси A и B эллипса (1) соответственно определяются равенствами

$$A^2 = a^2 + \eta_1, \qquad B^2 = b^2 + \eta_1, \tag{5}$$

и, следовательно, фокусные расстояния эллипсов (1) и (3) будут равны

$$C = \sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{a^2 - b^2} = c. \tag{6}$$

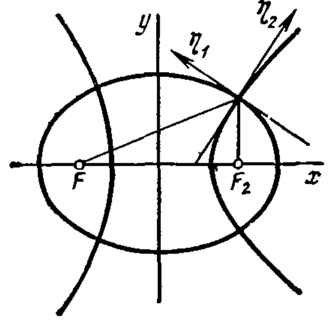
При этом уравнение (1) будет определять эллипс, если η_1 будет лежать в пределах

$$-b^2 < \eta_1 < +\infty, \tag{7}$$

так как при этом $b^2 + \eta_1 > 0$ и тем более $a^2 + \eta_1 > 0$. Уравнение (2) будет определять семейство софокусных (с эллипсами) гипербол, если η_2 будет находиться в пределах

$$-a^2 < \eta_2 < -b^2, \tag{8}$$

так как при этом $a^2 + \eta_2 > 0$ и $b^2 + \eta_2 < 0$.



К задаче 14.3, *б*.

Тогда, обозначая полуоси гиперболы (2) через A_1, B_1, находим

$$A_1^2 = a^2 + \eta_2 \qquad B_1^2 = -(b^2 + \eta_2), \tag{9}$$

и фокусное расстояние гипербол равно

$$C_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{a^2 - b^2} = c. \tag{10}$$

Таким образом, изменяя η_1 и η_2 в пределах, указанных неравенствами (7) и (8), получим семейство софокусных эллипсов (1) и семейство софокусных гипербол (2). Через каждую точку плоскости будет проходить по одной кривой каждого семейства. При этом для определенности следует дополнительно указывать, в каком из четырех квадрантов находится рассматриваемая точка, так как эллипс пересекается с софокусной гиперболой в четырех симметричных точках (рис. *б*).

Координатными линиями $\eta_1 = \text{const}$ являются эллипсы, а координатными линиями $\eta_2 = \text{const}$ — софокусные гиперболы.

Переходим к определению коэффициентов Ляме. Решая совместно уравнения (1) и (2), находим

$$x^2 = \frac{(a^2 + \eta_1)(a^2 + \eta_2)}{a^2 - b^2}, \tag{11}$$

$$y^2 = -\frac{(b^2 + \eta_1)(b^2 + \eta_2)}{a^2 - b^2}. \tag{12}$$

Тогда коэффициенты Ляме будут

$$H_{\eta_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta_1}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta_1 - \eta_2}{(a^2 + \eta_1)(b^2 + \eta_1)}}, \tag{13}$$

$$H_{\eta_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta_2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta_2 - \eta_1}{(a^2 + \eta_2)(b^2 + \eta_2)}}. \tag{14}$$

Исследуем ортогональность системы. Аналитическое условие ортогональности для эллиптической системы координат имеет вид

$$\frac{\partial x}{\partial \eta_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta_2}+\frac{\partial y}{\partial \eta_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta_2}=0. \qquad (15)$$

Вычисляя указанные частные производные, исходя из (11) и (12), и внося их в (15), получим после несложных преобразований

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a^2-b^2}=0. \qquad (16)$$

Система координат ортогональна. Это следует и из известного свойства касательной к гиперболе — она делит угол между радиусами-векторами, проведенными из фокусов в точку касания, пополам, касательная к эллипсу является равнонаклоненной к тем же радиусам-векторам (рис. *б*).

Примечание. Эллиптические координаты иногда вводятся и при помощи других зависимостей. Так, например, переменные ξ и γ, связанные с декартовыми координатами соотношениями

$$x=c\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\gamma,$$
$$y=c\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\gamma,$$

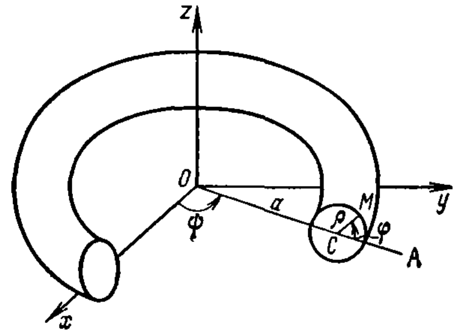
также называются эллиптическими координатами и могут быть определены как функции эллиптических координат η_1 и η_2, рассмотренных в задаче.

Можно легко показать, что координатные линии $\xi=\mathrm{const}$ являются эллипсами, а координатные линии $\gamma=\mathrm{const}$ — софокусными гиперболами, фокусное расстояние которых равно c.

Задача 14.4. Зависимость декартовых координат от тороидальных дана формулами

$$x=(a+\rho\cos\varphi)\cos\psi,\qquad y=(a+\rho\cos\varphi)\sin\psi,\qquad z=\rho\sin\psi, \qquad (1)$$

где $a=OC=\mathrm{const}$ — отрезок прямой OA, вращающейся в плоскости xOy декартовых координат (см. рисунок). Положение любой точки M в пространстве определяется тремя тороидальными координатами: азимутальным углом ψ, измеряемым между осью Ox и прямой OA, и двумя полярными координатами ρ и φ, лежащими в плоскости zOA, проходящей через точку M.



К задаче 14.4.

Проверить ортогональность тороидальной системы координат, а также найти координатные линии, оси и поверхности.

Решение. Для проверки ортогональности тороидальной системы координат составим аналитические условия (5) из задачи 14.1.

Вычисляя частные производные и внося их в (5), имеем

$$-\rho\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi-\rho\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\psi+\rho\sin\varphi\cos\varphi=0,$$

$$\rho\sin\varphi\cos\psi(a+\rho\cos\varphi)\sin\psi-$$
$$-\rho\sin\varphi\sin\psi(a+\rho\cos\varphi)\cos\psi+\rho\cos\varphi\cdot 0=0,$$

$$-\cos\varphi\cos\psi(a+\rho\cos\varphi)\sin\psi+$$
$$+\cos\varphi\sin\psi(a+\rho\cos\varphi)\cos\psi+\sin\varphi\cdot 0=0.$$

Таким образом, тороидальная система координат ортогональна.

Переходим к определению координатных линий и осей. Координатная линия (ρ) найдется, если положить $\varphi=\mathrm{const}$ и $\psi=\mathrm{const}$. Это будет полупрямая CM, которая одновременно будет являться и координатной осью $[\rho]$. Координатная линия (φ) найдется, если положить $\rho=\mathrm{const}$ и $\psi=\mathrm{const}$. Это будет окружность с центром C и радиусом ρ, лежащая в плоскости zOA. Касательная к этой окружности, направленная в сторону возрастания угла φ, будет координатной осью $[\varphi]$. Координатную линию (ψ) получим, положив $\rho=\mathrm{const}$ и $\varphi=\mathrm{const}$. Это будет окружность с центром на оси z в точке $z=\rho\sin\varphi$, радиусом $(a+\rho\cos\psi)$, лежащая в плоскости, параллельной xOy. Касательная к этой окружности в точке M, направленная в сторону возрастания угла ψ, будет координатной осью $[\psi]$.

Координатными поверхностями будут: при $\rho=\mathrm{const}$ — поверхность тора, при $\varphi=\mathrm{const}$ — поверхность конуса с углом раствора $\pi/2-\varphi$, при $\psi=\mathrm{const}$ — плоскость zOA.

Задача 14.5. Определить коэффициенты Ляме для тороидальных координат ρ, φ, ψ, связанных с декартовыми координатами формулами (1) из задачи 14.4 (см. рисунок к задаче 14.4).

Решение. Для нахождения коэффициентов Ляме воспользуемся формулами (4*):

$$H_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}.$$

Для криволинейной координаты ρ находим

$$\frac{\partial x}{\partial\rho}=\cos\varphi\cos\psi,\quad \frac{\partial y}{\partial\rho}=\cos\varphi\sin\psi,\quad \frac{\partial z}{\partial\rho}=\sin\varphi$$

и, следовательно,

$$H_\rho=\sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\psi+\cos^2\varphi\sin^2\psi+\sin^2\varphi}=1.$$

Для криволинейной координаты φ имеем

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-\rho\sin\varphi\cos\psi;\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=-\rho\sin\varphi\sin\psi,\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}=\rho\cos\varphi$$

и, следовательно,

$$H_\varphi=\sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi\cos^2\psi+\sin^2\varphi\sin^2\psi+\cos^2\varphi)}=\rho.$$

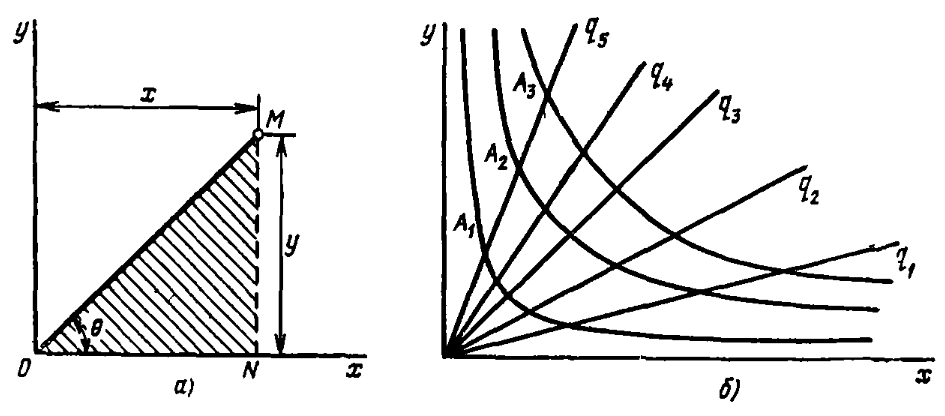
Для криволинейной координаты ψ получим

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} = -(a+\rho\cos\varphi)\sin\psi; \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = (a+\rho\cos\varphi)\cos\psi; \quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0.$$

Тогда

$$H_\psi = \sqrt{(a+\rho\cos\varphi)^2(\sin^2\psi+\cos^2\psi)} = a+\rho\cos\varphi.$$

Задача 14.6. Криволинейными координатами на плоскости являются площадь треугольника OMN и $\sin\theta$ (рис. *а*).



К задаче 14.6.

Найти уравнения для перехода от криволинейных координат к декартовым, а также координатные линии.

Решение. Обозначая для краткости $\sin\theta = q$, находим зависимость криволинейных координат от декартовых

$$xy = 2A, \quad y = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}\,x.$$

Координатные линии соответствующие координате q, найдутся, если положить координату $A = \text{const}$. Это будут параболы (рис. *б*). Координатные линии, отвечающие координате A, найдутся, если положить $q = \text{const}$. Это прямые, исходящие из начала координат под разными углами. Система координат неортогональна.

§ 3. Скорости и ускорения точек в системах криволинейных координат

Задача 14.7. Определить проекции скорости и проекции ускорения на оси сферических координат.

Решение. В задаче 14.1 были определены координатные линии сферической системы координат. Пользуясь формулами (6*), находим дифференциалы дуг координатных линий и затем проекции скорости на оси сферической системы координат

$$(ds)_r = dr, \quad (ds)_\theta = r\cdot d\theta, \quad (ds)_\varphi = r\sin\theta\cdot d\varphi \qquad (1)$$

и, следовательно,

$$v_r = \dot r, \qquad v_\theta = r\dot\theta, \qquad v_\varphi = r \sin\theta \cdot \dot\varphi, \tag{2}$$

где роль обобщенных координат играют сферические координаты

$$q_1 = r, \qquad q_2 = \theta, \; q_3 = \varphi. \tag{3}$$

Тогда, учитывая формулу (6*)

$$v_{q_i} = H_i \cdot \dot q_i,$$

находим коэффициенты Ляме

$$H_r = 1, \qquad H_\theta = r, \qquad H_\varphi = r\sin\theta. \tag{4}$$

Зная эти коэффициенты, ищем проекции ускорения на оси сферических координат, пользуясь формулой (8*):

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta \cdot \dot\varphi^2) \tag{5}$$

и формулой (7*)

$$w_r = \frac{1}{H_r}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot r} - \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \ddot r - r\dot\theta^2 - r\sin^2\theta \cdot \dot\varphi^2, \tag{6}$$

так как

$$\frac{\partial T}{\partial \dot r} = \dot r, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = r\dot\theta^2 + r\sin^2\theta \cdot \dot\varphi^2,$$

$$w_\theta = \frac{1}{H_\theta}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \dot\varphi^2, \tag{7}$$

так как

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = r^2\dot\theta, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{d\dot\theta} = r^2\ddot\theta + 2r\dot r \cdot \dot\theta; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = r^2 \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \dot\varphi^2;$$

$$w_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) = r\sin\theta \cdot \ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi\sin\theta + 2r\cos\theta \cdot \dot\theta \cdot \dot\varphi, \tag{8}$$

так как

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = r^2\sin^2\theta \cdot \dot\varphi, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = r^2\sin^2\theta \cdot \ddot\varphi + 2r \cdot \dot r \cdot \sin^2\theta \cdot \dot\varphi + 2r^2\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \dot\theta \cdot \dot\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Задача 14.8. Определить проекции скорости и ускорения точки на оси тороидальной системы координат (см. рисунок к задаче 14.4).

Решение. Пусть прямая OA вращается вокруг точки O в плоскости Oxy. Возьмем точку C на этой прямой за полюс и обозначим расстояние $OC = a$. Положение любой точки M можно определить заданием трех координат: азимутального угла ψ, образованного осью x и прямой OA, при котором плоскость zOA пройдет через M,

и двух полярных координат ρ и φ точки M в этой плоскости при полюсе C. Координаты ρ, φ, ψ называются тороидальными координатами. Декартовы координаты выражаются через тороидальные координаты формулами

$$x=(a+\rho\cos\varphi)\cos\psi,$$
$$y=(a+\rho\cos\varphi)\sin\psi,$$
$$z=\rho\sin\varphi.$$

Находим коэффициенты Ляме, пользуясь равенствами (6*):

$$ds_1=H_1 d\rho,\qquad ds_2=H_2 d\varphi,\qquad ds_3=H_3 d\psi. \tag{1}$$

Заметив, что

$$ds_1=d\rho,\qquad ds_2=\rho\, d\varphi,\qquad ds_3=(a+\rho\cos\varphi)\,d\psi, \tag{2}$$

и сопоставляя (1) и (2), имеем

$$H_\rho=1,\qquad H_\varphi=\rho,\qquad H_\psi=a+\rho\cos\varphi.$$

Тогда проекции скорости на оси тороидальных координат будут

$$v_\rho=H_\rho\cdot\dot\rho=\dot\rho,$$
$$v_\varphi=H_\varphi\cdot\dot\varphi=\rho\dot\varphi,$$
$$v_\psi=H_\psi\cdot\dot\psi=(a+\rho\cos\varphi)\,\dot\psi.$$

Модуль скорости точки равен

$$v=\sqrt{\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+(a+\rho\cos\varphi)^2\,\dot\psi^2}.$$

Переходим к определению проекций ускорения на оси тороидальных координат. Находим

$$T=\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}\left[\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+(a+\rho\cos\varphi)^2\,\dot\psi^2\right].$$

Тогда

$$w_\rho=\frac{1}{H_\rho}\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial\dot\rho}-\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)=\ddot\rho-\rho\dot\varphi^2-(a+\rho\cos\varphi)\,\dot\psi^2\cos\varphi\,.$$

Аналогично

$$w_\varphi=\rho\ddot\varphi+2\dot\rho\dot\varphi+(a+\rho\cos\varphi)\,\dot\psi^2\sin\varphi.$$

$$w_\psi=\frac{1}{(a+\rho\cos\varphi)}\cdot\frac{d}{dt}\left[(a+\rho\cos\varphi)^2\,\dot\psi\right]=\ddot\psi\,(a+\rho\cos\varphi)+2\dot\psi\,(\dot\rho\cos\varphi-\rho\dot\varphi\sin\varphi).$$

Задача 14.9. Определить проекции скорости на оси цилиндрических координат (см. рисунок).

Решение. Зависимость декартовых координат от цилиндрических выражается формулами

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi, \quad z=z. \tag{1}$$

Находим коэффициенты Ляме:

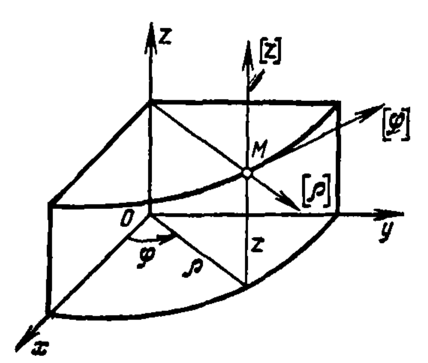
$$\begin{aligned} H_\rho&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2}=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1,\\ H_\varphi&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}=\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi}=\rho,\\ H_z&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}=1.\end{aligned} \tag{2}$$

Тогда проекции скорости на оси цилиндрических координат равны

$$V_\rho=H_\rho\cdot\dot\rho=\dot\rho, \quad V_\varphi=H_\varphi\cdot\dot\varphi=\rho\dot\varphi, \quad V_z=H_z\cdot\dot z=\dot z. \tag{3}$$

Задача 14.10. Найти проекции ускорения точки на оси цилиндрической системы координат (см. рисунок к задаче 14.9).

Решение. Криволинейные координаты ρ, φ, z определяют положение точки M в цилиндрической системе координат. Зависимость декартовых координат от цилиндрических определяется равенствами



К задаче 14.9.

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi, \quad z=z.$$

Коэффициенты Ляме, согласно (4*), равны

$$H_\rho=1, \quad H_\varphi=\rho, \quad H_z=1.$$

Ищем проекции ускорения на оси цилиндрической системы координат. Находим

$$T=\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} w_\rho&=\frac{1}{H_\rho}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\rho}-\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)=\ddot\rho-\rho\dot\varphi^2,\\ w_\varphi&=\frac{1}{H_\varphi}\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi),\\ w_z&=\frac{1}{H_z}\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial\dot z}-\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\ddot z.\end{aligned}$$

Первые два уравнения являются одновременно проекциями ускорения точки на полярные оси координат, применяемые в случае движения точки на плоскости.

Задача 14.11. Точка M движется по винтовой линии согласно уравнениям

$$x = a\cos kt, \tag{1}$$

$$y = a\sin kt, \tag{2}$$

$$z = bt, \tag{3}$$

где a, k, b — постоянные.

Определить уравнения траектории в цилиндрических координатах и ее скорость.

Решение. Цилиндрическими координатами являются

$$q_1 = \rho, \qquad q_2 = \varphi, \qquad q_3 = z.$$

Находим первую цилиндрическую координату

$$\rho = q_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = a = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Вторая цилиндрическая координата

$$\varphi = kt. \tag{5}$$

Третья цилиндрическая координата дается непосредственно равенством (3). Исключая время из уравнений (3) и (5), получаем

$$z = b\frac{\varphi}{k}, \tag{6}$$

которое вместе с равенством (4) и дает уравнение траектории точки — уравнение винтовой линии в цилиндрических координатах. Винтовая линия навивается на поверхность цилиндра радиуса a. Согласно задаче 14.9 проекции скорости на цилиндрические оси координат равны

$$V_\rho = H_\rho \cdot \dot{\rho} = 0,$$

так как в данном случае $\rho = \mathrm{const}$. Далее

$$V_\varphi = H_\varphi \cdot \dot{\varphi} = \rho \cdot k.$$

Наконец,

$$V_z = H_z \cdot \dot{z} = b.$$

Задача 14.12. Определить проекции скорости движущейся точки на оси эллиптической системы координат.

Решение. В задаче 14.3 были найдены коэффициенты Ляме для эллиптических координат η_1 и η_2, связанных с декартовыми координатами уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2+\eta_1} + \frac{y^2}{b^2+\eta_1} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2+\eta_2} + \frac{y^2}{b^2+\eta_2} = 1, \tag{1}$$

где a, b — постоянные величины.

Коэффициенты Ляме равны

$$H_{\eta_1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta_1-\eta_2}{(a^2+\eta_1)(b^2+\eta_1)}},\qquad H_{\eta_2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta_2-\eta_1}{(a^2+\eta_2)(b^2+\eta_2)}}. \tag{2}$$

Тогда проекции скорости на оси эллиптической системы координат будут

$$\begin{aligned} V_{\eta_1}&=H_{\eta_1}\cdot\dot\eta_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta_1-\eta_2}{(a^2+\eta_1)(b^2+\eta_1)}}\cdot\dot\eta_1,\\ V_{\eta_2}&=H_{\eta_2}\cdot\dot\eta_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta_2-\eta_1}{(a^2+\eta_2)(b^2+\eta_2)}}\cdot\dot\eta_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Модуль скорости равен

$$V=\sqrt{V_{\eta_1}^2+V_{\eta_2}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(\eta_1-\eta_2)\left[\frac{\dot\eta_1^2}{(a^2+\eta_1)(b^2+\eta_1)}-\frac{\dot\eta_2^2}{(a^2+\eta_2)(b^2+\eta_2)}\right]}.$$

Следует иметь в виду, что η_1 и η_2 должны лежать в пределах, указанных в задаче 14.3.

Задача 14.13. Уравнения движения точки заданы в полярных координатах уравнениями

$$\rho=\rho_0 e^{-kt}, \tag{1}$$

$$\varphi=kt. \tag{2}$$

Определить траекторию, скорость, ускорение, секториальную скорость и радиус кривизны траектории.

Решение. Для нахождения траектории в явном виде исключим из уравнений (1) и (2) время

$$\rho=\rho_0 e^{-\varphi}. \tag{3}$$

Для определения проекций скорости точки на полярные оси воспользуемся значениями коэффициентов Ляме (см. задачу 14.9)

$$H_\rho=1,\qquad H_\varphi=\rho. \tag{4}$$

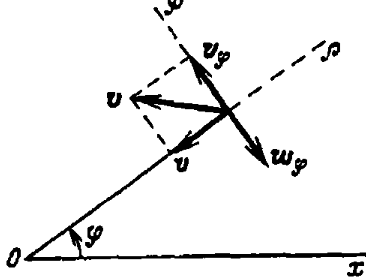
Тогда, согласно (6*),

$$v_\rho=H_\rho\cdot\dot\rho=-k\rho_0 e^{-kt}, \tag{5}$$

$$v_\varphi=H_\varphi\cdot\dot\varphi=\rho k=\rho_0 k e^{-kt}. \tag{6}$$

Отсюда модуль скорости равен

$$v=\sqrt{2}\,\rho_0 k e^{-kt}. \tag{7}$$



К задаче 14.13.

Направление скорости показано на рисунке. Проекции ускорения на полярные оси, согласно задаче 14.10, равны

$$w_\rho=\ddot\rho-\rho\dot\varphi^2=k^2\rho_0 e^{-kt}-k^2\rho_0 e^{-kt}=0, \tag{8}$$

$$w_\varphi=2\dot\rho\dot\varphi+\rho\ddot\varphi=-2k^2\rho_0 e^{-kt}. \tag{9}$$

Таким образом, полное ускорение точки равно w_φ.

Для определения радиуса кривизны траектории вычисляем касательное ускорение

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = -\sqrt{2}\,\rho_0 k^2 e^{-kt}. \qquad (10)$$

Нормальное ускорение равно

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{w_\varphi^2 - w_\tau^2} = \sqrt{2}\,\rho_0 k^2 e^{-kt}. \qquad (11)$$

Радиус кривизны траектории

$$r = \frac{v^2}{w_n} = \frac{2\rho_0^2 k^2 e^{-2kt}}{\sqrt{2}\,\rho_0 e^{-kt}} = \sqrt{2}\,\rho_0 e^{-kt} = \sqrt{2}\,\rho. \qquad (12)$$

Секториальная скорость равна

$$\sigma = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\rho_0^2 k e^{-2kt}. \qquad (13)$$

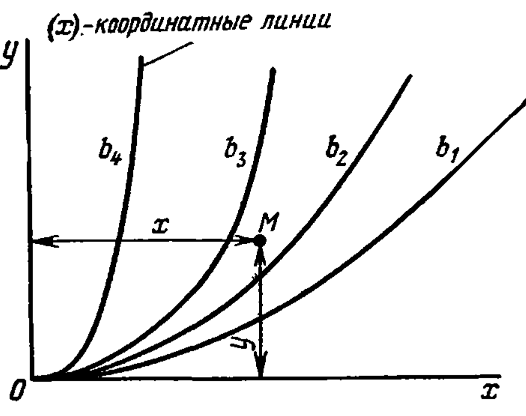
Секториальная скорость связана с проекцией ускорения на трансверсальную ось формулой

$$w_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = \frac{2}{\rho}\frac{d\sigma}{dt}. \qquad (14)$$

Задача 14.14. Семейство парабол (см. рисунок), определяемых уравнениями

$$y = bx^2, \qquad (1)$$

заполняет собой плоскость xy. Каждому значению $b_i = \text{const}$ соответствует одна парабола. Задаваясь значениями b и x, можно определить любую точку в плоскости, так как каждой паре значений b и x соответствует определенное значение y. Выбрав b и x в качестве криволинейных координат на плоскости xy, найти коэффициенты Ляме, проекции скорости на координатные оси $[b]$ и $[x]$, а также выражение $T = \frac{1}{2}v^2$.



К задаче 14.14.

Решение. Обозначив криволинейные координаты

$$q_1 = b, \qquad q_2 = x, \qquad (2)$$

запишем зависимость декартовых координат от криволинейных в виде

$$x = q_2, \qquad (3)$$

$$y = q_1 q_2^2. \qquad (4)$$

Для нахождения коэффициентов Ляме находим вначале

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}=0, \quad \frac{\partial x}{\partial q_2}=1, \tag{5}$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_1}=q_2^2=x^2, \quad \frac{\partial y}{\partial q_2}=2q_1q_2=2bx, \tag{6}$$

и далее

$$H_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2}=x^2, \tag{7}$$

$$H_2=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2}=\sqrt{1+4b^2x^2}. \tag{8}$$

Проекции скорости на криволинейные оси координат

$$v_1=H_1\dot{q}_1=x^2\dot{b}, \tag{9}$$

$$v_2=H_2\dot{q}_2=\sqrt{1+4b^2x^2}\cdot\dot{x}. \tag{10}$$

Так как оси неортогональны, то найдем косинус угла между осями, пользуясь формулами (3*) и (5*). При этом произведение ортов в (3*) и определит искомый косинус, который для неортогональной системы не равен нулю

$$\cos(\widehat{q_1, q_2})=\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2}\right). \tag{11}$$

Внеся в формулу (11) значения входящих в нее величин, получим

$$\cos(\widehat{q_1, q_2})=\frac{2bx}{\sqrt{1+4b^2x^2}}. \tag{12}$$

Далее находим по теореме косинусов

$$v^2=v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos(\widehat{q_1, q_2}). \tag{13}$$

Внеся в эту формулу значения всех величин, имеем окончательно

$$T=\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}[\dot{x}^2+(\dot{b}x^2+2bx\dot{x})^2]. \tag{14}$$

Координатными линиями (x) являются параболы, так как для каждой из них $b=\text{const}$. Координатные оси $[x]$ — касательные к параболам. Координатными линиями (b) и осями $[b]$ являются прямые параллельные оси y, для которых $x=\text{const}$.

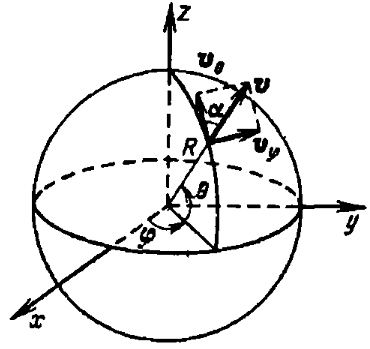
Задача 14.15. Корабль движется с постоянной скоростью v и под постоянным курсовым углом α к географическому меридиану. Определить проекции ускорения на оси сферических координат, ускорение корабля и радиус кривизны траектории.

Решение. Выбираем сферические координаты: θ — широта, φ — долгота местоположения корабля на сфере и $r=R=\text{const}$, где R —

радиус сферы. Тогда проекции скорости корабля на сферические оси будут

$$v_r = \dot{r} = 0, \qquad v_\theta = r\dot{\theta} = v\cos\alpha, \qquad v_\varphi = r\cos\theta\cdot\dot{\varphi} = v\sin\alpha. \qquad (1)$$

Траектория корабля — локсодромия была найдена в задаче 5.25 («Теоретическая механика в примерах и задачах», том I, 1971).



К задаче 14.15.

Для нахождения проекций ускорения на оси сферических координат составим выражение

$$T = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + r^2\cos^2\theta\dot{\varphi}^2) \qquad (2)$$

и будем искать проекции ускорения, пользуясь формулой (7*)

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right).$$

Коэффициенты Ляме для сферических координат будут

$$H_r = 1, \qquad H_\theta = r, \qquad H_\varphi = r\cos\theta. \qquad (3)$$

Ищем проекцию ускорения:

а) на ось r

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = r\dot{\theta}^2 + r\cos^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2,$$

следовательно,

$$w_r = -r\dot{\theta}^2 - r\cos^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2 = -\frac{v^2}{r}; \qquad (4)$$

б) на ось θ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2\ddot{\theta}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -r^2\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\dot{\varphi}^2.$$

Но из второго уравнения системы (1) следует, что $\dot{\theta} = \text{const}$ и, следовательно, $\ddot{\theta} = 0$. Тогда, учитывая равенство (1), находим

$$w_\theta = \frac{1}{r}(r^2\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\dot{\varphi}^2) = \frac{v^2\sin^2\alpha}{r}\,\mathrm{tg}\,\theta; \qquad (5)$$

в) на ось φ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(r^2\cos^2\theta\cdot\dot{\varphi}) = \frac{d}{dt}(v\sin\alpha\cdot r\cos\theta) = -v\sin\alpha\cdot r\cdot\sin\theta\cdot\dot{\theta} =$$

$$= -\frac{v\sin\alpha\cdot r\cdot\sin\theta\cdot v\cos\alpha}{r} = -v^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\theta,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Тогда, учитывая (3), имеем

$$w_\varphi = -\frac{v^2}{r}\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\theta. \qquad (6)$$

Ускорение корабля находится по формуле

$$w=\sqrt{w_r^2+w_\theta^2+w_\varphi^2}=\frac{v^2}{r}\sqrt{1+\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\theta} \tag{7}$$

и направлено по главной нормали локсодромии, так как скорость корабля постоянна и касательное ускорение равно нулю.

Радиус кривизны локсодромии будет (так как $v=\text{const}$, то $w_n=w$)

$$\rho=\frac{v^2}{w}=\frac{r}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\theta}}. \tag{8}$$

Задача 14.16. Пространственное движение точки задано уравнениями движения в цилиндрических координатах:

$$\rho=\rho_0(1+\beta t),\qquad \varphi=\varphi_0\ln(1+\beta t),\qquad z=z_0(1+\beta t),$$

где ρ_0, φ_0, z_0, β — постоянные величины. Найти траекторию, скорость и ускорение точки, радиус кривизны траектории.

Решение. В цилиндрических координатах дифференциалы дуг координатных линий равны

$$ds_\rho=d\rho,\qquad ds_\varphi=\rho\,d\varphi,\qquad ds_z=dz. \tag{1}$$

Сравнивая эти выражения с формулами (6*), находим сразу коэффициенты Ляме:

$$H_\rho=1,\qquad H_\varphi=\rho,\qquad H_z=1. \tag{2}$$

Формулы (6*) позволяют найти проекции скоростей точки на цилиндрические оси координат:

$$\left.\begin{aligned} v_\rho&=H_\rho\cdot\dot\rho=\rho_0\beta,\\ v_\varphi&=H_\varphi\cdot\dot\varphi=\frac{\rho\varphi_0\beta}{1+\beta t}=\rho_0\beta\varphi_0,\\ v_z&=H_z\cdot\dot z=z_0\beta.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Модуль скорости равен

$$v=\sqrt{v_\rho^2+v_\varphi^2+v_z^2}=\beta\sqrt{\rho_0^2(1+\varphi_0^2)+z_0^2}=\text{const}. \tag{4}$$

Проекции ускорения на цилиндрические оси координат определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} w_\rho&=\ddot\rho-\rho\dot\varphi^2=-\frac{\rho\varphi_0^2\beta^2}{(1+\beta t)^2}=-\frac{\rho_0^2\varphi_0^2\beta^2}{\rho},\\ w_\varphi&=\rho\ddot\varphi+2\dot\rho\dot\varphi=\frac{\rho_0^2\beta^2\varphi_0}{\rho},\\ w_z&=\ddot z=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Модуль ускорения равен

$$w=\sqrt{w_\rho^2+w_\varphi^2}=\frac{\rho_0^2\beta^2\varphi_0}{\rho}\sqrt{1+\varphi_0^2}. \tag{6}$$

Так как величина скорости неизменна, то касательное ускорение равно нулю и ускорение (6) является нормальным ускорением. Отсюда определяется радиус кривизны траектории R из равенства

$$w_n = \frac{v^2}{R},$$

откуда

$$R = \frac{v^2}{w_n} = \frac{\beta^2\rho_0^2(1+\varphi_0^2)+z_0^2\beta^2}{\rho_0^2\beta^2\varphi_0\sqrt{1+\varphi_0^2}}\rho = \frac{\rho}{\varphi_0\sqrt{1+\varphi_0^2}}\left[1+\varphi_0^2+\left(\frac{z_0}{\rho_0}\right)^2\right]. \quad (7)$$

Исключая время из равенств, определяющих координаты ρ и φ, находим

$$\frac{\rho}{\rho_0} = (1+\beta t),$$

и, следовательно,

$$\varphi = \varphi_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0},$$

откуда

$$\rho = \rho_0 e^{\varphi/\varphi_0}. \quad (8)$$

Это первое уравнение, определяющее траекторию движущейся точки. Второе уравнение находим, исключая время из равенств, определяющих координаты ρ и z:

$$z = \frac{z_0}{\rho_0}\rho. \quad (9)$$

Таким образом, из (8) и (9) следует, что траектория является пересечением цилиндрической поверхности, образованной логарифмической спиралью и поверхностью круглого конуса. Точка движется по этой траектории равномерно.

ГЛАВА XV

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

§ 1. Движение по инерции твердого тела, имеющего неподвижную точку

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, имеет три степени свободы. Его положение можно определить тремя углами Эйлера.

Главные моменты количеств движения твердого тела относительно координатных осей, начало которых находится в неподвижной точке, даются формулами

$$L_x = I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{zx}\omega_z,$$
$$L_y = I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z - I_{xy}\omega_x,$$
$$L_z = I_z\omega_z - I_{zx}\omega_x - I_{yz}\omega_y.$$

Если оси x, y, z являются неподвижными, то осевые и центробежные моменты инерции твердого тела переменны. Если оси x, y и z жестко связаны с движущимся твердым телом, то его осевые и центробежные моменты инерции постоянны. В случае, когда оси x, y, z являются главными осями инерции твердого тела в неподвижной точке, т. е. при $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$, формулы принимают вид

$$L_x = I_x\omega_x, \qquad L_y = I_y\omega_y, \qquad L_z = I_z\omega_z.$$

Здесь I_x, I_y, I_z — главные моменты инерции твердого тела относительно неподвижной точки.

Динамические уравнения Эйлера для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, в проекциях на оси x, y, z, связанные с движущимся твердым телом, имеют вид

$$\frac{dL_x}{dt} + \omega_y L_z - \omega_z L_y = m_x^e,$$
$$\frac{dL_y}{dt} + \omega_z L_x - \omega_x L_z = m_y^e,$$
$$\frac{dL_z}{dt} + \omega_x L_y - \omega_y L_x = m_z^e,$$

где m_x^e, m_y^e, m_z^e — главные моменты внешних сил относительно осей

координат, ω_x, ω_y, ω_z — проекции угловой скорости твердого тела на оси координат.

Если оси x, y, z, связанные с твердым телом, являются главными осями инерции в неподвижной точке, то динамические уравнения Эйлера записываются так:

$$I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\,\omega_y\omega_z = m_x^e,$$
$$I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\,\omega_z\omega_x = m_y^e,$$
$$I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\,\omega_x\omega_y = m_z^e.$$

Добавим к этим трем дифференциальным уравнениям кинематические уравнения Эйлера, выражающие зависимости между проекциями угловой скорости на соответствующие оси координат, углами Эйлера и их производными по времени:

$$\omega_x = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$
$$\omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$
$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi};$$

мы получили систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений движения.

Проинтегрировав эту систему уравнений (при наличии заданных начальных условий движения), определяют ω_x, ω_y, ω_z, а также уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки

$$\varphi = f_1(t), \qquad \psi = f_2(t), \qquad \theta = f_3(t).$$

Решение обратных задач динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, сопряжено с большими трудностями и приводится к квадратурам только в исключительных случаях.

Обобщенные динамические уравнения Эйлера для подвижных осей $\xi\eta\zeta$, не связанных с твердым телом, имеют вид

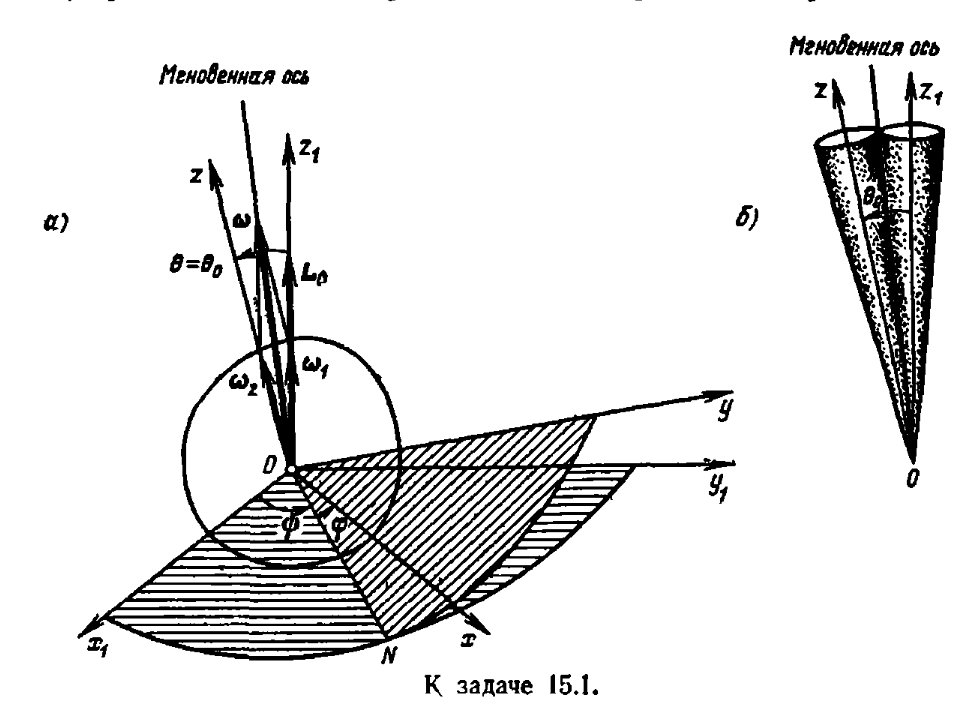
$$\frac{dL_\xi}{dt} + \omega_{1\eta}L_\zeta - \omega_{1\zeta}L_\eta = m_\xi^e,$$
$$\frac{dL_\eta}{dt} + \omega_{1\zeta}L_\xi - \omega_{1\xi}L_\zeta = m_\eta^e,$$
$$\frac{dL_\zeta}{dt} + \omega_{1\xi}L_\eta - \omega_{1\eta}L_\xi = m_\zeta^e,$$

где m_ξ^e, m_η^e и m_ζ^e — главные моменты внешних сил относительно подвижных осей ξ, η, ζ, не связанных с твердым телом, L_ξ, L_η и L_ζ — главные моменты количеств движения твердого тела относительно осей ξ, η, ζ, а $\omega_{1\xi}$, $\omega_{1\eta}$, $\omega_{1\zeta}$ — проекции угловой скорости вращения триэдра подвижных осей ξ, η, ζ на эти оси.

Задача 15.1. Исследовать движение по инерции твердого тела, центр тяжести которого совмещен с неподвижной точкой. Эллип-

соид инерции твердого тела в неподвижной точке является эллипсоидом вращения.

Решение. Твердое тело совершает движение по инерции вокруг неподвижной точки O при наличии двух внешних сил; силы тяжести тела, приложенной в центре тяжести O, и реакции опорной точки O.



К задаче 15.1.

Применяем тоерему об изменеиии главного момента количеств движения системы материальных точек относительно точки O:

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_O\left(F_k^e\right).$$

Так как обе внешние силы приложены в иеподвижной точке O (на рисунке силы не изображены), то $m_O^e = 0$, т. е. $dL_O/dt = 0$ и L_O оказывается постоянным. Итак, при движении по инерции твердого тела вокруг неподвижной точки имеет место случай сохранения главного момента количеств движения твердого тела относительно этой точки.

Выбрав начало системы неподвижных осей координат в неподвижной точке O, направим ось z_1 вдоль вектора L_O, направление которого при движении твердого тела остается неизменным. Затем построим неподвижные оси x_1 и y_1 так, чтобы они вместе с осью z_1 образовали правую систему осей координат.

Начало системы подвижных осей координат x, y, z, связанных с твердым телом, выберем в той же точке O. Ось z направим по оси симметрии твердого тела. Затем введем подвижные оси x и y,

которые являются главными осями инерции в точке O (см. рис. a). Так как эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, то $I_x = I_y$.

Запишем динамические и кинематические уравнения Эйлера для случая, когда $I_x = I_y$ и $m_x^e = m_y^e = m_z^e = 0$ (напомним, что $m_O^e = 0$):

$$I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\,\omega_y\omega_z = 0, \tag{1}$$

$$I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\,\omega_z\omega_x = 0, \tag{2}$$

$$I_z\dot{\omega}_z = 0, \tag{3}$$

$$\omega_x = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \tag{4}$$

$$\omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \tag{5}$$

$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \tag{6}$$

Из уравнений (1), (2) и (3) находим два первых интеграла. Умножив уравнение (1) на ω_x, уравнение (2) на ω_y, уравнение (3) на ω_z и затем сложив их, получим

$$I_x\dot{\omega}_x\omega_x + I_y\dot{\omega}_y\omega_y + I_z\dot{\omega}_z\omega_z = 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right) = 0,$$

откуда

$$I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = C_1, \tag{7}$$

где C_1 — постоянная величина.

Так как кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right),$$

то из первого интеграла (7) следует постоянство кинетической энергии твердого тела (этот результат легко получить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы материальных точек, так как внешние силы приложены к твердому телу в неподвижной точке и, следовательно, сумма работ внешних сил равна нулю).

Для определения другого первого интеграла умножим уравнение (1) на $I_x\omega_x$, уравнение (2) — на $I_y\omega_y$, уравнение (3) — на $I_z\omega_z$. После сложения получим

$$I_x^2\dot{\omega}_x\omega_x + I_y^2\dot{\omega}_y\omega_y + I_z^2\dot{\omega}_z\omega_z = 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}\left(I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2\right) = 0,$$

отсюда

$$I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2 = C_2, \tag{8}$$

где C_2 — постоянная величина.

Нетрудно видеть, что первый интеграл, записанный в формуле (8), свидетельствует о постоянстве модуля главного момента количеств

движения твердого тела относительно неподвижной точки O. Действительно, так как оси x, y и z являются главными осями инерции твердого тела в точке O, то

$$L_x = I_x\omega_x, \quad L_y = I_y\omega_y, \quad L_z = I_z\omega_z, \tag{9}$$

следовательно,

$$I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L_O^2 = C_2.$$

Для упрощения интегрирования системы дифференциальных уравнений (3)—(6) запишем проекции главного момента количеств движения твердого тела L_x, L_y, L_z на подвижные оси x, y и z, связанные с твердым телом, учтя при этом, что вектор L_O расположен на оси z_1 (см. рис. a). После проектирования L_O на оси $Oxyz$ находим

$$L_x = L_O \sin\theta \sin\varphi, \quad L_y = L_O \sin\theta \cos\varphi, \quad L_z = L_O \cos\theta. \tag{10}$$

Воспользовавшись формулами (9), перепишем выражение (10) в виде

$$I_x\omega_x = L_O \sin\theta \sin\varphi, \tag{11}$$

$$I_y\omega_y = L_O \sin\theta \cos\varphi, \tag{12}$$

$$I_z\omega_z = L_O \cos\theta. \tag{13}$$

Из дифференциального уравнения (3) находим, что ω_z постоянна. Если в начальный момент $\omega_z = \omega_{z_0}$, то и при движении $\omega_z = \omega_{z_0}$. Теперь из уравнения (13) получим

$$\cos\theta = \frac{I_z\omega_{z_0}}{L_O}, \tag{14}$$

где $L_O = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{I_x^2\omega_{x_0}^2 + I_y^2\omega_{y_0}^2 + I_z^2\omega_{z_0}^2}$ — постоянная. Следовательно, $I_z\omega_{z_0}/L_O$ — тоже постоянная величина и угол нутации θ при движении твердого тела остается неизменным:

$$\theta = \theta_0; \tag{15}$$

отсюда вытекает, что

$$\dot\theta = 0.$$

Теперь уравнения (4)—(6) можно записать короче:

$$\omega_x = \dot\psi \sin\theta_0 \sin\varphi, \tag{16}$$

$$\omega_y = \dot\psi \sin\theta_0 \cos\varphi, \tag{17}$$

$$\omega_{z_0} = \dot\psi \cos\theta_0 + \dot\varphi. \tag{18}$$

Подстановка значения ω_x из уравнения (16) в формулу (11), а также значения ω_y из уравнения (17) в формулу (12) приводит к результату $\dot\psi = L_O/I_x = L_O/I_y$, т. е. $\dot\psi$ постоянна (предполагается, что $\sin\theta_0 \neq 0$, а угол φ может принимать различные значения). Обозначим: $L_O/I_x = L_O/I_y = \omega_1$. Итак,

$$\dot\psi = \omega_1, \tag{19}$$

т. е. прецессия совершается с постоянной угловой скоростью ω_1.

Проинтегрировав выражение (19), получим (при $t=0$, $\psi=\psi_0$)

$$\psi=\omega_1 t+\psi_0. \tag{20}$$

Подставив в уравнение (18) вместо $\dot\psi$ величину ω_1, найдем

$$\dot\varphi=\omega_{z_0}-\omega_1\cos\theta_0.$$

Таким образом, $\dot\varphi$ постоянно; после введения обозначения

$$\omega_{z_0}-\omega_1\cos\theta_0=\omega_2$$

находим

$$\dot\varphi=\omega_2, \tag{21}$$

т. е. собственное вращение твердого тела совершается с постоянной угловой скоростью ω_2.

Проинтегрировав выражение (21), запишем (при $t=0$, $\varphi=\varphi_0$):

$$\varphi=\omega_2 t+\varphi_0.$$

Итак, при движении по инерции симметричного твердого тела, центр тяжести которого совмещается с неподвижной точкой, имеет место движение, называемое регулярной прецессией. Оно определяется уравнениями

$$\theta=\theta_0,\quad \psi=\omega_1 t+\psi_0,\quad \varphi=\omega_2 t+\varphi_0.$$

Ось симметрии z твердого тела описывает круговой конус с углом при вершине O, равным $2\theta_0$, равномерно вращаясь вокруг неизменного по направлению вектора L_O, расположенного на оси z_1, с угловой скоростью ω_1. При этом твердое тело вращается вокруг своей оси симметрии z с угловой скоростью ω_2. Вектор мгновенной угловой скорости ω, изображаемый диагональю параллелограмма, построенного на векторах ω_1 и ω_2 (см. рис. *а*), лежит на мгновенной оси.

При движении твердого тела параллелограмм угловых скоростей, оставаясь неизменной фигурой, поворачивается вокруг оси z_1 с постоянной угловой скоростью ω_1, т. е. ось симметрии твердого тела z описывает круговой конус вокруг оси z_1.

Неподвижным аксоидом является круговой конус, описываемый мгновенной осью вокруг оси z_1 (см. рис. *б*). Подвижным аксоидом является круговой конус, описываемый мгновенной осью вокруг оси z. Движение твердого тела можно интерпретировать посредством качения без скольжения подвижного аксоида по неподвижному.

§ 2. Регулярная прецессия симметричного твердого тела, имеющего неподвижную точку

Симметричное твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, которая в свою очередь вращается вокруг другой оси с постоянной угловой скоростью ω_1. В результате сложения вращений вокруг двух пересекающихся осей твердое тело

совершает вращение вокруг неподвижной точки. Это вращение называется *регулярной прецессией*. Угол θ между векторами ω и ω_1 называется углом нутации (рис. 15.1). При этом ω_1 — угловая скорость прецессии, ω — угловая скорость собственного вращения.

Начала подвижных осей $\xi\eta\zeta$ и неподвижных осей $x_1y_1z_1$ взяты в неподвижной точке O. Ось z_1 направлена вдоль вектора ω_1. Оси x и y выбраны так, чтобы совместно с осью z_1 образовать правую систему осей. Ось ζ направлена вдоль вектора ω, т. е. вдоль оси симметрии твердого тела. Ось ξ направлена вдоль линии узлов (т. е. ось ξ перпендикулярна к плоскости векторов ω и ω_1), ось η выбрана так, чтобы совместно с осями ξ и ζ образовать правую систему осей координат. Подчеркнем, что подвижные оси $O\xi\eta\zeta$ не связаны с движущимся твердым телом.

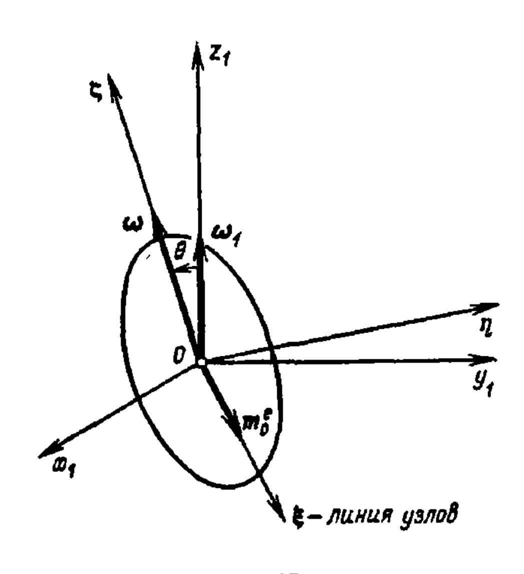


Рис. 15.1.

Для того чтобы симметричное твердое тело совершало регулярную прецессию, к нему должны быть приложены внешние силы, главный момент которых относительно точки O направлен по оси ξ, и его проекция равна

$$m_\xi^e = \omega_{1z_1} \sin\theta \left[I_\zeta \omega_\zeta + (I_\zeta - I_\eta)\,\omega_{1z_1} \cos\theta\right].$$

Если $I_\zeta\omega_\zeta + (I_\zeta - I_\eta)\,\omega_{1z_1}\cos\theta > 0$, то m_O^e совпадает с положительным направлением оси ξ.

Гироскопический момент $m_O^{\text{гир}}$ направлен противоположно моменту m_O^e, т. е. $m_O^{\text{гир}} = -m_O^e$.

В случае быстро вращающегося гироскопа $\omega_\zeta \gg \omega_{1z_1}$. Пренебрегая при этом вторым слагаемым в квадратной скобке, получим выражение главного момента внешних сил:

$$m_\xi^e = I_\zeta \omega_\zeta \omega_{1z_1} \sin\theta.$$

Если векторы ω и ω_1 взаимно перпендикулярны, то $\theta = \pi/2$, и это выражение для m_ξ^e является точным.

Обычно приходится решать задачи на регулярную прецессию твердого тела, в которых требуется:

а) по заданным ω, ω_1 θ, I_ζ, I_η определить главный момент внешних сил или какую-либо внешнюю силу;

б) по заданным ω, m_O^e, θ, I_ζ и I_η вычислить угловую скорость регулярной прецессии ω_1.

Решать задачи на регулярную прецессию твердого тела рекомендуется в следующем порядке:

1) выбрать неподвижные оси координат $x_1y_1z_1$ и подвижные оси $\xi\eta\zeta$, не связанные с твердым телом;

2) изобразить на рисунке внешние силы, приложенные к твердому телу;

3) а) если даны ω, ω_1, θ, I_ζ, I_η, то по формуле

$$m_\xi^e = \omega_{1z_1} \sin\theta\, [I_\zeta\omega_\zeta + (I_\zeta - I_\eta)\, \omega_{1z_1} \cos\theta]$$

определить главный момент m_ξ^e внешних сил относительно оси ξ либо одну из внешних сил;

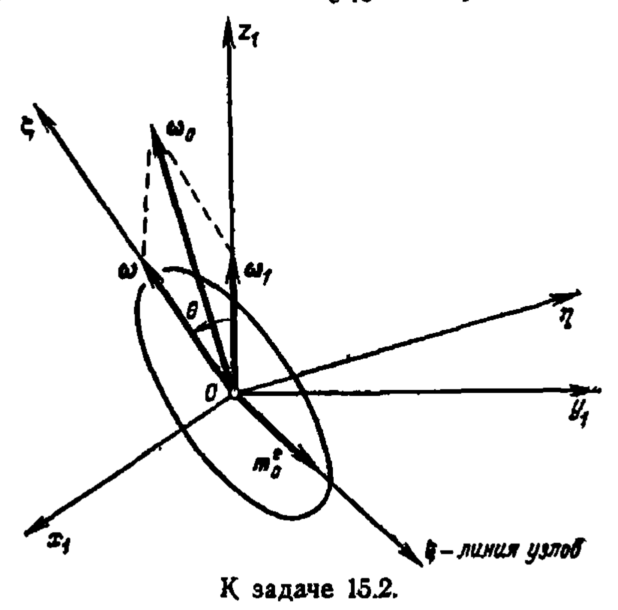
б) если даны внешние силы, а также ω_1, θ, I_ζ, I_η, то, определив главный момент внешних сил относительно неподвижной точки, из той же формулы найти проекцию на ось z_1 угловой скорости регулярной прецессии ω_1.

Задача 15.2. Вывести формулу для проекции главного момента внешних сил

$$m_\xi^e = \omega_{1z_1} \sin\theta\, [I_\zeta\omega_\zeta + (I_\zeta - I_\eta)\, \omega_{1z_1} \cos\theta]$$

при регулярной прецессии симметричного твердого тела.

Решение. Неподвижные $x_1y_1z_1$ и подвижные $\xi\eta\zeta$ координатные оси направляем так, как было указано выше, в обзоре теории. Следует помнить, что подвижные оси $\xi\eta\zeta$ с твердым телом не связаны.



К задаче 15.2.

В то время как подвижные оси $\xi\eta\zeta$ вращаются вокруг оси z_1 с угловой скоростью ω_1, твердое тело вращается вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\omega_a = \omega + \omega_1$, где ω — угловая скорость относительного вращения, ω_1 — угловая скорость переносного вращения.

При вычислении проекций ω_a и ω_1 на оси ξ, η, ζ следует иметь в виду, что параллелограмм угловых скоростей лежит в плоскости $\eta\zeta$. Как видно из рисунка,

$$\omega_{1\xi}=0,\quad \omega_{1\eta}=\omega_{1z_1}\sin\theta,\quad \omega_{1\zeta}=\omega_{1z_1}\cos\theta. \tag{1}$$

Использовав эти выражения, найдем

$$\omega_{a\xi}=\omega_\xi+\omega_{1\xi}=0,\quad \omega_{a\eta}=\omega_\eta+\omega_{1\eta}=\omega_{1z_1}\sin\theta,$$
$$\omega_{a\zeta}=\omega_\zeta+\omega_{1\zeta}=\omega_\zeta+\omega_{1z_1}\cos\theta.$$

Следовательно, главные моменты количеств движения симметричного твердого тела относительно осей ξ, η, ζ, являющихся главными осями инерции в неподвижной точке O, имеют вид

$$L_\xi=I_\xi\omega_{a\xi}=0,\quad L_\eta=I_\eta\omega_{a\eta}=I_\eta\omega_{1z_1}\sin\theta,\quad L_\zeta=I_\zeta\omega_{a\zeta}=$$
$$=I_\zeta(\omega_\zeta+\omega_{1z_1}\cos\theta). \tag{2}$$

Так как L_ξ, L_η и L_ζ постоянны, то

$$\frac{dL_\xi}{dt}=\frac{dL_\eta}{dt}=\frac{dL_\zeta}{dt}=0. \tag{3}$$

Для определения главного момента внешних сил относительно точки O воспользуемся динамическими уравнениями Эйлера

$$\frac{dL_\xi}{dt}+\omega_{1\eta}L_\zeta-\omega_{1\zeta}L_\eta=m_\xi^e,$$
$$\frac{dL_\eta}{dt}+\omega_{1\zeta}L_\xi-\omega_{1\xi}L_\zeta=m_\eta^e,$$
$$\frac{dL_\zeta}{dt}+\omega_{1\xi}L_\eta-\omega_{1\eta}L_\xi=m_\zeta^e.$$

После подстановки значений $\omega_{1\xi}$, $\omega_{1\eta}$, $\omega_{1\zeta}$ из формул (1), выражений L_ξ, L_η, L_ζ из формул (2) и dL_ξ/dt, dL_η/dt, dL_ζ/dt из формул (3) уравнения Эйлера примут вид

$$m_\xi^e=\omega_{1z_1}\sin\theta\,[I_\zeta\omega_\zeta+(I_\zeta-I_\eta)\,\omega_{1z_1}\cos\theta],$$
$$m_\eta^e=0,\quad m_\zeta^e=0.$$

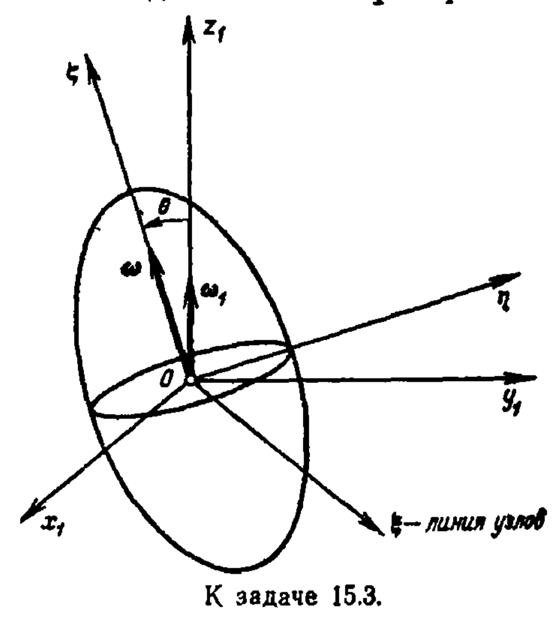
Следовательно, главный момент внешних сил m_O^e относительно неподвижной точки O лежит на линии узлов ξ и совпадает с положительным направлением оси ξ, если

$$I_\zeta\omega_\zeta+(I_\zeta-I_\eta)\,\omega_{1z_1}\cos\theta>0.$$

Задача 15.3. Вычислить угловую скорость регулярной прецессии симметричного твердого тела, центр тяжести которого расположен в неподвижной точке, если θ — угол между осью симметрии и осью прецессии, I_ζ — момент инерции твердого тела относительно оси сим-

метрии, $I_\xi = I_\eta$ — экваториальные моменты инерции твердого тела, ω — угловая скорость собственного вращения (вокруг оси симметрии ζ).

Решение. Начала подвижных $\xi\eta\zeta$ и неподвижных $x_1y_1z_1$ осей находятся в неподвижной точке O. Неподвижная ось z_1 направлена по оси прецессии, а оси x_1 и y_1 — так, чтобы вместе с осью z_1 образовать правую систему осей координат. Подвижная ось ζ направлена по оси симметрии твердого тела, ось ξ — по линии узлов, ось η выбрана так, чтобы вместе с осями ξ и ζ образовать правую систему осей координат.



К задаче 15.3.

На твердое тело действуют две силы: сила тяжести и опорная реакция. Так как центр тяжести совмещен с неподвижной точкой O, то обе внешние силы приложены в точке O и их главный момент относительно точки O равен нулю, следовательно, $m_\xi^e = 0$.

Поэтому формула, определяющая проекцию главного момента,

$$m_\xi^e = \omega_{1z_1} \cos\theta \, [I_\zeta\omega_\zeta + (I_\zeta - I_\eta)\, \omega_{1z_1} \cos\theta]$$

принимает вид

$$\omega_{1z_1} \cos\theta \, [I_\zeta\omega_\zeta + (I_\zeta - I_\eta)\, \omega_{1z_1} \cos\theta] = 0,$$

откуда находится искомая угловая скорость регулярной прецессии

$$\omega_{1z_1} = \frac{I_\zeta\omega_\zeta}{(I_\zeta - I_\eta)\cos\theta}.$$

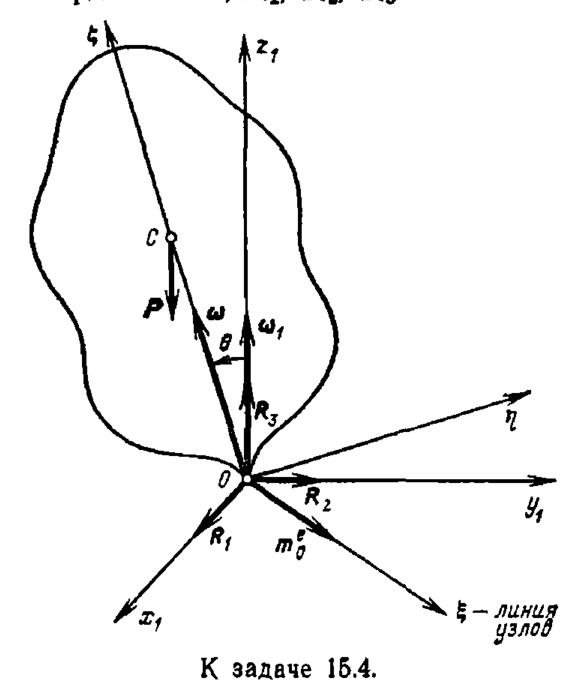
Рассмотренная регулярная прецессия твердого тела возникает при движении по инерции. Заметим, что регулярная прецессия по инерции возможна вокруг любой оси, проходящей через неподвижную точку.

Задача 15.4. Определить угловую скорость регулярной прецессии ω_1 симметричного твердого тела веса P, происходящей под действием силы тяжести. Расстояние от центра тяжести C твердого тела до неподвижной точки O равно a.

Даны моменты инерции твердого тела относительно главных центральных осей инерции, угловая скорость вращения ω вокруг оси симметрии и угол θ между осями симметрии и прецессии.

Решение. Неподвижные $x_1y_1z_1$ и подвижные $\xi\eta\zeta$ координатные оси направлены так, как в предыдущей задаче.

К твердому телу приложены внешние силы: $\boldsymbol{P}$ — сила тяжести твердого тела, $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ — составляющие опорной реакции в точке O.



К задаче 15.4.

Вычислим главный момент внешних сил относительно оси ξ:

$$m_\xi^e = Pa\sin\theta.$$

Подставив это значение m_ξ^e в формулу

$$m_\xi^e = \omega_{1z_1}\sin\theta\,[I_\zeta\omega_\zeta + (I_\zeta - I_\eta)\,\omega_{1z_1}\cos\theta],$$

получим квадратное уравнение относительно проекции на ось z_1 искомой угловой скорости регулярной прецессии ω_{1z_1}:

$$(I_\zeta - I_\eta)\,\omega_{1z_1}^2\cos\theta + I_\zeta\omega_\zeta\omega_{1z_1} - Pa = 0.$$

Решив квадратное уравнение относительно ω_{1z_1}, находим два его корня:

$$\omega_{1z_1} = \frac{-I_\zeta\omega_\zeta \pm \sqrt{I_\zeta^2\omega_\zeta^2 + 4\,(I_\zeta - I_\eta)\,Pa\cos\theta}}{2\,(I_\zeta - I_\eta)\cos\theta}, \qquad (1)$$

т. е. твердое тело может совершать регулярные прецессии с разными угловыми скоростями (конечно, это движение возможно только при выполнении условия $I_\zeta^2\omega_\zeta^2 + 4\,(I_\zeta - I_\eta)\,Pa\cos\theta > 0$; при достаточно больших значениях проекции угловой скорости ω_ζ это неравенство всегда выполняется).

Вычислим величины ω_{1z_1} в случае вращения твердого тела с большой угловой скоростью собственного вращения ω_ζ.

Приближенное определение дискриминанта квадратного уравнения дает

$$\sqrt{I_\zeta^2\omega_\zeta^2 + 4\,(I_\zeta - I_\eta)\,Pa\cos\theta} = I_\zeta\omega_\zeta\sqrt{1 + \frac{4Pa\,(I_\zeta - I_\eta)\cos\theta}{I_\zeta^2\omega_\zeta^2}} \approx$$

$$\approx I_\zeta\omega_\zeta\left[1 + \frac{2\,(I_\zeta - I_\eta)\,Pa\cos\theta}{I_\zeta^2\omega_\zeta^2}\right],$$

т. е.

$$I_\zeta\omega_\zeta\left[1+\frac{2(I_\zeta-I_\eta)\,Pa\cos\theta}{I_\zeta^2\omega_\zeta^2}\right]=I_\zeta\omega_\zeta+\frac{2(I_\zeta-I_\eta)\,Pa\cos\theta}{I_\zeta\omega_\zeta}. \qquad (2)$$

Внеся значение (2) в формулу (1), находим искомые приближенные проекции угловой скорости регулярной прецессии:

угловая скорость медленной прецессии

$$\omega_{1z}=\frac{Pa}{I_\zeta\omega_\zeta}$$

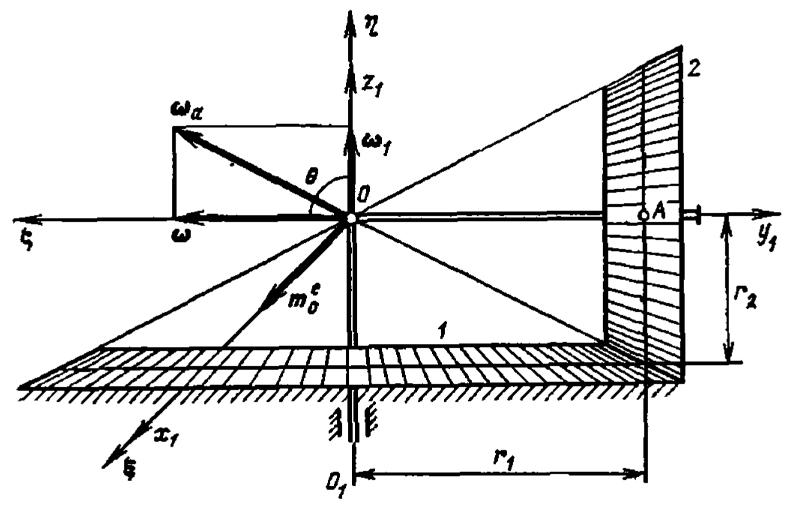
и угловая скорость быстрой прецессии

$$\omega_{1z_1}=\frac{I_\zeta\omega_\zeta}{(I_\zeta-I_\eta)\cos\theta}.$$

Значение проекции угловой скорости быстрой прецессии совпадает со значением проекции угловой скорости регулярной прецессии по инерции, полученной в предыдущей задаче.

Значение проекции угловой скорости медленной прецессии совпадает с результатом, подсчитанным при решении аналогичной задачи с помощью приближенной теории гироскопов (см. второй том, стр. 563).

Задача 15.5. Вычислить дополнительный динамический момент, возникающий при движении системы, описанной в задаче 10.66 (см. второй том).



К задаче 15.5.

Решение. Направления неподвижных $x_1y_1z_1$ и подвижных $\xi\eta\zeta$ осей координат указаны на рисунке.

Колесо *2* совершает регулярную прецессию с угловой скоростью ω_1 вокруг оси z_1. Угол нутации θ равен $\pi/2$.

Вычислим главный момент внешних сил по формуле

$$m^e_\zeta = \omega_{1z_1} \sin\theta \, [I_\zeta \omega_\zeta + (I_\zeta - I_\eta)\, \omega_{1z_1} \cos\theta]. \qquad (1)$$

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ находим: $m^e_\zeta = I_\zeta \omega_\zeta \omega_{1z_1}$, что соответствует результату, полученному в формуле (3) задачи 10.66 (см. второй том), так как $I_\zeta = \frac{P}{g}\rho^2$, $\omega_\zeta = \frac{r_1}{r_2}\omega_{1z_1} = \frac{r_1}{r_2}\omega_e$.

Использование формулы (1) быстрее приводит к результату, чем применение теоремы Резаля, с помощью которой была решена задача 10.66, но требует наличия у читателя сведений по динамике твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

Формулу (1) можно также с успехом применить при решении задач 10.64 и 10.65 второго тома.

Задача 15.6. Решить задачу 10.16 (см. второй том), воспользовавшись теорией регулярной прецессии симметричного твердого тела.

Решение. Решение задачи 10.16 второго тома, основанное на методе кинетостатики, было довольно громоздким. Оно сводилось к системе четырех уравнений

$$N'_{Ax} + N'_{Bx} = Mx_C\omega^2 + My_C\varepsilon,$$
$$N'_{Ay} + N'_{By} = My_C\omega^2 - Mx_C\varepsilon,$$
$$N'_{Ay}a - N'_{By}b = -I_{yz}\omega^2 + I_{xy}\varepsilon,$$
$$-N'_{Ax}a + N'_{Bx}b = I_{xy}\omega^2 + I_{yz}\varepsilon.$$

При этом предварительно были определены центробежные моменты инерции I_{xz} и I_{yz}. Вычисление I_{xz} и I_{yz} потребовало ряда выкладок, выполненных в решении задачи 9.12 второго тома.

Эту задачу можно решить значительно короче, если рассматривать вращение цилиндра вокруг оси z как частный случай регулярной прецессии при отсутствии его собственного вращения вокруг оси ζ.

Для этого достаточно определить гироскопический момент $m^{гир}$ цилиндра, являющийся моментом его сил инерции, которые приводятся к паре искомых боковых дополнительных динамических давлений на опоры A и B: $m^{гир} = -m^e_0$.

Угол нутации θ в данной задаче обозначен α, следовательно,

$$m^{гир} = \omega_{1z_1} \sin\alpha \, [I_\zeta \omega_\zeta + (I_\zeta - I_\eta)\, \omega_{1z_1} \cos\alpha]. \qquad (1)$$

Ввиду отсутствия собственного вращения $\omega_\zeta = 0$, а ω_{1z_1} следует заменить на ω, так как угловая скорость вращения цилиндра вокруг оси z_1 является угловой скоростью регулярной прецессии. Теперь формула (1) принимает вид

$$m^{гир} = (I_\zeta - I_\eta)\, \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Для цилиндра $I_\zeta = Pr^2/2g$ и $I_\eta = \frac{P}{g}\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$, т. е.

$$m^{\text{гир}} = \frac{P}{2g}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\omega^2 \sin 2\alpha.$$

Гироскопический момент является моментом пары дополнительных боковых давлений на опоры A и B с плечом $AB = 2h$. Поэтому

$$|N'_A| = |N'_B| = \frac{m^{\text{гир}}}{2h} = \frac{P}{4gh}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\omega^2 \sin 2\alpha.$$

Метод решения этой задачи может быть с успехом использован при решении ряда задач на определение динамических боковых давлений, приложенных к опорам твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

ГЛАВА XVI

КОСМИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА. ДИНАМИКА ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

§ 1. Кеплерово движение (движение под действием центральной силы)

Две материальные точки взаимно притягиваются с силой, модуль которой равен

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (1^*)$$

где m_1 и m_2 — соответственно массы первой и второй точек, f — постоянная всемирного тяготения, r — расстояние между точками.

Формула (1*) выражает закон всемирного тяготения, открытый Исааком Ньютоном. Иногда этот закон называют законом Ньютона.

Если взаимно притягиваются не материальные точки, а тела, то формула (1*) сохраняет свой простой вид, если тела имеют сферическую структуру: каждое из тел имеет форму шара и плотность одинакова во всех точках тела, находящихся на одном и том же расстоянии от его центра. В этом случае задача исследования движения центров инерции двух тел под действием взаимного притяжения не отличается от исследования движения двух точек, взаимно притягивающихся согласно закону Ньютона.

Эта задача называется классической задачей двух тел. Ее геометрическое решение дал впервые И. Ньютон. Аналитическое решение было затем дано Даниилом Бернулли. Леонарду Эйлеру принадлежит подробное исследование этой задачи.

Сила всемирного притяжения (1*) является консервативной силой. Силовая функция поля этой силы U определяется формулой

$$U = f\frac{m_1 m_2}{r}. \qquad (2^*)$$

Положив $m_1 = 1$ в формуле (2*), получим функцию

$$U = f\frac{m}{r}, \qquad (3^*)$$

называемую ньютоновым потенциалом *).

) В этой формуле опущен индекс у массы. В научной литературе к формуле (3) всегда применяется указанное название, которого и мы будем придерживаться, хотя точнее называть ее ньютоновой силовой функцией.

Если тело не имеет сферической структуры, то потенциал силы притяжения всего тела дается формулой

$$U=f\int\limits_m \frac{dm}{r_1}, \tag{4*}$$

где r_1 — расстояние от частицы dm до притягиваемой точки единичной массы. Интеграл вычисляется по всей массе тела.

Если рассматривать Землю как тело сферической структуры, то ее ньютонов потенциал равен

$$U_0=\frac{\mu}{r}=\frac{fM}{r}, \tag{5*}$$

где $\mu=fM$ — гравитационный параметр, равный произведению постоянной всемирного тяготения на массу Земли, r — расстояние от центра Земли до притягиваемой материальной точки. Численно $\mu = 3{,}98\cdot 10^5$ *км³/сек²*.

Сила притяжения Земли равна

$$\boldsymbol{F}_0=-m\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}, \tag{6*}$$

где m — масса притягиваемой точки, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор притягиваемой точки, проведенный из центра Земли.

При изучении движения космического аппарата вблизи Земли последнюю в первом приближении рассматривают как тело сферической структуры, а космический аппарат — как материальную точку. При этом масса Земли M несоизмеримо больше массы космического аппарата m, вследствие чего можно пренебречь действием массы m на массу M. Задача о движении космического аппарата в этом случае является частным случаем классической задачи двух тел. Траектория космического аппарата, движущегося под действием силы притяжения Земли, дается формулой

$$r=\frac{p}{1-e\cos\varphi}, \tag{7*}$$

где r — радиус-вектор, проведенный из центра Земли к космическому аппарату, e — эксцентриситет, p — фокальный параметр конического сечения, φ — угол между полярной осью и радиусом-вектором r. Это уравнение конического сечения, которое в зависимости от величины эксцентриситета определяет:

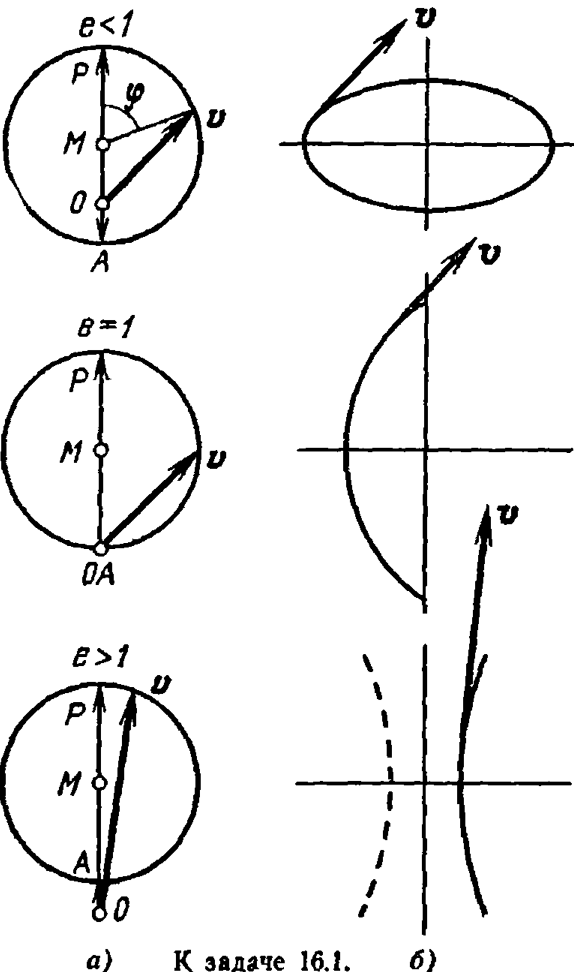
при $e<1$ эллипс,
при $e=1$ параболу,
при $e>1$ гиперболу.

Величина e зависит от начальных условий движения. Кроме указанных случаев, траектории могут быть при определенных начальных условиях радиальными (прямолинейными) и круговыми.

Все пять траекторий называются кеплеровыми траекториями, а движения, происходящие по этим траекториям, называются кеплеровыми движениями. Так как сила всемирного тяготения является консервативной силой, то при движении в потенциальном силовом поле Земли имеет место закон сохранения механической энергии

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{const}. \tag{8*}$$

Задача 16.1. Точка совершает кеплерово движение. Найти уравнения движения и построить годограф скорости точки для трех случаев кеплеровых траекторий. Определить модуль скорости в любой точке траектории.



К задаче 16.1.

Решение. Обозначим орты радиальной и трансверсальной осей через e_1 и e_2. Тогда скорость точки, движущейся в плоскости, будет выражаться через составляющие в полярной системе координат в виде

$$v = \dot{r}e_1 + r\dot{\varphi}e_2. \tag{1}$$

Найдем проекции скорости на полярные оси координат при кеплеровом движении. При движении под действием центральной силы проекция ускорения точки на трансверсальную ось обращается в нуль:

$$w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0,$$

откуда

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + 2\frac{\dot{r}}{r} = 0,$$

или

$$\ln\dot{\varphi} + 2\ln r = \ln c$$

и, наконец,

$$r^2\dot{\varphi} = c; \tag{2}$$

это есть интеграл площадей.

Для нахождения проекции скорости на радиальную ось заметим, что

$$\dot{r} = \dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi}. \tag{3}$$

Из (2) имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \tag{4}$$

а из уравнения конических сечений в полярных координатах

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi} \tag{5}$$

находим

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{pe\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}. \tag{6}$$

Перемножая (4) и (6), согласно (3) и (5) будем иметь

$$\dot r=\frac{c}{r^2}\cdot\frac{pe\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}=\frac{ce\sin\varphi}{p}. \tag{7}$$

Внеся (2) и (7) в формулу (1), получим

$$v=\frac{c}{p}e\sin\varphi e_1+\frac{c}{r}e_2.$$

Или, заменив r согласно (5), найдем

$$v=\frac{c}{p}[e\sin\varphi e_1+(1+e\cos\varphi)e_2]. \tag{8}$$

Проведем через начало полярной системы координат оси x, y. Тогда направляющие косинусы между ортами полярных и декартовых осей координат будут

	i_1	j_1
e_1	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
e_2	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$

Спроектировав скорость (8) на декартовы оси, найдем

$$v_x=-\frac{c}{p}\sin\varphi,\quad v_y=\frac{c}{p}(e+\cos\varphi).$$

Исключив из этих уравнений угол φ, получим уравнение годографа

$$v_x^2+\left(v_y-\frac{c}{p}e\right)^2=\frac{c^2}{p^2}. \tag{9}$$

Из уравнения (5) при $\varphi=0$, получим

$$r_0=\frac{p}{1+e}. \tag{10}$$

С другой стороны, из (1) имеем

$$v^2=\dot r^2+r^2\dot\varphi^2.$$

С учетом (7), (2) и (5) последнее равенство преобразуем к виду

$$v^2=\frac{c^2}{p}\left[\frac{2}{r}+\frac{e^2-1}{p}\right]. \tag{11}$$

Эта формула определяет модуль скорости в каждом месте кеплеровой траектории с радиусом r.

Обозначив через v_0 значение скорости при $\varphi=0$, получаем из (11) с учетом (10)

$$v_0^2=\frac{c^2}{p^2}(1+e)^2.$$

Обозначим для краткости

$$\frac{c}{p}=\frac{v_0}{1+e}\equiv R.$$

Тогда равенство (9) перепишется в виде

$$v_x^2+(v_y-eR)^2=R^2. \tag{12}$$

Уравнение (12) представляет уравнение окружности радиуса R.

При $e=1$ полюс годографа скорости лежит на окружности. Траектория точки — парабола.

При $e<1$ полюс годографа скорости находится внутри окружности. Траектория — эллипс.

При $e>1$ полюс годографа скорости расположен вне окружности. Траектория — гипербола.

Все три случая изображены на рис. *а*. Соответствующие им положения точек на траекториях даны на рис. *б*.

Из уравнения (11) находим модуль скорости, соответствующий параболической траектории, когда точка находится от центра притяжения на расстоянии r. Для этого положим $e=1$. Тогда

$$v=\sqrt{\frac{2c^2}{pr}}. \tag{13}$$

Для параболического движения находим граничную скорость (при $\varphi=0$), внеся значение $r_0=p/2$ из (10) в (13)

$$v_0=\sqrt{\frac{4c^2}{p^2}}=2R.$$

Таким образом, при $v_0<2R$, $v_0=2R$ и $v_0>2R$ точка описывает соответственно эллипс, параболу или гиперболу.

Ускорение точки направлено параллельно касательной к годографу. Следовательно, угол vMP равен полярному углу φ, а скорость v_0 направлена по трансверсальной оси.

Отрезки OP на рис. *а* дают вектор скорости точки в перигее, а отрезки OA — вектор скорости в апогее.

Задача 16.2. Скорость планеты, совершающей кеплерово движение, разложить на две составляющие: $\boldsymbol{v}_1$ — перпендикулярную к радиусу-вектору $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}_2$ — перпендикулярную к большой оси эллипса. Определить модули этих составляющих скорости и доказать, что это разложение дает непосредственно полярный годограф скорости.

Решение. Разложим скорость планеты на радиальную и трансверсальную составляющие:

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{c}{r}, \tag{1}$$

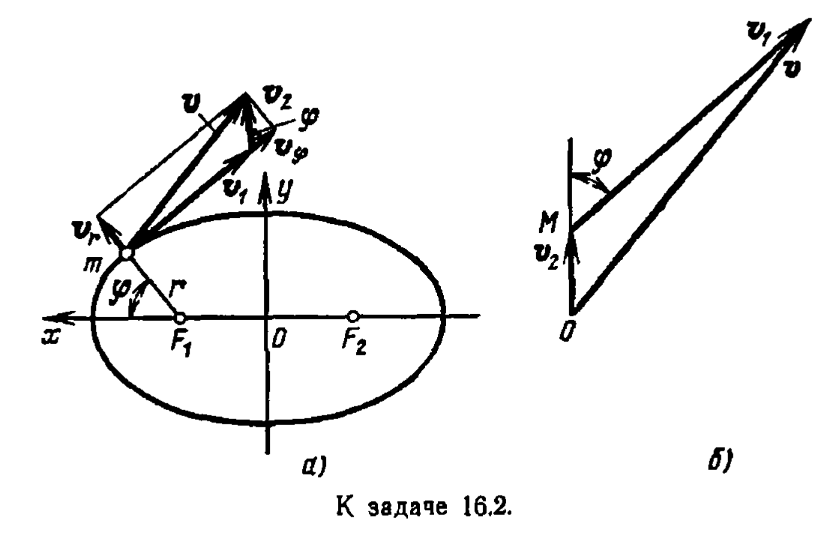
$$v_r = \dot{r} = \dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{c}{p} e \sin\varphi. \tag{2}$$

В формуле (1) обозначено

$$r^2\dot{\varphi} = c;$$

это — интеграл площадей.

Вывод формулы (2) дан в предыдущей задаче — формула (7). Разложим скорость планеты на составляющие v_1, перпендикулярную к радиусу-вектору r, и v_2, перпендикулярную к большой оси (рис. *а*).



К задаче 16.2.

Тогда, заметив, что угол, образованный v_2 и v_1, равен полярному углу φ, находим

$$v_1 = v_\varphi - v_2\cos\varphi, \quad v_2 = \frac{v_r}{\sin\varphi}.$$

Внеся в эти уравнения значения (1) и (2), получим

$$v_1 = \frac{c}{r} - v_2\cos\varphi = c\left(\frac{1}{r} - \frac{e\cos\varphi}{p}\right) = \frac{c}{p},$$

$$v_2 = \frac{c}{p} e.$$

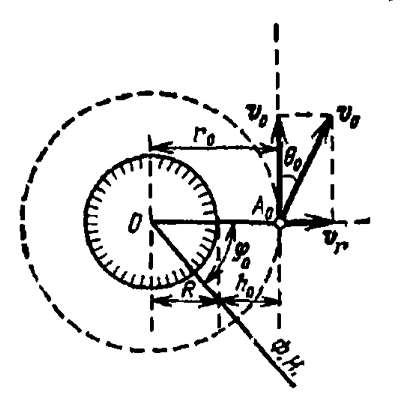
Таким образом, составляющая v_2 неизменна по модулю и направлению, составляющая v_1 постоянна по модулю.

Отложим от полюса O (рис. *б*) вектор $OM = v_2$, а из его конца вектор v_1, перпендикулярно к радиусу-вектору r. Сумма этих векторов дает скорость планеты v, а угол наклона вектора v_1 к продолжению OM равен полярному углу φ. При движении планеты конец

вектора $\boldsymbol{v}$ будет описывать окружность радиуса v_1 с центром M, которая и будет являться годографом скорости.

Задача 16.3. Космический аппарат массы m выведен ракетой-носителем на расстояние $r_0 = R + h_0$ от центра Земли. В момент отделения радиус-вектор образовывал угол φ_0 с избранным фиксированным направлением; скорость аппарата была $\boldsymbol{v}_0$ и составляла угол θ_0 с трансверсальной осью.

Найти параметры траектории космического аппарата: эксцентриситет e, параметр кривой p, угол φ_1, образованный избранным фиксированным направлением с фокальной осью кривой.



К задаче 16.3.

Решение. Для составления дифференциального уравнения движения космического аппарата воспользуемся проекциями ускорения на полярные оси координат. Проекция ускорения на радиальную ось равна

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2. \tag{1}$$

Проекция ускорения на трансверсальную ось равна

$$w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \tag{2}$$

Проекции силы ньютоновского притяжения на те же оси таковы:

$$F_r = -\frac{m\mu}{r^2}, \qquad F_\varphi = 0. \tag{3}$$

Дифференциальные уравнения движения в проекциях на эти оси будут

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \tag{4}$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \tag{5}$$

Переписав уравнение (5) в виде

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + 2\frac{\dot{r}}{r} = 0$$

и проинтегрировав, получим

$$\ln\dot{\varphi} + 2\ln r = \ln c,$$

или

$$r^2\dot{\varphi} = c = \text{const}. \tag{6}$$

Таким образом, секторная скорость, равная

$$\dot{S} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}c, \tag{7}$$

постоянна. Перейдя далее к уравнению (4) и введя $u = 1/r$, найдем с учетом (6)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d(1/u)}{du}\cdot\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -c\frac{du}{d\varphi}. \qquad (8)$$

Тогда

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = -c\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\varphi}\right) = -c\frac{d^2u}{d\varphi^2}\frac{d\varphi}{dt} = -c^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}. \qquad (9)$$

Внеся это значение $\ddot{r}$ с учетом (6) в уравнение (4), найдем дифференциальное уравнение движения космического аппарата

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}, \qquad (10)$$

где введено обозначение $p = c^2/\mu$.

Уравнение (10) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение его складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения полного уравнения.

Для нахождения общего решения однородного уравнения замечаем, что корни характеристического уравнения чисто мнимые $z_{1,2} = \pm i$. Частное решение полного уравнения $u = 1/p$. Следовательно, решением дифференциального уравнения (10) является

$$u = \frac{1}{p} - C_1\cos\varphi - C_2\sin\varphi,$$

или

$$u = \frac{1}{p}[1 - e\cos(\varphi - \varphi_1)],$$

где C_1 и C_2 или соответственно e и φ_1 — постоянные интегрирования.

Вернувшись к исходной переменной r, находим уравнение траектории в окончательном виде

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - C_1\cos\varphi - C_2\sin\varphi, \qquad (11)$$

или

$$r = \frac{p}{1 - e\cos(\varphi - \varphi_1)}. \qquad (12)$$

Найдем зависимость между постоянными интегрирования C_1, C_2 (первая форма записи траектории) и постоянными e, φ_2 (вторая форма записи).

Переписав уравнение (12) в виде

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{e}{p}\cos(\varphi - \varphi_1)$$

и сопоставив с (11), находим

$$C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi = \frac{e}{p}\cos(\varphi - \varphi_1). \qquad (13)$$

Отсюда

$$e^2 = p^2(C_1^2 + C_2^2), \tag{14}$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}. \tag{15}$$

Перейдем далее к непосредственному определению зависимости параметров траектории от начальных условий движения. Согласно (7)

$$p = \frac{c^2}{\mu} = \frac{r^4\cdot\dot{\varphi}^2}{\mu}. \tag{16}$$

С другой стороны, проекция скорости на трансверсальную ось равна

$$v_\varphi = v_0\cos\theta_0 \equiv r_0\dot{\varphi}_0, \tag{17}$$

следовательно,

$$p = \frac{v_0^2\cos^2\theta_0\cdot r_0^2}{\mu}. \tag{18}$$

Введем безразмерную величину, равную отношению кинетической энергии точки, движущейся по кеплеровой траектории к ее ньютонову потенциалу:

$$k_1 = \frac{mv^2/2}{m\mu/r} = \frac{v^2r}{2\mu}. \tag{19}$$

Тогда (18) запишется в виде

$$p = 2k_1r_0\cos^2\theta_0. \tag{20}$$

Это второе выражение параметра кривой через начальные условия движения.

Для выражения двух других параметров из (11) находим

$$C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}. \tag{21}$$

Дифференцируя это равенство по переменной φ, имеем

$$C_1\sin\varphi - C_2\cos\varphi = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}. \tag{22}$$

Так как

$$\frac{dr}{dt} = v_r = v\sin\theta, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v\cos\theta}{r}, \tag{23}$$

то

$$\frac{dr}{d\varphi} = r\,\mathrm{tg}\,\theta. \tag{24}$$

Внося это значение производной в (22), получим

$$C_1\sin\varphi - C_2\cos\varphi = -\frac{\mathrm{tg}\,\theta}{r}. \tag{25}$$

Решая совместно (21) и (25), находим

$$C_1 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)\cos\varphi - \frac{\operatorname{tg}\theta}{r}\sin\varphi, \tag{26}$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi + \frac{\operatorname{tg}\theta}{r}\cos\varphi. \tag{27}$$

Теперь, согласно (14),

$$e^2 = \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2 + \left(\frac{p\operatorname{tg}\theta}{2}\right)^2. \tag{28}$$

Перейдем к параметру k_1, пользуясь (20). Тогда

$$e^2 = (1 - 2k_1\cos^2\theta)^2 + (2k_1\cos\theta\sin\theta)^2$$

или окончательно

$$e^2 = 1 - 4k_1(1 - k_1)\cos^2\theta. \tag{29}$$

Наконец, согласно (15) и (26), (27),

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(r-p)\sin\varphi + p\operatorname{tg}\theta\cos\varphi}{(r-p)\cos\varphi - p\operatorname{tg}\theta\sin\varphi}. \tag{30}$$

Формулы (20), (29) и (30) представляют искомые зависимости параметров p, e, φ_1 от начальных условий движения. Пользуясь этими равенствами, можно установить зависимость характера траектории от начальных условий движения.

Действительно, рассмотрим, пользуясь указанными тремя формулами, условия, при которых космический аппарат будет двигаться по одной из пяти кеплеровых траекторий.

1) *Прямолинейная траектория* возможна согласно уравнению (17), если во все время движения, а следовательно, и в начальный момент

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}. \tag{31}$$

2) *Круговая траектория* возможна, если во все время движения и в том числе в начальный момент времени

$$\theta = 0, \tag{32}$$

т. е. скорость направлена по касательной к окружности. Однако это условие, выполненное в начальный момент, является необходимым, но недостаточным.

Из формулы (12) следует, что модуль радиуса-вектора точки остается неизменным, если эксцентриситет e равен нулю. Тогда из (29) с учетом (32) имеем

$$e^2 = \sin^2\theta + (1 - 2k_1)^2\cos^2\theta = (1 - 2k_1)^2 = 0$$

или

$$k_1 = \frac{1}{2}. \tag{33}$$

Согласно формуле (19) это условие можно записать в виде

$$k_1 = \frac{v^2 r}{2\mu} = \frac{1}{2}, \tag{34}$$

откуда находится первая космическая скорость. Действительно, положив $r = R$, где R — радиус Земли, и $\mu = gR^2$, найдем

$$v_1 = \sqrt{gR} \approx 8 \textit{ км/сек.} \tag{35}$$

Итак, для того чтобы космический спутник обратился в искусственный спутник Земли, движущийся по круговой траектории вблизи земной поверхности, необходимо выполнить два независимых условия: (35) и (32).

Если космический аппарат описывает круговую траекторию на расстоянии h от поверхности Земли, то его скорость будет, согласно (34),

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}. \tag{36}$$

Заметим, что эту скорость можно получить и непосредственно, проектируя уравнение движения по круговой траектории на нормаль

$$mW_n = F_n,$$

или

$$m\frac{v_0^2}{r_0} = m\frac{\mu}{r_0^2} = m\frac{gR^2}{r_0^2},$$

откуда, полагая $r_0 = R + h$, приходим вновь к (36).

3) *Параболическая траектория* космического аппарата в соответствии с (29) будет при $k_1 = 1$, так как при этом $e = 1$. Из (19) при этом следует

$$k_1 = \frac{v^2 r_0}{2gR^2} = 1,$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}.$$

Скорость v_2 называется параболической скоростью. Космический аппарат, которому сообщена в начальный момент эта скорость, не возвратнтся на Землю.

При $h = 0$ получаем вторую космическую скорость

$$v_2 = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2 \textit{ км/сек.}$$

4) *Эллиптическая траектория* будет, согласно (29), при $0 < k_1 < 1$, так как $e < 1$. Единственное исключение $k_1 = 1/2$ и $\theta = 0$; в этом случае, как было показано, аппарат движется по круговой траектории. Скорость космического аппарата при этом должна находится в пределах

$$v_1 = \sqrt{gR} < v < v_2 = \sqrt{2gR}.$$

5) *Гиперболическая траектория* космического аппарата, согласно (29), будет при $k_1 > 1$, так как при этом $e > 1$. Скорость космического аппарата при этом должна быть

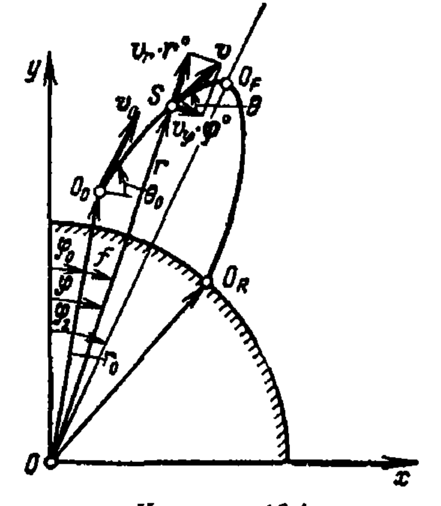
$$v < v_2 = \sqrt{2gR}.$$

Таким образом, параметр k_1 (равный отношению кинетической энергии к потенциалу) определяет характер траектории космического аппарата. Напомним, что ньютонов потенциал определяется равенством (3*)

$$U = f\frac{m}{r}.$$

Следовательно, если кинетическая энергия точки единичной массы меньше ньютонова потенциала, то точка не удаляется в бесконечность и будет описывать вокруг центра притяжения замкнутую траекторию, эллипс. Если же кинетическая энергия равна или больше ньютонова потенциала, то точка удалится в бесконечность по параболической или гиперболической траектории.

Задача 16.4. Космический аппарат, доставленный ракетой-носителем на высоту h над поверхностью Земли, имеет при дальнейшем кеплеровом движении начальную скорость, направленную под углом θ к местному горизонту (см. рисунок). Определить, при каком модуле начальной скорости $v_0 < v_2$ траектория аппарата пройдет вне Земли? Скорость v_2 — вторая космическая скорость *).



К задаче 16.4.

Решение. Из уравнения траектории при кеплеровом движении

$$r = \frac{p}{1 - e\cos(\varphi - \varphi_1)}$$

находим максимальное и минимальное значения радиуса-вектора, полагая $\cos(\varphi - \varphi_1) = \pm 1$, откуда

$$r_{max} = \frac{p}{1-e}, \quad r_{min} = \frac{p}{1+e}.$$

Траектории рассматриваемого аппарата в зависимости от величин v_0 и θ_0 могут пересекать поверхность Земли или ее не пересекать. Очевидно, что траектория будет располагаться вне поверхности Земли, если $r_{min} > R$, или

$$\frac{p}{1+e} > R.$$

*) Н. В. Бутенин, А. Г. Бессонов, Е. М. Морозов, Введение в динамику твердого тела, движущегося в поле силы земного притяжения. Основы космонавтики. Ленинградский институт авиационного приборостроения, 1965.

Полагая θ_0 заданным по условию, найдем минимальное значение v_{01}, при котором траектория аппарата будет траекторией искусственного спутника Земли. Это будет при

$$p = R(1+e),$$

или при

$$(p-R)^2 = e^2R^2.$$

Выразим p и e через начальные условия движения, согласно (20) и (29), предыдущей задачи. Тогда находим

$$(2k_1r_0\cos^2\theta_0 - R)^2 = [\sin^2\theta_0 + (1-2k_1)^2\cos^2\theta_0]R^2.$$

Раскрыв скобки и сократив на $4k_1\cos^2\theta_0$, не равное нулю, получим

$$k_1 = \frac{(r_0-R)R}{(r_0^2\cos^2\theta_0 - R^2)}$$

или, заменив параметр k_1 его значением (19) предыдущей задачи и учтя, что $r_0 = R+h$, имеем

$$v_{01} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}\cdot\sqrt{\frac{2Rh}{(R+h)^2\cos^2\theta_0 - R^2}}.$$

Если начальная скорость $v_0 > v_{01}$ и $\cos\theta_0 > \frac{R}{R+h}$, то траектория не пересечет поверхность Земли.

Если начальная скорость $v_0 < v_{01}$ или $\cos\theta_0 < \frac{R}{R+h}$, то траектория пересечет поверхность Земли и аппарат будет не искусственным спутником Земли, а баллистической ракетой.

Заметим, что при $h=0$ скорость v_{01} может существовать только при $\theta_0 = 0$. Раскрывая неопределенность под вторым радикалом, находим, что она равна единице и, следовательно,

$$v_0 \geqslant \sqrt{gR} = v_1,$$

где v_1 — первая космическая скорость.

Задача 16.5. Космический аппарат, движущийся под действием силы всемирного тяготения вблизи Земли, имеет в начальный момент радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ и скорость $\mathbf{v}_0$. Определить модуль скорости аппарата в любой момент времени.

Решение. Для нахождения модуля скорости в любой момент времени применим теорему об изменении кинетической энергии. Приращение кинетической энергии на элементарном перемещении равно элементарной работе силы тяготения:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -\frac{m\mu}{r^2}\,dr.$$

Сократив на массу m и проинтегрировав в пределах от начальной

скорости до скорости в произвольном месте траектории левую часть и от r_0 до r правую часть, находим

$$\int_{v_0}^{v} d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\int_{r_0}^{r} \frac{\mu}{r^2}\,dr$$

или

$$v^2 - v_0^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Таким образом, модуль скорости в любой точке траектории определяется формулой

$$v^2 = v_0^2 + 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = v_0^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \qquad (1)$$

Эта формула верна при движении аппарата по любой кеплеровой траектории: прямолинейной, круговой, эллиптической, параболической и гиперболической, так как при ее выводе никаких ограничений не вводилось.

Если траектория аппарата оканчивается на поверхности Земли, то модуль скорости в момент падения будет определяться формулой

$$v^2 = v_0^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right),$$

где R — радиус Земли.

При движении по круговой траектории, согласно (1), модуль скорости остается неизменным.

Задача 16.6. Определить наибольшую высоту полета космического аппарата, движущегося по любой из пяти кеплеровых траекторий.

Решение. Рассмотрим отдельно движение по каждой из кеплеровых траекторий.

Радиальная траектория. При движении космического аппарата по прямолинейной радиальной траектории аппарат достигает наибольшего удаления от Земли в тот момент, когда его скорость обращается в нуль. Положив в формуле (1) предыдущей задачи скорость v равной нулю, находим наибольшее удаление аппарата от центра Земли

$$r_{max} = \frac{r_0}{1 - \frac{v_0^2 r_0}{2gR^2}} = \frac{r_0}{1 - k_0}.$$

Здесь, как и ранее, отношение кинетической энергии в начальный момент к работе, которую надо затратить, чтобы перенести аппарат в бесконечность из начального положения, обозначено k_0. Максимальная высота полета над поверхностью Земли будет

$$h_{max} = r_{max} - R = \frac{r_0}{1 - k_0} - R;$$

при $k_0 \geqslant 1$ аппарат не возвратится на Землю.

Круговая траектория. В этом случае высота полета неизменна.

Эллиптическая траектория. При движении по эллиптической траектории минимальная высота называется перигеем, наибольшая высота — апогеем, если вся траектория лежит вне пределов Земли. Из уравнения траектории

$$r = \frac{p}{1 - e\cos(\varphi - \varphi_1)}$$

следует, что экстремальные значения радиуса-вектора будут при

$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \pm 1.$$

Следовательно,

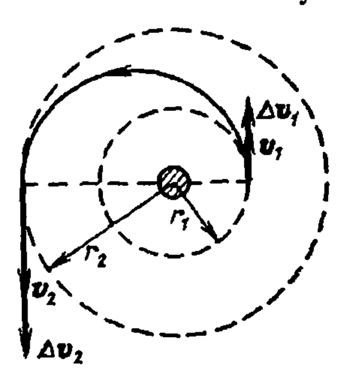
$$r_{max} = \frac{p}{1-e}, \qquad r_{min} = \frac{p}{1+e}.$$

Соответственно наибольшая и наименьшая высота над поверхностью Земли будут

$$h_{max} = \frac{p}{1-e} - R, \qquad h_{min} = \frac{p}{1+e} - R. \qquad (1)$$

Если траектория оканчивается на поверхности Земли, то высота полета изменяется от нуля до максимальной величины, определяемой той же формулой (1).

Параболическая и гиперболическая траектории. Если эти траектории располагаются вне пределов Земли, то наименьшая высота полета h_{min} также определяется формулой (1), а $h_{max} = \infty$. Если же эти траектории пересекаются с поверхностью Земли, то высота полета меняется от нуля до бесконечности, если движение начинается от Земли. Если же аппарат движется к Земле, то высота полета изменяется от бесконечности до нуля.



К задаче 16.7.

Задача 16.7. Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите радиуса r_1. Он должен быть переведен на новую круговую орбиту радиуса $r_2 > r_1$. Перелет с первой круговой орбиты на вторую совершается по траектории, являющейся половиной эллипса. Касательные к эллипсу и обеим круговым орбитам в точках соприкосновения совпадают. Этот перелет называется перелетом Хомана и производится путем приложения к спутнику мгновенного начального импульса Δv_1 и мгновенного конечного импульса Δv_2, совпадающих по направлению соответственно со скоростями v_1 и v_2. Определить величины Δv_1 и Δv_2 как функции радиусов r_1 и r_2.

Решение. Скорость спутника при движении по первой круговой орбите равна

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}. \qquad (1)$$

После сообщения спутнику импульса Δv_1 он движется по эллипсу, у которого перигей равен r_1, а апогей r_2.

Имеем для перигея и апогея значения

$$r_1=\frac{p}{1+e}, \quad r_2=\frac{p}{1-e}. \tag{2}$$

Исключив из системы (2) эксцентриситет e, находим

$$p=\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}. \tag{3}$$

С другой стороны, на основании теоремы о сохранении момента количества движения для двух крайних положений спутника на эллиптической орбите можно записать

$$(v_1+\Delta v_1)\,r_1=c, \tag{4}$$

$$v_2r_2=c. \tag{5}$$

Для нахождения c воспользуемся равенством (3) и соотношением

$$p=\frac{c^2}{\mu}. \tag{6}$$

Из (3) и (6) имеем

$$c=\sqrt{\frac{2\mu r_1r_2}{r_1+r_2}}. \tag{7}$$

Внеся в (4) найденные значения (7) и (1), получим

$$\Delta v_1=\sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_0}{r_1+r_2}}-1\right). \tag{8}$$

С другой стороны, из (5) с учетом (7) находим

$$v_2=\sqrt{\frac{2\mu r_1}{r_2\,(r_1+r_2)}}. \tag{9}$$

Чтобы перевести спутник с эллиптической траектории на круговую траекторию радиуса r_2, необходимо сообщить спутнику импульс Δv_2, определяемый из равенства

$$v_2+\Delta v_2=\sqrt{\frac{\mu}{r_2}}, \tag{10}$$

которым дается новая скорость спутника в движении по круговой орбите радиуса r_2. Внеся в равенство (10) значение v_2 из (9), находим искомый импульс

$$\Delta v_2=\sqrt{\frac{\mu}{r_2}}\left(1-\sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right). \tag{11}$$

Формулы (8) и (11) определяют минимальные импульсы, обеспечивающие перелет с одной круговой орбиты на другую.

§ 2. Динамика точки переменной массы

Телом переменной массы называется тело, масса которого изменяется в процессе движения вследствие отделения от него или присоединения к нему точек. Будем считать, что после присоединения точки становятся точками рассматриваемого тела, после отделения точки перестают взаимодействовать с телом и исключаются из дальнейшего рассмотрения. Таким образом, присоединяющиеся и отделяющиеся точки не возникают вновь и не исчезают, а только лишь вводятся или исключаются из рассмотрения.

Будем полагать, что массы присоединяющихся и отделяющихся точек в единицу времени малы по сравнению с массой тела и что процесс присоединения и отделения точек происходит непрерывно.

Основоположник динамики точки переменной массы И. В. Мещерский так характеризует этот процесс. Будем полагать, что «... к системе непрерывно присоединяются частицы бесконечно малых масс таким образом, что скорости точек системы изменяются непрерывно, тогда как скорости частиц изменяются на конечные величины в момент их присоединения к системе».

Динамика точки переменной массы с развитием реактивной техники приобрела особо важное значение.

Если можно пренебречь вращательными элементами движения тела по сравнению с кинематическими элементами его поступательного движения, то вместо динамики тела переменной массы рассматривают динамику точки переменной массы. Если же кинематические вращательные элементы должны учитываться, то рассматривается динамика тела переменной массы.

Для точки переменной массы основной закон динамики записывается в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}. \tag{1*}$$

где m — мгновенное значение массы материальной точки; $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки, $\mathbf{F}$ — главный вектор внешних сил, действующих на точку переменной массы, $\mathbf{\Phi}$ — реактивная сила равная

$$\mathbf{\Phi} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_r. \tag{2*}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — абсолютная скорость присоединяющихся или отделяющихся частиц, $\mathbf{v}_r$ — их относительная скорость, dm/dt — секундное изменение массы. Уравнение (1*) называется уравнением Мещерского и формулируется так: «уравнение движения точки переменной массы имеет вид уравнения движения точки постоянной массы, если к приложенным к точке силам добавить реактивную силу».

Отметим два частных случая. Если абсолютная скорость присоединяющихся частиц равна нулю, то основной закон динамики точки

переменной массы имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}. \qquad (3^*)$$

Если относительная скорость присоединяющихся или отделяющихся частиц равна нулю, то уравнение (1*) принимает вид

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}. \qquad (4^*)$$

Следует учитывать, что и в (3*) и в (4*) масса является переменной.

При решении задач динамики тела переменной массы применяются теорема об изменении количества движения и теорема об изменении главного момента количества движения с учетом изменения массы тела и его моментов инерции.

Решение задач в этом разделе надо вести в следующей последовательности:

1) определить из условия задачи, относится ли она к динамике точки или к динамике тела переменной массы;

2) если задача относится к динамике точки переменной массы, то, применяя уравнение Мещерского, составить дифференциальное уравнение движения точки переменной массы, проинтегрировать его и определить произвольные постоянные интегрирования;

3) если задача относится к динамике тела переменной массы, то, применяя теорему об изменении количества движения и теорему об изменении главного момента количества движения, получить дифференциальные уравнения движения. Проинтегрировать их и определить произвольные постоянные интегрирования.

Задача 16.8. Ракета с запасом топлива имеет начальную массу m_0. Топливо сжигается с постоянным расходом, так что $dm/dt=-c$, где m — мгновенная масса ракеты. Продукты сгорания выбрасываются с постоянной относительно ракеты скоростью v_r. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость v ракеты, движущейся вертикально вверх, в произвольный момент времени t. Ускорение силы тяжести g считать постоянным.

Решение. Рассматривая ракету как материальную точку переменной массы, запишем для нее уравнение Мещерского

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}+\frac{dm}{dt}\boldsymbol{v}_r.$$

В проекциях на вертикальную ось, направленную вверх, это даст

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-\frac{dm}{dt}v_r, \qquad (1)$$

поскольку сила тяжести и относительная скорость отходящих газов направлены вниз. Имея в виду, что $dm/dt=-c$ и, следовательно,

$m = m_0 - ct$, запишем уравнение (1) в виде

$$(m_0 - ct)\frac{dv}{dt} = -(m_0 - ct)g + cv_r$$

или

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{cv_r}{m_0 - ct}.$$

Проинтегрировав и вспомнив, что v_r постоянна, находим

$$\int_{v_0}^{v} dv = -g\int_0^t dt - v_r\int_0^t \frac{d(m_0 - ct)}{m_0 - ct},$$

где через v_0 обозначена начальная скорость ракеты.

Тогда

$$v - v_0 = -gt - v_r \ln(m_0 - ct) + v_r \ln m_0.$$

Окончательно запишем

$$v = v_0 - gt + v_r \ln\frac{m_0}{m_0 - ct}.$$

Задача 16.9. В условиях предыдущей задачи, считая, что ракета стартует с поверхности Земли с нулевой начальной скоростью, найти максимальную высоту подъема ракеты и время, необходимое для достижения этой высоты. Принять, что отношение веса первоначального заряда топлива к стартовому весу m_0 ракеты равно α.

Решение. Для удобства интегрирования перепишем полученную в задаче 16.8 формулу для скорости ракеты в виде

$$v = \frac{ds}{dt} = -v_r \ln\left(1 - \frac{c}{m_0}t\right) - gt, \tag{1}$$

где s — путь, пройденный ракетой, и учтено, что $v_0 = 0$.

Проинтегрировав уравнение (1), найдем

$$s = -\int_0^t v_r \ln\left(1 - \frac{c}{m_0}t\right)dt - \int_0^t gt\,dt =$$

$$= \frac{v_r m_0}{c}\int_0^t \ln\left(1 - \frac{c}{m_0}t\right)d\left(1 - \frac{c}{m_0}t\right) - \frac{gt^2}{2}.$$

Поскольку $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$, мы получим

$$s = \frac{v_r m_0}{c}\left[\left(1 - \frac{c}{m_0}t\right)\ln\left(1 - \frac{c}{m_0}t\right) - \left(1 - \frac{c}{m_0}t\right) - \ln 1 + 1\right] - \frac{gt^2}{2}.$$

Окончательно

$$s = v_r\left(t + \frac{m_0 - ct}{c}\ln\frac{m_0 - ct}{m_0}\right) - \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Уравнение (2) определяет закон движения ракеты на активном участке траектории (при работающем двигателе). Время t_1 полета на активном участке траектории равно времени сгорания всего запаса топлива, т. е.

$$ct_1 = \alpha m_0,$$

откуда

$$t_1 = \alpha \frac{m_0}{c}. \tag{3}$$

Скорость ракеты в конце активного участка

$$v_1 = -v_r \ln\left(1 - \frac{c}{m_0} t_1\right) - g t_1 = -v_r \ln(1-\alpha) - g\alpha \frac{m_0}{c}, \tag{4}$$

а высота подъема

$$s_1 = v_r\left(t_1 + \frac{m_0 - ct_1}{c} \ln \frac{m_0 - ct_1}{m_0}\right) - \frac{gt_1^2}{2} =$$
$$= v_r\left[\alpha \frac{m_0}{c} + (1-\alpha)\frac{m_0}{c} \ln(1-\alpha)\right] - \frac{g\alpha^2 m_0^2}{2c^2}.$$

Далее на пассивном участке траектории ракета движется, как свободное тело брошенное вертикально вверх со скоростью v_1. Поэтому скорость ракеты определяется уравнением

$$v = v_1 - g(t - t_1),$$

а пройденный путь

$$s = s_1 + v_1(t - t_1) - \frac{g}{2}(t - t_1)^2.$$

Время t_2 достижения ракетой наивысшей точки находится из условия $v = 0$, т. е.

$$v_1 - g(t_2 - t_1) = 0,$$

откуда с учетом (3) и (4) получим

$$t_2 = t_1 + \frac{v_1}{g} = \alpha \frac{m_0}{c} - \frac{v_r}{g} \ln(1-\alpha) - \alpha \frac{m_0}{c} = -\frac{v_r}{g} \ln(1-\alpha).$$

Максимальная высота подъема ракеты $s_2 = s(t_2)$ равна

$$s_2 = v_r\alpha \frac{m_0}{c} + v_r \frac{m_0}{c}(1-\alpha)\ln(1-\alpha) - \frac{g\alpha^2 m_0^2}{2c^2} +$$
$$+ \left[v_r \ln(1-\alpha) + g\alpha \frac{m_0}{c}\right] \cdot \left[\frac{v_r}{g} \ln(1-\alpha) + \alpha \frac{m_0}{c}\right] -$$
$$- \frac{g}{2}\left[\frac{v_r}{g} \ln(1-\alpha) + \alpha \frac{m_0}{c}\right]^2 = v_r\alpha \frac{m_0}{c} + v_r \frac{m_0}{c}(1-\alpha)\ln(1-\alpha) -$$
$$- \frac{g\alpha^2 m_0^2}{2c^2} + \frac{g}{2}\left[\frac{v_r}{g} \ln(1-\alpha) + \alpha \frac{m_0}{c}\right]^2.$$

Раскрывая квадратные скобки и приводя подобные члены, найдем

$$s_2 = v_r\alpha\frac{m_0}{c} + v_r\frac{m_0}{c}\ln(1-\alpha) + \frac{v_r^2}{2g}\ln^2(1-\alpha).$$

Задача 16.10. Запуск ракеты производится с поверхности Земли вертикально вверх. Стартовая масса ракеты m_0. Определить скорость ракеты к моменту полного сгорания топлива, если масса ракеты без топлива $m_к$. Сопротивлением воздуха и силой тяготения к Земле пренебречь. Эффективная скорость истечения газа из сопла реактивного двигателя постоянна и равна $V_э$.

Решение. Эту задачу впервые решил К. Э. Циолковский. Уравнение Мещерского в этом случае запишется так:

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}v_э, \tag{1}$$

где m — масса ракеты — является непрерывной и дифференцируемой функцией времени, $w = dv/dt$ — ускорение ракеты, $dm/dt < 0$ — секундный расход массы, $V_э$ — эффективная скорость истечения газов.

Под эффективной скоростью понимается следующее. Тяга двигателя T при движении в пустоте складывается из реактивной силы Φ и силы, вызванной давлением газового потока на срезе сопла

$$T = \Phi + Sp,$$

где S — площадь выходного сечения сопла, p — давление в газовом потоке на выходе из сопла. Заменяя реактивную силу ее значением, находим

$$T = \frac{dm}{dt}v_r + Sp = \frac{dm}{dt}\left(v_r + Sp\frac{dt}{dm}\right),$$

где v_r — относительная скорость истечения газов.

Эффективной скоростью называется сумма, заключенная в скобки

$$v_э = v_r + Sp\cdot\frac{dt}{dm}. \tag{2}$$

Направим ось z вертикально вверх. Тогда, спроектировав равенство (1) на ось z и учтя направления скоростей v и $v_э$, получим

$$dv = -v_э\frac{dm}{m}.$$

Проинтегрировав, получим (по условию $v_э = \text{const}$)

$$v = -v_э\ln m + C, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная интегрирования.

Так как при $t = 0$ $m = m_0$, $v_0 = 0$, то, подставив эти значения переменных в (3), найдем произвольную постоянную

$$C = v_э\ln m_0.$$

Внеся значение C в уравнение (3), получим

$$v = -v_э \ln \frac{m}{m_0}. \qquad (4)$$

Это — формула Циолковского. Она дает значение скорости в зависимости от количества сгоревшего топлива в ракете.

Пусть в некоторый момент времени $t = t_к$ топливо в ракете полностью сгорело. Обозначим массу ракеты без топлива через $m_к$, тогда скорость ракеты к концу сгорания топлива, согласно (4), будет

$$v_к = -v_э \ln \frac{m_к}{m_0}. \qquad (5)$$

Отношение массы ракеты с топливом к массе ракеты без топлива называется «числом Циолковского»:

$$\frac{m_0}{m_к} = z. \qquad (6)$$

Формулу (5) можно переписать в виде

$$v_к = v_э \ln z. \qquad (7)$$

Эта формула определяет максимальную скорость, которую сообщит ракете реактивный двигатель в момент полного сгорания топлива.

Соотношение (7) позволяет сделать следующие выводы. Максимальная скорость пропорциональна эффективной скорости истечения продуктов сгорания и натуральному логарифму от числа Циолковского. Конечная скорость ракеты не зависит от того, по какому закону происходит сгорание топлива, медленно или быстро. Однако ускорение ракеты тем больше, чем быстрее сгорает топливо. Таким образом, чем быстрее сгорает топливо, тем раньше ракета достигнет конечной скорости. Следует иметь в виду, что прочность ракеты, работоспособность приборов управления и приборов, предназначенных для научных исследований, не позволяет допускать весьма большие ускорения. Еще большие ограничения на ускорения накладывает присутствие в ракете человека.

Для получения большой конечной скорости необходимо увеличивать эффективную скорость истечения газов или увеличивать число Циолковского. Воспользуемся формулой (7) и подсчитаем, каково должно быть число Циолковского для достижения конечной скорости $v_k = 9000$ *м/сек*, если эффективная скорость $v_э = 2400$ *м/сек*. Имеем

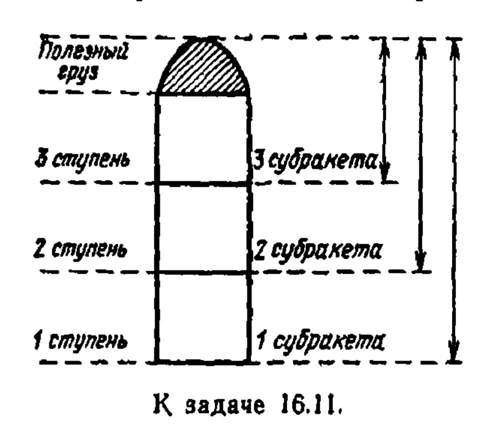
$$z = e^{v_к/v_э} = e^{9000/2400} \approx e^{3,75} \approx 42,5.$$

Таким образом, масса корпуса ракеты должна составлять 1/42,5 стартовой массы ракеты. Соответственно топливо должно составлять 41,5/42,5 стартовой массы ракеты. Такое соотношение между массами корпуса ракеты и топлива недостижимо для современной техники. Между тем, если учесть потери на преодоление не учтенных

в нашем расчете сопротивления воздуха и силы притяжения к Земле, то конечная скорость 9000 *м/сек* снизится и не будет превышать первой космической скорости, необходимой для создания искусственного спутника Земли.

Таким образом, достижение первой космической скорости с помощью одноступенчатой ракеты при современных технических средствах практически невозможно. Трудности, возникающие при этом, могут быть преодолены применением многоступенчатых ракет.

Задача 16.11. Запуск многоступенчатой ракеты производится с поверхности Земли вертикально вверх. Эффективная скорость истечения газа из сопла реактивного двигателя постоянна, одинакова для всех ступеней и равна $v_э$. После израсходования топлива в соответствующей ступени она отделяется от ракеты.



К задаче 16.11.

Пренебрегая притяжением к Земле и сопротивлением воздуха, определить конечную скорость после использования всех ступеней, если известны числа Циолковского для каждой субракеты.

Примечание. Многоступенчатая ракета состоит из полезного груза (искусственного спутника Земли или космического летательного аппарата) и ступеней, каждая из которых включает двигатели, топливо и приборы управления. Субракетой называется система, состоящая из работающей ступени и всех неработающих ступеней вместе с полезным грузом. Для данной субракеты масса всех неработающих ступеней и конечного груза является полезным грузом. Таким образом, каждая субракета рассчитывается как одноступенчатая ракета, по формулам, приведенным в предыдущей задаче (см. рисунок).

Решение. Для определения скорости ракеты, после окончания действия двигателей первой ступени, применим полученную в предыдущей задаче формулу Циолковского (7)

$$v_{к1} = v_{э1} \ln z_1,$$

где $v_{к1}$ — скорость ракеты в момент отделения первой отработанной ступени, $v_{э1}$ — эффективная скорость истечения в первой ступени, z_1 — число Циолковского для первой субракеты.

Аналогично находим скорость ракеты в момент отделения второй ступени

$$v_{к2} = v_{к1} + v_{э2} \ln z_2 = v_{э1} \ln z_1 + v_{э2} \ln z_2.$$

Здесь $v_{э2}$ — эффективная скорость истечения во второй ступени, z_2 — число Циолковского для второй субракеты. Продолжая расчет,

найдем скорость космического аппарата после отделения последней ступени

$$v_{кn} = v_{э1} \ln z_1 + v_{э2} \ln z_2 + \ldots + v_{эn} \ln z_n.$$

Если положить в соответствии с условием, что эффективные скорости истечения равны для всех ступеней, то формула (7) из предыдущей задачи принимает вид

$$v_к = v_э \ln z_1 z_2 \ldots z_n \equiv v_э \ln z, \qquad (1)$$

где $z = z_1 z_2 \ldots z_n$.

Заметим, что в случае, если числа Циолковского для всех субракет одинаковы, то, обозначив их общее значение через z_i, мы сможем записать равенство (1) в виде

$$v_к = n v_э \ln z_i.$$

Следовательно, в этом случае конечная скорость пропорциональна числу ступеней.

Найдем число Циолковского z_i, которое должна иметь каждая субракета для того, чтобы космический аппарат получил вторую космическую скорость $v_к = 11\,200$ *м/сек*, полагая, как и в предыдущей задаче, $v_э = 2400$ *м/сек*. Для одноступенчатой ракеты имеем $z_i = e^{11\,200/2400} \approx 106{,}8$. Для двухступенчатой ракеты $z_i = e^{11\,200/2 \cdot 2400} \approx 10{,}4$. Для трехступенчатой ракеты $z_i = e^{11\,200/3 \cdot 2400} \approx 4{,}76$. Сопоставляя эти значения числа Циолковского для одноступенчатой и многоступенчатых ракет, видим, что использование многоступенчатых ракет резко снижает число Циолковского, позволяя инженерам создать реальную конструкцию.

Задача 16.12. Ракета массы m_0 стартует вертикально с поверхности Земли. Относительная (эффективная) скорость истечения газов $v_э$ постоянна. Пренебрегая сопротивлением воздуха и учитывая силу тяготения к Земле, найти закон изменения массы ракеты с течением времени, если ускорение ракеты на активном участке траектории поддерживается постоянным, равным $w = bg$, где g ускорение силы тяжести на поверхности Земли, $b = \mathrm{const}$ — коэффициент допустимой перегрузки (перегрузкой называется отношение максимального ускорения объекта к ускорению силы тяжести).

Решение. Для составления дифференциального уравнения движения ракеты воспользуемся уравнением Мещерского. Силу тяготения к Земле можно представить формулой

$$F = -\frac{mgR^2}{(R+h)^2},$$

где m — масса ракеты в произвольный момент времени, R — радиус Земли, h — расстояние ракеты от поверхности Земли в данный момент времени.

Тогда уравнение Мещерского запишется в виде

$$m\cdot\frac{dv}{dt}=-\frac{mgR^2}{(R+h)^2}-v_э\frac{dm}{dt}, \tag{1}$$

где v — абсолютная скорость ракеты, $\Phi=-v_э\frac{dm}{dt}$ — проекция на вертикаль реактивной силы, причем $\frac{dm}{dt}<0$. Согласно условию ускорение ракеты

$$w=\frac{dv}{dt}=bg. \tag{2}$$

Следовательно, путь пройденный ракетой от поверхности Земли, найдется интегрированием (2) при начальных условиях: при $t=0$, $h_0=0$, $v_0=0$. Тогда из (2) находим

$$h=\frac{bgt^2}{2}. \tag{3}$$

Внеся значения (2) и (3) в дифференциальное уравнение (1), получим

$$bg=-\frac{gR^2}{\left(R+\frac{bgt^2}{2}\right)^2}-\frac{v_э}{dt}\frac{dm}{m}$$

или, разделяя переменные,

$$-v_э\frac{dm}{m}=bg\,dt+\frac{gR^2}{\left(R+\frac{bgt^2}{2}\right)^2}dt.$$

Проинтегрировав, получим

$$-v_э\ln m+C=$$
$$=bgt+gR^2\left[\frac{t}{2R\left(R+\frac{bg}{2}t^2\right)}+\frac{1}{2R^2}\sqrt{\frac{2R}{bg}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{bg}{2R}}\,t\right)\right]. \tag{4}$$

Подставив начальные условия при $m=m_0$, $t=0$, определим постоянную интегрирования:

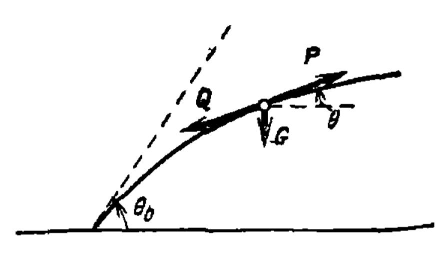
$$C=v_э\ln m_0.$$

Тогда из (4) найдем

$$-v_э\ln\frac{m}{m_0}=bgt+gR^2\left[\frac{t}{2R\left(R+\frac{bg}{2}t^2\right)}+\frac{1}{2R^2}\sqrt{\frac{2R}{bg}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{bg}{2R}}\cdot t\right)\right].$$

Это уравнение и дает закон изменения массы ракеты с течением времени.

Задача 16.13. Составить уравнения движения ракеты, запущенной под углом θ_0 к горизонту, в проекциях на касательную и нормаль к траектории. Найти закон изменения угла θ наклона траектории к горизонту, считая, что касательное ускорение ракеты постоянно. Вес ракеты $G=mg$, где m — переменная масса ракеты, а g — ускорение силы тяжести.



К задаче 16.13.

Реактивная сила P и сила сопротивления воздуха Q направлены по касательной к траектории.

Решение. Спроектировав основное уравнение динамики на касательную и нормаль к траектории (см. рисунок), получим

$$m\frac{dv}{dt}=P-Q-G\sin\theta, \tag{1}$$

$$m\frac{v^2}{r}=G\cos\theta, \tag{2}$$

где r — радиус кривизны траектории.

Поскольку кривизна траектории равна

$$\frac{1}{r}=\left|\frac{d\theta}{ds}\right|=\frac{\left|\frac{d\theta}{dt}\right|}{\left|\frac{ds}{dt}\right|}=\frac{1}{v}\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$

и в данном случае $d\theta/dt<0$, то

$$\frac{v^2}{r}=-v\frac{d\theta}{dt}.$$

С учетом этого соотношения запишем уравнения (1) и (2) движения ракеты в виде

$$\frac{dv}{dt}=p-q-g\sin\theta, \tag{3}$$

$$v\frac{d\theta}{dt}=-g\cos\theta, \tag{4}$$

где $p=P/m$ — реактивная сила, отнесенная к единице массы, $q=Q/m$ — сила сопротивления воздуха, отнесенная к единице массы. При $dv/dt=w=\text{const}$ уравнение (4) легко интегрируется и дает искомый закон изменения угла θ. Действительно, это уравнение можно записать в виде

$$\frac{d\theta}{\cos\theta}=-\frac{g}{w}\cdot\frac{w\,dt}{v}.$$

Преобразуя и интегрируя, получим

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{g}{w}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v},$$

где v_0 — скорость ракеты в момент схода с направляющей.

Поскольку $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$, мы найдем

$$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{g}{w}(\ln v - \ln v_0).$$

Пропотенцировав, запишем окончательно

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_0}{2}\right)} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{g/w} \qquad (5)$$

Уравнение (5) показывает, что изменение направления скорости ракеты на активном участке траектории зависит от отношения скоростей в конце и в начале дуги v/v_0 и отношения ускорений g/w.

Задача 16.14. Весомая цепь, собранная в клубок, лежит на краю горизонтального стола. Найти скорость свешивающегося со стола конца цепи, считая, что в начальный момент длина этого конца равна 1, а скорость его равна 0.

Решение. Обозначим через x длину, а через m массу свешивающейся и движущейся части цепи. Эта масса непрерывно возрастает за счет присоединения элементов dm части цепи, лежащей на столе. При этом скорость присоединяющихся элементов возрастает в момент присоединения от нуля до скорости движущейся части. Поэтому в данной задаче можно воспользоваться уравнением (3*), которое в проекции на вертикальную ось x имеет вид

$$\frac{d}{dt}(mv) = F. \qquad (1)$$

Обозначив через γ вес единицы длины цепи, имеем: $m = \frac{\gamma}{g}x$, $v = \dot{x}$, $F = \gamma x$. Уравнение (1) дает

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma}{g}x\dot{x}\right) = \gamma x$$

или

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 = gx. \qquad (2)$$

Это нелинейное уравнение второго порядка не содержит явно независимой переменной — времени t и поэтому допускает понижение порядка на единицу. Здесь удобнее всего за новую неизвестную функ-

цию принять $u=\dot{x}^2$, а за новую независимую переменную взять x. Тогда

$$\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\dot{x}^2)=\frac{1}{2}\frac{du}{dx}$$

и уравнение (2) приводится к линейному уравнению первого порядка

$$\frac{1}{2}x\frac{du}{dx}+u=gx,$$

или

$$\frac{du}{dx}+\frac{2}{x}u=2g. \qquad (3)$$

Представим переменную u как произведение двух функций

$$u=v\cdot w. \qquad (4)$$

Тогда

$$u'=v'w+vw'.$$

Внеся эти значения в уравнение (3), получим

$$v'w+\left(w'+\frac{2}{x}w\right)v=2g. \qquad (5)$$

Для нахождения переменных v и w одну из них можно выбрать произвольно. Полагаем

$$w'=-\frac{2}{x}w, \qquad (6)$$

или $dw/w=-2dx/x$, откуда $\ln w=\ln(1/x^2)$ и, наконец,

$$w=\frac{1}{x^2}. \qquad (7)$$

Внеся (6) и (7) в уравнение (5), получим

$$\frac{dv}{dx}\cdot\frac{1}{x^2}=2g.$$

Следовательно,

$$v=\frac{2}{3}gx^3+C$$

и, согласно (4),

$$u=\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{3}gx^3+C\right)=\frac{2}{3}gx+\frac{C}{x^2}.$$

Возвратившись к исходной переменной, находим

$$\dot{x}^2=\frac{C}{x^2}+\frac{2}{3}gx.$$

Подставив в это уравнение начальные условия: при $x=1$, $\dot{x}=0$, находим произвольную постоянную интегрирования

$$C=-\frac{2}{3}g.$$

Тогда

$$\dot{x}^2=\frac{2}{3}g\left(x-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{3}g\frac{x^3-1}{x^2}$$

или

$$\dot{x}=\sqrt{\frac{2}{3}g}\cdot\frac{\sqrt{x^3-1}}{x}.$$

Это была исторически первая задача динамики переменной массы, решенная в 1857 г. английским математиком Кэйли.

Задача 16.15. Найти закон изменения массы во времени для ракеты, движущейся на активном участке траектории с постоянным ускорением a. Считать, что движение происходит в пустоте при отсутствии силы тяжести.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся формулой Циолковского, полученной в задаче 16.10 (уравнение (4)):

$$v=-v_э\ln\frac{m}{m_0}, \qquad (1)$$

где $v_э$ — постоянная эффективная скорость истечения, m_0 — начальное значение массы ракеты, m — текущее значение массы ракеты, v — скорость ракеты.

В данной задаче $v(0)=0$ и $a=dv/dt=\text{const}$. Поэтому $v=at$ и уравнение (1) примет вид

$$\ln\frac{m}{m_0}=-\frac{at}{v_э}.$$

Пропотенцировав, найдем

$$\frac{m}{m_0}=e^{-at/v_э};$$

или, окончательно,

$$m=m_0e^{-at/v_э}.$$

ГЛАВА XVII

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Первые интегралы уравнений движения. Обобщенный интеграл энергии. Циклические координаты. Функция Рауса

Напомним, что движение голономной материальной системы с s степенями свободы, находящейся под действием потенциальных сил, описывается системой s уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{1*}$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$; здесь q_i — обобщенная координата, $\dot{q}_i$ — обобщенная скорость, L — функция Лагранжа, причем $L = T - \Pi$, где T — кинетическая, а Π — потенциальная энергии материальной системы.

Уравнения Лагранжа являются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка и представляют собой, вообще говоря, зависимости вида

$$f_j(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t) = 0, \tag{2*}$$

где $j = 1, 2, \ldots, s$. Поэтому для определения уравнений движения $q_i = q_i(t)$ приходится интегрировать систему дифференциальных уравнений второго порядка.

В этом параграфе рассмотрены случаи, когда возможно, минуя интегрирование уравнений Лагранжа, непосредственно получить все или некоторые из первых интегралов, т. е. уравнения

$$\varphi_j(\dot{q}_i, q_i, t, C_i) = 0, \tag{3*}$$

где $j = 1, 2, \ldots, s$, а C_i — постоянные интегрирования.

В этих случаях задача значительно упрощается, ибо для нахождения уравнений движения $q_j = q_j(t, C_i, C_i')$, вместо интегрирования системы (2*) второго порядка, остается проинтегрировать систему (3*) первого порядка.

К числу наиболее распространенных методов определения первых интегралов относятся:

а) применение *обобщенного интеграла энергии*,

б) использование *циклических координат*.

а) Применение обобщенного интеграла энергии. Рассмотрим голономную материальную систему, находящуюся под действием потенциальных сил. Ее кинетическая энергия T зависит, вообще говоря, от обобщенных скоростей, обобщенных координат и времени, т. е.

$$T = T(\dot{q}_i, q_i, t),$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$, а s — число степеней свободы. Кинетическую энергию T можно представить в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{4*}$$

где T_2, T_1 и T_0 являются однородными функциями обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, причем T_2 — второй степени, T_1 — первой степени, а T_0 — нулевой степени, т. е. $T_0 = T_0(q_i, t)$. При этом, вообще говоря, T_2 и T_1 также зависят от обобщенных координат q_i и времени t.

Если связи голономны, а кинетическая энергия (4*) явно от времени не зависит (это всегда справедливо при стационарных связях, но может быть и при нестационарных связях; см., например, задачу 17.2), то имеет место *обобщенный интеграл энергии:*

$$T_2 - T_0 + \Pi = \text{const}, \tag{5*}$$

который иногда называют *интегралом Якоби.*

Обобщенный интеграл энергии не является физическим интегралом энергии, т. е. законом сохранения механической энергии $T + \Pi = C$, ибо $T \neq T_2 - T_0$, а вычисляется по формуле (4*). Член T_0 стоит в (5*) со знаком минус, а член T_1, линейно зависящий от обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, в (5*) вообще не входит. Он называется иногда *гироскопическим членом* кинетической энергии. Только в случае стационарных связей $T_1 = T_0 = 0$. Тогда формула (4*) принимает вид $T = T_2$. При этом, как следует из (5*), обобщенный интеграл энергии становится законом сохранения механической энергии:

$$T + \Pi = \text{const}. \tag{6*}$$

Итак, закон сохранения механической энергии (6*) имеет место для материальных систем, подчиненных голономным и стационарным связям и находящимся под действием потенциальных сил, не зависящих от времени.

б) Циклические координаты, функция Рауса. *Циклическими* называются обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_l$, не входящие явно в выражение кинетической энергии T, которым соответствуют обобщенные силы, равные нулю: $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_l = 0$.

Если не все активные силы потенциальны, то пользуются уравнениями Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \tag{7*}$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$.

Допустим, что первые l обобщенных координат являются циклическими. Тогда $Q_i=0$, $\frac{\partial T}{\partial q_i}=0$, где $i=1, 2, \ldots, l$ и уравнения (7*) принимают вид $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=0$. Отсюда следует:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\alpha_i=\text{const}, \tag{8*}$$

где $i=1, 2, \ldots, l$.

Уравнения (8*) являются *первыми интегралами уравнений движения*. Их число равно числу циклических координат.

Итак, при наличии циклических координат частные производные кинетической энергии по соответствующим циклическим обобщенным скоростям постоянны. Эти частные производные называют *обобщенными импульсами*. Из формулы (8*) следует, что обобщенные импульсы, соответствующие циклическим координатам, постоянны.

Так, если материальная система имеет s степеней свободы при наличии l циклических координат $q_1, q_2, \ldots, q_l$, то можно, минуя интегрирование, непосредственно найти l первых интегралов (8*):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=\alpha_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}=\alpha_2, \ \ldots, \ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}=\alpha_l. \tag{9*}$$

Постоянные α_1; $\alpha_2, \ldots, \alpha_l$ следует определить с помощью начальных условий движения.

При наличии l первых интегралов (9*) необходимо интегрировать уже не s, а только $s-l$ уравнений Лагранжа второго рода, соответствующих нециклическим координатам.

Для непосредственного составления этих уравнений удобно пользоваться *функцией Рауса*

$$R=\sum_{k=1}^{l}\alpha_k\dot{q}_k-T. \tag{10*}$$

В выражении (10*) из кинетической энергии T, с помощью первых интегралов (9*), исключены обобщенные циклические скорости $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_l$.

При наличии функции Рауса R уравнения Лагранжа для нециклических координат имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial R}{\partial q_i}=Q_i, \tag{11*}$$

где $i=l+1, l+2, \ldots, s$.

Таким образом, с помощью функции Рауса удается из уравнений Лагранжа исключить циклические координаты (способ игнорирования координат).

В частном случае потенциальных сил $Q_i=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$. Так как обобщенные силы, соответствующие циклическим координатам, по условию равны нулю, то $\partial\Pi/\partial q_i=0$, т. е. циклические координаты q_i явно

не входят в выражение потенциальной энергии, а значит, и в выражение функции Лагранжа $L = T - \Pi$ (напомним, что, по определению, кинетическая энергия явно не зависит от циклических координат).

Итак, *в случае потенциальных сил циклические координаты q_i явно не входят в выражение функции Лагранжа*, т. е. $\partial L/\partial q_i = 0$. При этом уравнения (1*) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Отсюда следуют первые интегралы уравнений движения

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \alpha_i = \text{const}.$$

Так, если материальная система, на которую действуют только потенциальные силы, имеет s степеней свободы при наличии l циклических координат $q_1, q_2, \ldots, q_l$, то можно, минуя интегрирование, непосредственно найти l первых интегралов:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \alpha_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \alpha_2, \ \ldots, \ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \alpha_l \tag{12*}$$

(нетрудно видеть, что формулы (9*) и (12*) тождественны, так как потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей).

Для остальных $s - l$ координат можно с помощью функции Рауса R непосредственно составить $s - l$ уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \tag{13*}$$

где $i = l+1, l+2, \ldots, s$, а функция Рауса имеет вид

$$R = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \dot{q}_k - L. \tag{14*}$$

Здесь из функции Лагранжа L с помощью формул (12*) исключены циклические скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_l$.

В случае материальной системы, на которую действуют потенциальные силы, непосредственное составление первых интегралов уравнений Лагранжа для циклических координат, а также составление с помощью функции Рауса уравнений Лагранжа для нециклических координат, рекомендуется выполнять в следующем порядке:

1) выяснить число степеней свободы s материальной системы и выбрать соответствующие обобщенные координаты;

2) составить выражение кинетической энергии T;

3) составить выражение потенциальной энергии Π;

4) определить функцию Лагранжа $L = T - \Pi$;

5) при наличии l циклических координат $q_1, q_2, \ldots, q_l$, т. е, координат, явно не входящих в выражение функции Лагранжа L составить с помощью формул (12*) l соответствующих первых интегралов;

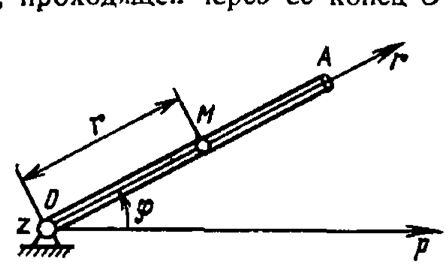
6) решить систему уравнений (12*) относительно циклических скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_l$, выразив их в зависимости от времени t, нециклических координат $q_{l+1}, q_{l+2}, \ldots, q_s$, их производных по времени $\dot{q}_{l+1}, \dot{q}_{l+2}, \ldots, \dot{q}_s$ и постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$;

7) подставить циклические скорости, найденные в предыдущем пункте, в функцию Рауса (14*);

8) составить уравнения Лагранжа (13*) для $s-l$ нециклических координат $q_{l+1}, q_{l+2}, \ldots, q_s$.

Число уравнений п. 8) может быть уменьшено на единицу за счет применения обобщенного интеграла энергии (5*) (если функция Лагранжа L не зависит явно от времени), либо закона сохранения механической энергии (6*) (при наличии стационарных связей). Так, если к материальной системе с двумя степенями свободы, имеющей одну циклическую координату, можно применить обобщенный интеграл энергии, то оба первых интеграла можно непосредственно получить без составления и интегрирования уравнений Лагранжа второго рода.

Задача 17.1. Трубка OA может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси z, проходящей через ее конец O (на рисунке показан вид сверху). Внутри трубки находится шарик M массы m. Момент инерции трубки относительно оси z равен I_z. Шарик считать точечной массой. Силами сопротивления пренебречь. Принять в качестве обобщенных полярные координаты r и φ.



К задаче 17.1.

Показать, что координата φ является циклической. Найти первые интегралы уравнений движения. Составить с помощью функции Рауса уравнение Лагранжа для нециклической координаты r.

Решение. Материальная система имеет две степени свободы. Обобщенными координатами по условию являются полярные координаты r и φ (см. рисунок).

Кинетическая энергия системы равна

$$T = T_{\text{тр}} + T_{\text{ш}}, \tag{1}$$

где $T_{\text{тр}}$ — кинетическая энергия трубки, а $T_{\text{ш}}$ — шарика. Имеем

$$T_{\text{тр}} = \frac{1}{2} I_z\dot{\varphi}^2, \quad T_{\text{ш}} = \frac{1}{2} m(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) \tag{2}$$

(здесь использована формула, выражающая квадрат скорости точки в полярных координатах: $v^2 = r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2$).

Внеся (2) в (1), запишем

$$T=\frac{1}{2}(I_z+mr^2)\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\dot{r}^2. \qquad (3)$$

Активными силами являются сила тяжести трубки OA и сила тяжести шарика M. Учтя, что движение происходит в горизонтальной плоскости, получим потенциальную энергию равной нулю:

$$\Pi=0. \qquad (4)$$

С помощью формул (3) и (4) определим функцию Лагранжа:

$$L=T-\Pi=\frac{1}{2}(I_z+mr^2)\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\dot{r}^2. \qquad (5)$$

Координата φ является циклической, ибо она явно в выражение функции Лагранжа не входит. Поэтому в соответствии с формулой (12*), приведенной в обзоре теории, непосредственно получим один из двух первых интегралов

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\alpha.$$

С учетом выражения (5) имеем

$$(I_z+mr^2)\dot{\varphi}=\alpha. \qquad (6)$$

Нетрудно видеть, что первый интеграл (6) фиксирует постоянство главного момента количеств движения материальной системы относительно оси z.

Для получения другого первого интеграла используем интеграл энергии (см. (6*) в обзоре теории). Это возможно, так как активные силы — силы тяжести — потенциальны и на систему наложена стационарная связь (ось вращения трубки). Стационарности связи соответствует выражение кинетической энергии (3), которая является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$, т. е. $T=T_2$ (в данном случае T_1 и T_0 — члены в выражении кинетической энергии (4*), соответствующие первой и нулевой степеням обобщенных скоростей равны нулю).

Записав закон сохранения механической энергии: $T+\Pi=C$, внеся в него значения (3) и (4) и использовав результат (6), получим другой первый интеграл

$$m\dot{r}^2+\frac{\alpha^2}{I_z+mr^2}=C. \qquad (7)$$

Итак, искомые интегралы уравнений движения имеют вид (6) и (7). Мы их определили, минуя составление и интегрирование двух уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \qquad (8)$$

Это оказалось возможным благодаря наличию циклической координаты φ и применению интеграла энергии.

В заключение (минуя систему уравнений (8)) составим уравнение Лагранжа для нециклической координаты r, использовав функцию Рауса R. В соответствии с формулой (14*), данной в обзоре теории, запишем

$$R=\alpha\dot{\varphi}-L. \tag{9}$$

Внеся в (9) выражение (5) и затем подставив значение $\dot{\varphi}$ из (6), получим функцию Рауса

$$R=\frac{1}{2}m\dot{r}^2-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{I_z+mr^2}. \tag{10}$$

Теперь уравнение Лагранжа для нециклической координаты r можно записать в виде (см. (13*) в обзоре теории)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial R}{\partial r}=0. \tag{11}$$

Использовав выражение (10) в уравнении (11), найдем искомое дифференциальное уравнение для координаты r

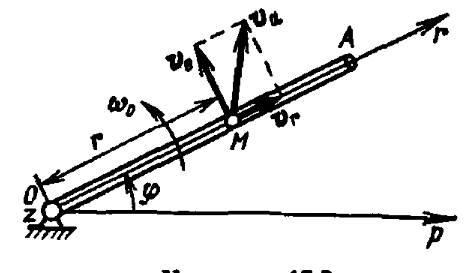
$$\ddot{r}-\frac{\alpha^2 r}{(I_z+mr^2)^2}=0. \tag{12}$$

Заметим, что с помощью уравнений Лагранжа (8) мы получили бы систему

$$\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2=0, \quad 2mr\dot{r}\dot{\varphi}+(I_z+mr^2)\ddot{\varphi}=0$$

и лишь после исключения из нее $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ пришли бы к уравнению (12).

Задача 17.2. Решить предыдущую задачу, считая, что трубка OA приводится мотором в равномерное вращение с угловой скоростью ω_0.



К задаче 17.2.

Решение. В данном случае трубка OA реализует для шарика M нестационарную связь, вращаясь с угловой скоростью ω_0. Положение шарика M относительно трубки OA определяется с помощью обобщенной координаты r.

Абсолютную скорость шарика вычислим с помощью теоремы о сложении скоростей: $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$. Имеем $v_e=r\omega_0$, $v_r=\dot{r}$. Значит, $v_a^2=r^2\omega_0^2+\dot{r}^2$.

Кинетическая энергия шарика равна

$$T=\frac{1}{2}mv_a^2=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\omega_0^2. \tag{1}$$

В соответствии с формулой (4*), приведенной в обзоре теории, найдем

$$T_2=\frac{1}{2}m\dot{r}^2, \quad T_0=\frac{1}{2}mr^2\omega_0^2, \tag{2}$$

где T_2 — квадратичная функция обобщенной скорости $\dot{r}$, а T_0 не содержит обобщенной скорости.

Движение происходит в горизонтальной плоскости, следовательно, потенциальная энергия равна нулю:

$$\Pi=0, \tag{3}$$

и функция Лагранжа $L=T-\Pi$ имеет выражение (1):

$$L=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\omega_0^2. \tag{4}$$

В данном случае первым интегралом является обобщенный интеграл энергии (см. (5*) в обзоре теории)

$$T_2-T_0+\Pi=C, \tag{5}$$

ибо функция Лагранжа (4) явно от времени не зависит.

Использовав в (5) выражения (2) и (3), найдем искомый первый интеграл

$$\dot{r}^2-r^2\omega_0^2=C_1 \tag{6}$$

(здесь постоянная C разделена на $2m$).

При решении этой задачи нетрудно впасть в ошибку, применив вместо обобщенного интеграла энергии (5) закон сохранения механической энергии

$$T+\Pi=C. \tag{7}$$

Внеся в (7) результаты (2) и (3), ошибочно найдем

$$\dot{r}^2+r^2\omega_0^2=C_2.$$

В этой задаче нельзя применить закон сохранения механической энергии (7), так как в выражение кинетической энергии (1), кроме $T_2=\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ — квадратичной функции обобщенной скорости $\dot{r}$, входит также член $T_0=\frac{1}{2}mr^2\omega_0^2$, не зависящий от $\dot{r}$. Этот член появился в выражении кинетической энергии (1) в связи с нестационарностью связи, которая в данной задаче имеет вид $\varphi=\omega_0 t$, т. е. явно содержит время.

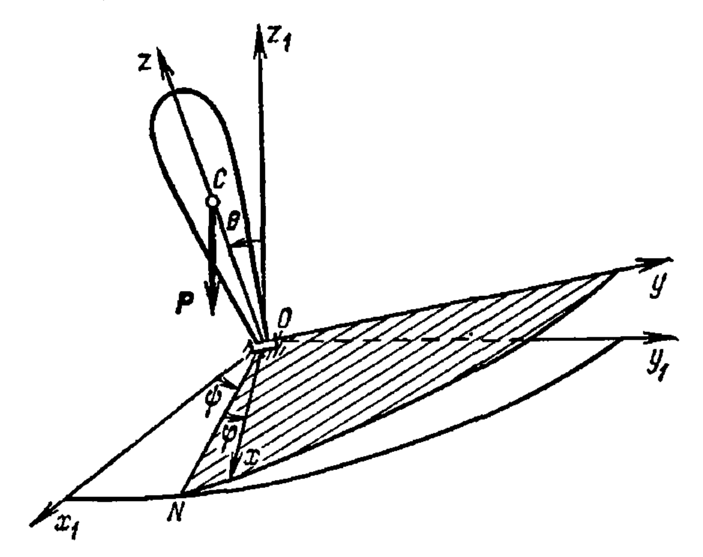
Обращаем внимание, что, не смотря на нестационарность связи, время t в явном виде в выражение кинетической энергии (1) и в функцию Лагранжа (4) не входит. Это обстоятельство дает возможность применить обобщенный интеграл энергии (4).

Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в правильности равенства (6) и в ошибочности формулы (7). Для этого нужно применить уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0$$

и проинтегрировать его, умножив предварительно на dr.

Задача 17.3. Гироскоп движется под действием силы тяжести, имея неподвижную точку O. Подвижная система осей $Oxyz$ связана с гироскопом, причем ось z направлена по его оси симметрии, на



К задаче 17.3.

которой лежат центр тяжести C и неподвижная точка O. Эллипсоид инерции гироскопа является для его неподвижной точки O эллипсоидом вращения. Даны осевые моменты инерции I_x, I_y, I_z, а также $OC=h$; масса гироскопа равна m; силами сопротивления пренебречь.

Минуя составление и интегрирование уравнений Лагранжа второго рода, найти первые интегралы уравнений движения. Принять в качестве обобщенных координат углы Эйлера φ, ψ и θ.

Решение. Введем неподвижные оси $Ox_1y_1z_1$. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, вычисляется по формуле

$$T=\frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2-2I_{yz}\omega_y\omega_z-2I_{zx}\omega_z\omega_x-2I_{xy}\omega_x\omega_y\right). \quad (1)$$

Ось z является осью симметрии, а оси x и y перпендикулярны к плоскости симметрии гироскопа в точке O. Поэтому

$$I_{xz}=I_{yz}=I_{xy}=0. \quad (2)$$

По условию эллипсоид инерции в точке O является эллипсоидом вращения. Значит,

$$I_x = I_y. \qquad (3)$$

Приняв во внимание (2) и (3), запишем формулу (1) в виде

$$T = \frac{1}{2}\left[I_x(\omega_x^2 + \omega_y^2) + I_z\omega_z^2\right]. \qquad (4)$$

Напомним, что кинематические уравнения Эйлера имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \\ \omega_y &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ \omega_z &= \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Из первых двух уравнений (5) найдем

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot\psi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2. \qquad (6)$$

Подставив третью формулу (5) и результат (6) в (4), получим выражение кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}\left[I_x(\dot\psi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + I_z(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)^2\right]. \qquad (7)$$

Потенциальная энергия равна

$$\Pi = mgz_1 = mgh\cos\theta. \qquad (8)$$

Внеся выражения (7) и (8) в функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, найдем

$$L = \frac{1}{2}\left[I_x(\dot\psi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + I_z(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)^2\right] - mgh\cos\theta. \qquad (9)$$

Углы Эйлера φ и ψ входят в (9) только своими производными, т. е. явно в функции Лагранжа отсутствуют и, значит, являются циклическими координатами. Зная, что частные производные функции Лагранжа по циклическим скоростям постоянны (см. формулу (12*), приведенную в обзоре теории), запишем:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \alpha_1, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \alpha_r. \qquad (10)$$

Внеся в формулы (10) выражение (9), получим два искомых первых интеграла

$$I_z(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi) = \alpha_1, \qquad (11)$$

$$I_x\dot\psi\sin^2\theta + I_z(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)\cos\theta = \alpha_2. \qquad (12)$$

Решив систему уравнений (11) и (12) относительно $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$, мы найдем

$$\dot{\psi}=\frac{\alpha_2-\alpha_1\cos\theta}{I_x\sin^2\theta}, \qquad (13)$$

$$\dot{\varphi}=\frac{\alpha_1}{I_z}-\frac{(\alpha_2-\alpha_1\cos\theta)\cos\theta}{I_x\sin^2\theta}. \qquad (14)$$

Для отыскания последнего первого интеграла можно применить закон сохранения энергии (сила тяжести потенциальна, а опора O реализует стационарную связь)

$$T+\Pi=\text{const}. \qquad (15)$$

Приняв во внимание (11), найдем кинетическую энергию (7) в виде

$$T=\frac{1}{2}I_x(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2}{I_z}. \qquad (16)$$

Подставив выражения (16) и (8) в уравнение (15) и включив постоянный член (16) $\alpha_1^2/2I_z$ в постоянную C, получим

$$\frac{1}{2}I_x(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+mgh\cos\theta=C. \qquad (17)$$

Внеся в первый интеграл (17) выражение $\dot{\psi}$ из (13) и затем решив его относительно $\dot{\theta}$, найдем

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{2C}{I_x}-\frac{(\alpha_2-\alpha_1\cos\theta)^2}{I_x^2\sin^2\theta}-\frac{2mgh\cos\theta}{I_x}}. \qquad (18)$$

Итак, искомые обобщенные скорости, являющиеся первыми производными углов Эйлера по времени, даны формулами (13), (14) и (18).

Обращаем внимание, что мы их легко получили, минуя составление и интегрирование системы уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}-\frac{\partial L}{\partial\psi}=0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0.$$

Это удалось сделать благодаря наличию двух циклических координат φ и ψ, а также применению закона сохранения энергии.

Данную задачу, называемую случаем Лагранжа, можно при наличии начальных условий движения решить в квадратурах до конца и определить уравнения движения гироскопа $\varphi=\varphi(t)$, $\psi=\psi(t)$, $\theta=\theta(t)$. Наряду со случаем Эйлера (см. задачу 15.1), случай Лагранжа относится к числу тех редких задач динамики твердого тела с неподвижной точкой, в которых дифференциальные уравнения движения могут быть проинтегрированы при произвольных начальных условиях движения.

§ 2. Уравнения Лагранжа первого рода

В § 6 гл. X второго тома были приведены дифференциальные уравнения движения материальной системы, называемые уравнениями Лагранжа второго рода. Помимо этих широко распространенных уравнений, существуют и другие формы дифференциальных уравнений движения системы, в частности — *уравнения Лагранжа первого рода.*

Рассмотрим несвободную материальную систему в составе n материальных точек, подчиненную r голономным связям. Число s степеней свободы этой системы определяется по формуле

$$s = 3n - r.$$

Если связи заданы уравнениями

$$f_l(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n), \tag{1*}$$

где $l = 1, 2, \ldots, r$, то уравнения Лагранжа первого рода имеют вид

$$m_k\ddot{x}_k = F_{kx} + \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_k}, \qquad m_k\ddot{y}_k = F_{ky} + \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_k},$$

$$m_k\ddot{z}_k = F_{kz} + \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial z_k}, \tag{2*}$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, r$.

Здесь F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} — проекции на оси x, y, z равнодействующей активных сил, приложенных к k-й материальной точке, а λ_1, λ_2, ..., λ_r — неопределенные множители. (Уравнения Лагранжа первого рода иногда называют уравнениями Лагранжа с множителями.)

Эти $3n$ уравнений (2*) совместно с r уравнениями связей (1*) образуют систему $3n+r$ уравнений с $3n+r$ неизвестными ($3n$ координат n материальных точек и r неопределенных множителей).

Суммы, стоящие в правых частях уравнений (2*), численно равны

$$\sum_{l=1}^{r} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_k} = R_{kx}, \quad \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_k} = R_{ky}, \quad \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial z_k} = R_{kz}, \tag{3*}$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, r$.

Здесь R_{kx}, R_{ky}, R_{kz} — проекции на оси x, y, z равнодействующей реакций связей, наложенных на k-ю материальную точку.

Определив r множителей λ_l, можно по формулам (3*) найти реакции связей.

Задачи на определение законов движения точек системы и реакций связей с помощью уравнений Лагранжа первого рода рекомендуется решать в следующей последовательности:

1) изобразить на рисунке активные силы;

2) выбрать систему декартовых осей координат;

3) вычислить проекции на декартовы оси координат равнодействующих активных сил F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}, приложенных к материальным точкам системы ($k=1, 2, \ldots, n$);

4) составить уравнения (1*) связей $f_l=0$, наложенных на материальные точки системы ($l=1, 2, \ldots, r$);

5) вычислить частные производные левых частей уравнений связей по декартовым координатам материальных точек системы: $\frac{\partial f_l}{\partial x_k}$, $\frac{\partial f_l}{\partial y_k}$, $\frac{\partial f_l}{\partial z_k}$, где $l=1, 2, \ldots, r$; $k=1, 2, \ldots, n$;

6) использовав результаты подсчетов в пп. 3) и 5), составить систему $3n$ уравнений Лагранжа первого рода (2*). В эти уравнения войдут r неопределенных множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$;

7) выбрав уравнения в числе, равном числу r неопределенных множителей λ_l, решить эти уравнения относительно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ (при этом множители λ_l окажутся, вообще говоря, функциями координат и их производных по времени);

8) подставить полученные в п. 7) значения r множителей λ_l в остальные $3n-r$ уравнений Лагранжа первого рода;

9) присоединить к этим $3n-r$ уравнениям Лагранжа r уравнений связей и, проинтегрировав эту систему $3n$ уравнений, определить искомые законы движения материальных точек системы;

10) подставить координаты точек системы, а также их производные по времени в выражения множителей λ_l, определенных в п. 7);

11) вычислить проекции искомых реакций связей R_{kx}, R_{ky}, R_{kz}, где $k=1, 2, \ldots, n$, по формулам (3*);

12) определить модули искомых реакций и направляющие косинусы по формулам

$$R_k=\sqrt{R_{kx}^2+R_{ky}^2+R_{kz}^2},$$

$$\cos(\widehat{x, R_k})=\frac{R_{kx}}{R_k}, \quad \cos(\widehat{y, R_k})=\frac{R_{ky}}{R_k}, \quad \cos(\widehat{z, R_k})=\frac{R_{kz}}{R_k},$$

где $k=1, 2, \ldots, n$.

Заметим, что решение системы дифференциальных уравнений, указанных в п. 9), обычно представляет большие трудности. Поэтому законы движения точек системы определяют с помощью других дифференциальных уравнений, например уравнений Лагранжа второго рода. Затем, применяя уравнения Лагранжа первого рода, находят реакции связей в виде функций времени. Последовательность решения задач остается прежней. Выпадает лишь п. 9), ибо законы движения точек системы определяются помимо уравнений Лагранжа первого рода.

При движении материальной точки массы m по гладкой поверхности, заданной уравнением

$$f(t, x, y, z)=0, \tag{4*}$$

уравнения Лагранжа первого рода имеют вид

$$m\ddot{x}=F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad m\ddot{y}=F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad m\ddot{z}=F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z},\tag{5*}$$

или в векторном виде

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}+\lambda\operatorname{grad}f,$$

где $\boldsymbol{F}$ — равнодействующая активных сил, приложенных к точке, а λ — неопределенный множитель.

Исключив из трех уравнений (5*) множитель λ, получим два уравнения. Добавив уравнение связи (4*), получим систему трех уравнений. Проинтегрировав эту систему, можно найти x, y, z — искомые уравнения движения материальной точки по гладкой поверхности — и затем вычислить λ. Реакция поверхности определяется по формуле

$$\boldsymbol{R}=\lambda\operatorname{grad}f,\tag{6*}$$

где

$$|\operatorname{grad}f|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},\tag{7*}$$

т. е.

$$R_x=\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad R_y=\lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad R_z=\lambda\frac{\partial f}{\partial z}.\tag{8*}$$

При движении материальной точки массы m по гладкой кривой, которая является пересечением двух поверхностей, заданных уравнениями

$$f_1(t,\ x,\ y,\ z)=0,\quad f_2(t,\ x,\ y,\ z)=0,\tag{9*}$$

уравнения Лагранжа первого рода имеют вид

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{x}&=F_x+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x},\\ m\ddot{y}&=F_y+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y},\\ m\ddot{z}&=F_z+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z},\end{aligned}\right\}\tag{10*}$$

или в векторном виде

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}+\lambda_1\operatorname{grad}f_1+\lambda_2\operatorname{grad}f_2,$$

где $\boldsymbol{F}$ — равнодействующая активных сил, приложенных к материальной точке, а λ_1 и λ_2 — неопределенные множители.

Исключив из трех уравнений (10*) λ_1 и λ_2, получим одно уравнение. Добавив к нему два уравнения связи (9*), получим систему трех уравнений. Проинтегрировав эту систему, можно найти x, y, z — искомые уравнения движения материальной точки по гладкой кривой и затем вычислить λ_1 и λ_2.

Реакция кривой определяется по формуле

$$R = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2,$$

т. е.

$$R_x = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \qquad R_y = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \qquad R_z = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \quad (11^*)$$

Задача 17.4. Два груза с массами m_1 и m_2 соединены невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный невесомый блок.

Определить уравнения движения грузов и реакцию нити, если в начальный момент система находилась в покое, а свисавшие с блока участки нити, поддерживающие первый и второй грузы, соответственно равнялись l_1 и l_2.

Решение. Система состоит из двух материальных точек, на которые наложена одна связь — нить.

Изобразим на рисунке активные силы системы: P_1 — сила тяжести левого груза, P_2 — сила тяжести правого груза. Ось y направим по вертикали вниз, взяв начало отсчета O в центре блока. Проекции на ось y активных сил, приложенных к грузам, равны

$$F_{1y} = P_1, \qquad F_{2y} = P_2. \quad (1)$$

Уравнение связи — нерастяжимой нити — имеет вид

$$f = y_1 + y_2 - l = 0, \quad (2)$$

К задаче 17.4.

где y_1 и y_2 — ординаты грузов, а буквой l обозначена длина нити. Частные производные левой части уравнения связи (2) имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_2} = 1. \quad (3)$$

Уравнения Лагранжа первого рода (1*), приведенные в обзоре теории, в данном случае имеют вид

$$m_1 \ddot{y}_1 = F_{1y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad m_2 \ddot{y}_2 = F_{2y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (4)$$

Использовав формулы (1) и (3), запишем уравнения (4) в виде

$$m_1 \ddot{y}_1 = P_1 + \lambda, \quad m_2 \ddot{y}_2 = P_2 + \lambda. \quad (5)$$

Дифференциальные уравнения (5) содержат множитель Лагранжа λ, подлежащий последующему определению.

Вычислим λ из второго уравнения (5):

$$\lambda = m_2 \ddot{y}_2 - P_2; \quad (6)$$

подставив его в первое уравнение (5), получим

$$m_1\ddot{y}_1 = P_1 + m_2\ddot{y}_2 - P_2. \qquad (7)$$

Присоединим к дифференциальному уравнению (7) уравнение связи (2). Для решения этой системы уравнений дважды продифференцируем уравнение (2):

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0. \qquad (8)$$

Теперь из системы уравнений (7) и (8) находим

$$\ddot{y}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \qquad \ddot{y}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g. \qquad (9)$$

Используем при интегрировании системы (9) начальные условия движения: при $t = 0$ имеем $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$, $y_1 = l_1$, $y_2 = l_2$; в результате мы находим искомые уравнения движения грузов

$$y_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{gt^2}{2} + l_1, \qquad y_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \frac{gt^2}{2} + l_2.$$

Для определения реакции нити предварительно вычислим множитель λ, подставив в формулу (6) значение $\ddot{y}_2$ из второго уравнения (9). Получим

$$\lambda = -\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g. \qquad (10)$$

Согласно формулам (3*), приведенным в обзоре теории, имеем

$$R_{1y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad R_{2y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (11)$$

Учтя в формулах (11) результаты (10) и (3), находим

$$R_{1y} = R_{2y} = -\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Эта легкая задача рассмотрена для иллюстрации последовательности решения задач с помощью уравнений Лагранжа первого рода. В данном случае значительно эффективнее применение общего уравнения динамики в сочетании с дифференциальным уравнением движения одного из грузов.

Задача 17.5. Материальная точка массы m движется под действием силы тяжести внутри гладкого полого цилиндра радиуса r. Ось цилиндра горизонтальна.

Применив уравнения Лагранжа первого рода, составить дифференциальное уравнение движения материальной точки и определить реакцию цилиндра. В начальный момент точка находилась в покое.

Решение. К материальной точке приложена одна активная сила — сила тяжести P. Направим ось z вдоль горизонтальной оси цилиндра, а оси x и y — в плоскости его поперечного сечения.

Проекции силы тяжести P на оси x, y и z равны

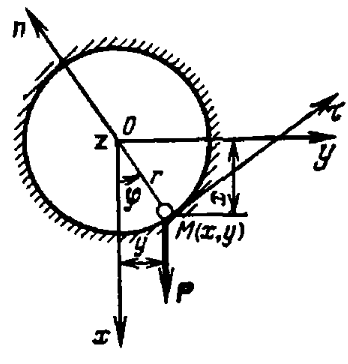
$$P_x = P, \qquad P_y = P_z = 0. \tag{1}$$

На материальную точку наложена одна связь — внутренняя гладкая поверхность цилиндра, уравнение которой имеет вид

$$f = r^2 - x^2 - y^2 = 0. \tag{2}$$

Частные производные левых частей уравнения связи (2) равны

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{3}$$



К задаче 17.5.

Уравнения Лагранжа первого рода (5*), приведенные в обзоре теории, в данном случае имеют вид

$$m\ddot{x} = P_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad m\ddot{y} = P_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad m\ddot{z} = P_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \tag{4}$$

Подставив результаты (1) и (3) в уравнения (4), получим

$$m\ddot{x} = P - 2\lambda x, \qquad m\ddot{y} = -2\lambda y, \qquad m\ddot{z} = 0, \tag{5}$$

где λ — множитель Лагранжа, подлежащий последующему определению.

Из третьего уравнения (5) находим $\dot{z}_1 = C_1$. По условию материальная точка в начальный момент находилась в покое, т. е. $\dot{z}_0 = 0$. Поэтому $\dot{z} = 0$ и, следовательно,

$$z = C_2. \tag{6}$$

Из уравнения (6) следует, что движение точки происходит в сечении цилиндра, перпендикулярном его оси z. Для определения движения точки в этом сечении воспользуемся первыми двумя дифференциальными уравнениями (5). Умножим первое уравнение на y, второе уравнение на $-x$ и сложим их. После сокращения на общий множитель m найдем

$$\ddot{x}y - \ddot{y}x = gy,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}y - \dot{y}x) = gy. \tag{7}$$

Выразим декартовы координаты точки M в зависимости от угла φ отклонения подвижного радиуса OM от оси x (см. рисунок):

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{8}$$

Вычислив производные (8) по времени t, имеем

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y} = r\dot{\varphi}\cos\varphi. \tag{9}$$

Использовав формулы (8) и (9), находим

$$\dot{x}y - \dot{y}x = -r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi - r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi = -r^2\dot{\varphi}. \tag{10}$$

Подстановка результатов (8) и (10) в дифференциальное уравнение (7) дает $-r\ddot{\varphi} = g\sin\varphi$, т. е.

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{r}\sin\varphi. \tag{11}$$

Таково искомое дифференциальное уравнение движения материальной точки в поперечном сечении полого цилиндра. Это уравнение проще было получить, применив теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси z, либо с помощью дифференциального уравнения движения точки в проекции на касательную τ (см. рисунок). Точное и приближенное решение этого дифференциального уравнения было приведено во втором томе.

Для определения реакции R_n внутренней поверхности цилиндра воспользуемся формулами (6*) и (7*), приведенными в обзоре теории. В проекции на главную нормаль n запишем:

$$R_n = \lambda\,|\operatorname{grad} f| = \lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \tag{12}$$

Определим множитель λ из второго уравнения (5):

$$\lambda = -\frac{m\ddot{y}}{2y}. \tag{13}$$

Использовав выражения (3), получим

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} = 2r. \tag{14}$$

Подстановка результатов (13) и (14) в формулу (12) дает

$$R_n = -mr\frac{\ddot{y}}{y}. \tag{15}$$

Для выражения нормальной реакции R_n в зависимости от угла отклонения φ воспользуемся при вычислении $\ddot{\varphi}$ второй формулой (9). Находим

$$\ddot{y} = -r\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi. \tag{16}$$

Применив результат (16) и вторую формулу (8) в выражении (15) получим

$$R_n = mr\frac{\dot{\varphi}^2\sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi}{\sin\varphi}. \tag{17}$$

Подставив в (17) значение $\ddot{\varphi}$ из уравнения (11), получим проекцию на главную нормаль искомой реакции внутренней поверхности цилиндра:

$$R_n = mr\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi. \tag{18}$$

Для выражения $\dot{\varphi}$ в зависимости от φ надо знать начальные условия движения точки и проинтегрировать дифференциальное уравнение (11), предварительно умножив его на $d\varphi$. Заметив, что $\ddot{\varphi}\,d\varphi = \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}$, найдем

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{r}\cos\varphi + C. \tag{19}$$

По условию в начальный момент точка находилась в покое. Если при этом ее положение определялось углом φ_0, то при $\dot{\varphi} = 0$ имеем $\varphi = \varphi_0$. Подстановка этих значений в уравнение (19) дает $C = -\frac{g}{r}\cos\varphi_0$. Поэтому уравнение (19) запишется в виде

$$\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{r}(\cos\varphi - \cos\varphi_0). \tag{20}$$

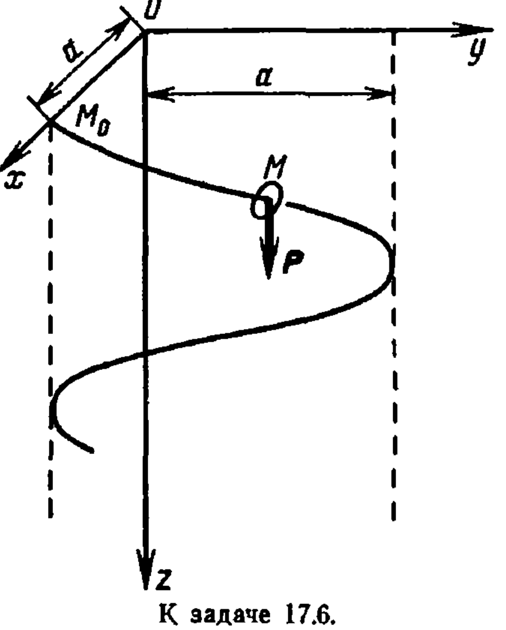
Использование выражения (20) в формуле (18) окончательно дает

$$R_n = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0).$$

Задача 17.6. Кольцо M массы m, надетое на гладкую проволоку, изогнутую по винтовой линии, соскальзывает под действием силы тяжести.

Определить уравнения движения кольца и реакцию проволоки в виде функции времени. Винтовая линия является пересечением двух поверхностей, заданных уравнениями

$$x = a\cos kz, \qquad y = a\sin kz.$$



К задаче 17.6.

В начальный момент кольцо M находилось в покое в положении M_0, указанном на рисунке.

Решение. На кольцо действует одна активная сила P. Ее проекции на оси x, y, z равны

$$P_x = P_y = 0, \qquad P_z = P. \tag{1}$$

Единственная связь реализуется проволокой, изогнутой по винтовой линии. В соответствии с условием, ее уравнения имеют вид

$$f_1 = x - a\cos kz = 0, \qquad f_2 = y - a\sin kz = 0. \tag{2}$$

Частные производные левых частей уравнений (2) равны

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}=a\,k\sin kz, \tag{3}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}=-ak\cos z.$$

Уравнения Лагранжа первого рода, приведенные в обзоре теории в формуле (10*), в данном случае имеют вид

$$m\ddot{x}=P_x+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad m\ddot{y}=P_y+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y},$$
$$m\ddot{z}=P_z+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}. \tag{4}$$

Подставив результаты (2) и (3) в уравнения (4), получим

$$m\ddot{x}=\lambda_1, \quad m\ddot{y}=\lambda_2, \quad m\ddot{z}=mg+\lambda_1 ak\sin kz-\lambda_2 ak\cos kz, \tag{5}$$

где λ_1 и λ_2 — множители Лагранжа, подлежащие последующему определению. Исключив λ_1 и λ_2 из системы уравнений (5), найдем

$$m\ddot{z}=mg+mak\ddot{x}\sin kz-mak\ddot{y}\cos kz. \tag{6}$$

Для интегрирования дифференциального уравнения (6) присоединим к нему уравнения связей (2). Взяв первые и вторые производные по времени функций (2), получим

$$\dot{x}=-ak\dot{z}\sin kz, \quad \ddot{x}=-ak\ddot{z}\sin kz-ak^2\dot{z}^2\cos kz, \tag{7}$$
$$\dot{y}=ak\dot{z}\cos kz, \quad \ddot{y}=ak\ddot{z}\cos kz-ak^2\dot{z}^2\sin kz.$$

Подставив значения (7) $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ в уравнение (6), после несложных преобразований получим $m\ddot{z}=mg-ma^2k^2\ddot{z}$, т. е.

$$\ddot{z}=b, \tag{8}$$

где обозначено

$$b=\frac{g}{1+a^2k^2}.$$

По условию кольцо в начальный момент находилось в покое в положении M_0, т. е. при $t=0$ $z=0$ и $\dot{z}=0$. Поэтому, проинтегрировав дифференциальное уравнение (8), получим

$$\dot{z}=bt, \quad z=\frac{bt^2}{2}. \tag{9}$$

Подставив значение z из второго уравнения (9) в уравнения связей (2), найдем

$$x=a\cos\frac{kbt^2}{2}, \quad y=a\sin\frac{kbt^2}{2}. \tag{10}$$

Совокупность уравнений (9) и (10) определяет искомые уравнения движения кольца.

Переходим к вычислению реакции проволоки. В соответствии с уравнениями (11*), данными в обзоре теории, проекции искомой реакции равны

$$R_x = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad R_y = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad R_z = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

Подставив значения (3), получим

$$R_x = \lambda_1, \quad R_y = \lambda_2, \quad R_z = \lambda_1 ak \sin kz - \lambda_2 ak \cos kz. \tag{11}$$

Из первых двух уравнений (5) следует

$$\lambda_1 = m\ddot{x}, \quad \lambda_2 = m\ddot{y}. \tag{12}$$

Теперь уравнения (11) принимают вид

$$R_x = m\ddot{x}, \quad R_y = m\ddot{y}, \quad R_z = mak\ddot{x} \sin kz - ma\,k\ddot{y} \cos kz.$$

Использовав значения x, y и z из формул (9) и (10), получим после очевидных преобразований

$$\begin{aligned} R_x &= -makb\left(\sin\frac{kbt^2}{2} + kbt^2 \cos\frac{kbt^2}{2}\right), \\ R_y &= makb\left(\cos\frac{kbt^2}{2} - kbt^2 \sin\frac{kbt^2}{2}\right), \\ R_z &= -ma^2k^2b, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$b = \frac{g}{1 + a^2k^2}.$$

Модуль реакции равен $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$. После подстановки значений (13) найдем

$$R = makb\sqrt{1 + a^2k^2 + k^2b^2t^4}.$$

Направляющие косинусы могут быть вычислены по формулам

$$\cos(\widehat{x, R}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\widehat{y, R}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\widehat{z, R}) = \frac{R_z}{R}.$$

Применение в этой задаче уравнений Лагранжа первого рода для определения реакции проволоки оказалось целесообразным.

§ 3. Канонические уравнения Гамильтона

1°. Обобщенные импульсы. *Обобщенным импульсом* p_i, соответствующим обобщенной координате q_i, называется частная производная кинетической энергии T по обобщенной скорости $\dot{q}_i$, т. е.

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \tag{1*}$$

Число обобщенных импульсов материальной системы равно числу ее обобщенных координат. Значит, число обобщенных импульсов равно числу степеней свободы материальной системы.

Размерность обобщенных импульсов зависит от размерности соответствующих обобщенных координат (см. задачи 17.7 и 17.8). Обобщенные импульсы применяются в канонических уравнениях Гамильтона.

Если на материальную систему с s степенями свободы наложены голономные стационарные связи, то кинетическая энергия системы является однородной квадратичной функцией s обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$, т. е.

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + a_{ss}\dot{q}_s^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \\ + 2a_{13}\dot{q}_1\dot{q}_3 + \ldots + 2a_{s-1,\,s}\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s).$$

Здесь коэффициенты a_{ij} зависят от обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$ и времени t. Применение формулы (1*) приводит к результатам:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + \ldots + a_{1s}\dot{q}_s = \sum_{l=1}^{s} a_{1l}\dot{q}_l, \\ p_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = a_{21}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2 + \ldots + a_{2s}\dot{q}_s = \sum_{l=1}^{s} a_{2l}\dot{q}_l, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_s &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = a_{s1}\dot{q}_1 + a_{s2}\dot{q}_2 + \ldots + a_{ss}\dot{q}_s = \sum_{l=1}^{s} a_{sl}\dot{q}_l. \end{aligned}\right\} \quad (2^*)$$

В соответствии с формулами (2*) обобщенные импульсы являются линейными функциями обобщенных скоростей.

Решение системы уравнений (2*) относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ дает возможность выразить их в зависимости от обобщенных импульсов $p_1, p_2, \ldots, p_s$ и обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$, входящих в коэффициенты a_{ij}, т. е.

$$\dot{q}_l = \dot{q}_l(q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s), \quad (3^*)$$

где $l = 1, 2, \ldots, s$.

Задача 17.7. Вычислить обобщенные импульсы материальной точки массы m и выразить обобщенные скорости в зависимости от обобщенных импульсов и обобщенных координат, если движение точки задано: а) в декартовых координатах, б) в полярных координатах, в) в сферических координатах.

Решение. а) При движении материальной точки массы m в декартовых координатах ее обобщенными координатами являются

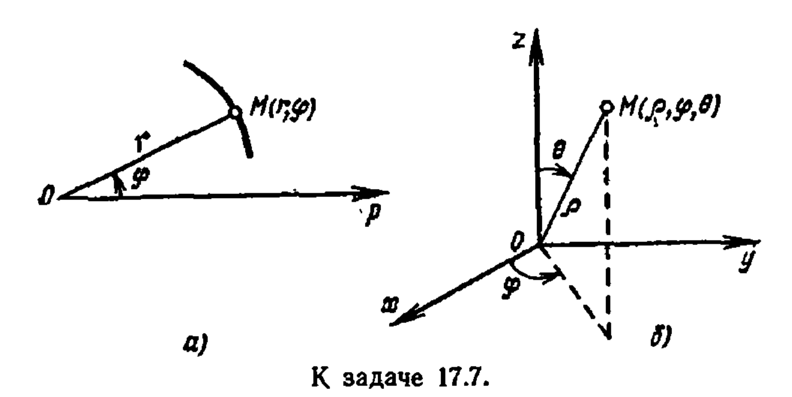
$q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$. При этом обобщенные скорости равны $\dot{q}_1 = \dot{x}$, $\dot{q}_2 = \dot{y}$, $\dot{q}_3 = \dot{z}$, а кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{1}$$

Обобщенным координатам x, y, z соответствуют обобщенные импульсы p_x, p_y, p_z. Использовав выражение (1), найдем

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \qquad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \tag{2}$$

т. е. обобщенные импульсы равны проекциям количеств движения материальной точки на соответствующие декартовы оси координат.



К задаче 17.7.

Решив систему уравнений (2) относительно обобщенных скоростей $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, имеем

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}. \tag{3}$$

В данном случае обобщенные скорости являются линейными функциями обобщенных импульсов и не зависят от обобщенных координат x, y, z.

б) При движении материальной точки массы m в полярных координатах ее обобщенными координатами являются $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$. При этом обобщенные скорости равны $\dot{q}_1 = \dot{r}$, $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}$. Учтя, что $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$, запишем кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2). \tag{4}$$

Обобщенным координатам r и φ соответствуют обобщенные импульсы p_r и p_φ. Использовав выражение (4), получим

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}. \tag{5}$$

Решив систему уравнений (5) относительно обобщенных скоростей $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$, найдем

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m},\quad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2}. \tag{6}$$

В данном случае обобщенная скорость $\dot{\varphi}$ зависит не только от обобщенного импульса p_φ, но также от обобщенной координаты r.

в) При движении материальной точки массы m в сферических координатах ее обобщенными координатами являются $q_1=\rho$, $q_2=\varphi$, $q_3=\theta$. Соответствующие обобщенные скорости будут $\dot{q}_1=\dot{\rho}$, $\dot{q}_2=\dot{\varphi}$, $\dot{q}_3=\dot{\theta}$.

Учтя, что $v^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\rho^2\dot{\theta}^2$, запишем кинетическую энергию в виде

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\rho^2\dot{\theta}^2\right). \tag{7}$$

Обобщенным координатам ρ, φ, θ соответствуют обобщенные импульсы p_ρ, p_φ, p_θ. Использовав выражение (7), найдем

$$p_\rho=\frac{\partial T}{\partial\dot{\rho}}=m\dot{\rho},\quad p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=m\rho^2\sin^2\theta,\quad p_\theta=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=m\rho^2\dot{\theta}. \tag{8}$$

Решив систему уравнений (8) относительно обобщенных скоростей $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$, получим

$$\dot{\rho}=\frac{p_\rho}{m},\quad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{m\rho^2\sin^2\theta},\quad \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{m\rho^2}. \tag{9}$$

В данном случае обобщенные скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$ зависят не только от обобщенных импульсов, но также от обобщенных координат.

Задача 17.8. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z по закону $\varphi=f(t)$. Момент инерции твердого тела относительно оси z равен I_z. Приняв угол поворота φ за обобщенную координату, определить обобщенный импульс.

Решение. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, имеет вид

$$T=\frac{1}{2}I_z\dot{\varphi}^2. \tag{1}$$

Использовав выражение (1), вычислим искомый обобщенный импульс:

$$p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=I_z\dot{\varphi}. \tag{2}$$

В данном случае обобщенный импульс является главным моментом количеств движения твердого тела относительно его оси вращения z.

2°. Функция Гамильтона. *Функцией Гамильтона H* называется выражение

$$H=\sum_{i=1}^{s}p_i\dot{q}_i-L, \tag{4*}$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа (кинетический потенциал), s — число степеней свободы материальной системы, $\dot{q}_i$ — обобщенная i-я скорость, p_i — обобщенный i-й импульс.

Обобщенные скорости $\dot{q}_i$, входящие в функцию Гамильтона (4*), должны быть выражены в зависимости от обобщенных координат q_i и обобщенных импульсов p_i (см. формулу (3*) в обзоре теории предыдущего пункта). Поэтому функция H, вообще говоря, имеет вид

$$H = H(t,\ q_i,\ p_i), \qquad (5^*)$$

где $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$.

Функция Гамильтона, которой приходится пользоваться при составлении канонических уравнений (см. следующий пункт этого параграфа), имеет размерность энергии.

В случае стационарных связей функция Гамильтона H равна полной механической энергии, т. е.

$$H = T + \Pi. \qquad (6^*)$$

Обобщенные скорости $\dot{q}_i$, входящие в выражение кинетической энергии T в формуле (6*), должны быть выражены в зависимости от обобщенных координат q_i и обобщенных импульсов p_i (см. формулу (3*)).

Итак, при наличии стационарных связей функция H зависит от обобщенных координат q_i, обобщенных импульсов p_i и не зависит явно от времени t:

$$H = H(q_i,\ p_i), \qquad (7^*)$$

где $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$.

Если на материальную систему наложены нестационарные связи, то при составлении функции Гамильтона приходится пользоваться формулой (4*). При стационарных связях проще применять формулу (6*). В этом случае рекомендуется следующая последовательность действий:

1) выяснить число степеней свободы материальной системы и выбрать равное ему число обобщенных координат;

2) вычислить кинетическую энергию T материальной системы, выразив ее в зависимости от обобщенных координат и обобщенных скоростей, т. е. $T = T(q_i,\ \dot{q}_i)$, где $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$;

3) найти обобщенные импульсы системы по формуле (1*), приведенной в обзоре теории предыдущего пункта, выразив их в виде функций обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей $\dot{q}_i$;

4) решить систему уравнений, полученную в п. 3), относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, т. е. получить $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_i, p_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, s$;

5) вычислить потенциальную энергию Π материальной системы;

6) воспользовавшись результатами пп. 2) и 5), вычислить функцию Гамильтона $H = T + \Pi$;

7) в выражении H, найденном в предыдущем пункте, заменить обобщенные скорости $\dot{q}_i$ с помощью зависимостей, полученных в п. 4).

Задача 17.9. Составить функцию Гамильтона для свободной материальной точки массы m, движущейся в поле силы тяжести. В качестве обобщенных выбрать декартовы координаты точки.

Решение. В задаче 17.7 а) были выполнены четыре первых пункта решения.

Потенциальная энергия материальной точки равна

$$\Pi = mgz. \qquad (1)$$

Так как материальная точка свободна, то функция Гамильтона вычисляется по формуле (6*), приведенной в обзоре теории. Использовав равенство (1) и формулу (1) задачи 17.7, запишем

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz. \qquad (2)$$

Заменим $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$ в формуле (2) с помощью зависимостей (3) задачи 17.7. Окончательно искомая функция Гамильтона получит вид

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz. \qquad (3)$$

Данная функция H зависит от обобщенных импульсов p_x, p_y, p_z и обобщенной координаты z.

Задача 17.10. Решить предыдущую задачу, приняв в качестве обобщенных сферические координаты точки.

Решение. В задаче 17.7 в) были выполнены четыре первых пункта решения.

Потенциальная энергия П материальной точки равна

$$\Pi = mgz.$$

Учтя, что $z = \rho\cos\theta$ (см. рис. *б* к задаче 17.7), имеем

$$\Pi = mg\rho\cos\theta. \qquad (1)$$

Материальная точка свободна. Поэтому функция Гамильтона равна ее полной механической энергии, т. е. $H = T + \Pi$. Воспользовавшись формулой (7) задачи 17.7 и выражением (1), запишем

$$H = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \rho^2\dot{\theta}^2) + mg\rho\cos\theta. \qquad (2)$$

Остается в формуле (2) заменить обобщенные скорости $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$ на обобщенные импульсы, использовав соотношения (9) задачи 17.7. Получим

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{\rho^2}\right) + mg\rho\cos\theta. \qquad (3)$$

Итак, искомая функция Гамильтона (3) зависит от обобщенных импульсов p_ρ, p_φ, p_θ, а также от обобщенных координат ρ и θ.

Мы вычислили функцию Гамильтона по формуле $H = T + \Pi$, применимой в случаях потенциальных сил и стационарных связей. Можно было провести вычисления по более общей формуле (4*), приведен-

ной в обзоре теории. Эта формула, применяемая при нестационарных связях, в данном случае имеет вид

$$H=\sum p_i\dot{q}_i-L=p_\rho\dot{\rho}+p_\varphi\dot{\varphi}+p_\theta\dot{\theta}-L, \qquad (4)$$

где $L=T-\Pi$.

Воспользовавшись формулой (1), а также выражением (7) задачи 17.7, запишем

$$L=T-\Pi=\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}\sin^2\theta+\rho^2\dot{\theta}^2\right)-mg\rho\cos\theta. \qquad (5)$$

Внеся результат (5) в формулу (4), получим

$$H=p_\rho\dot{\rho}+p_\varphi\dot{\varphi}+p_\theta\dot{\theta}-\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\rho^2\dot{\theta}^2\right)+mg\rho\cos\theta. \qquad (6)$$

Для получения искомой функции Гамильтона остается в формуле (6) заменить обобщенные скорости с помощью зависимостей (9) задачи 17.7. После несложных преобразований получим выражение (3).

Сопоставление двух методов составления функции Гамильтона показывает, что при стационарных связях эффективнее пользоваться формулой $H=T+\Pi$.

Задача 17.11. Показать, что в случае консервативной материальной системы, находящейся под действием потенциальных сил и подчиненной стационарным связям, функция Гамильтона равна полной механической энергии, т. е. $H=T+\Pi$.

Решение. Предварительно заметим, что при стационарных связях кинетическая энергия T является однородной квадратичной функцией обобщенных скоростей, т. е.

$$T=\frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2+a_{22}\dot{q}_2^2+\ldots+a_{ss}\dot{q}_s^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+\ldots+2a_{s-1}a_s\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s\right), \qquad (1)$$

где коэффициенты a_{ij}, — вообще говоря, функции обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$.

Согласно теореме Эйлера об однородных функциях для квадратичной функции имеем

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i=2T. \qquad (2)$$

Читатель, незнакомый с формулой (2), может без большого труда убедиться в ее справедливости. Для этого, воспользовавшись выражением (1), надо вычислить частные производные кинетической энергии T по обобщенным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$, т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}=a_{11}\dot{q}_1+a_{12}\dot{q}_2+\ldots,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}=a_{22}\dot{q}_2+a_{12}\dot{q}_1+\ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}=a_{ss}\dot{q}_s+a_{1s}\dot{q}_1+\ldots,$$

и подставить эти значения в развернутую левую часть формулы (2), т. е. в сумму

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2+\ldots+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s.$$

После несложных подсчетов эта сумма окажется равной удвоенной кинетической энергии, данной формулой (1).

Перейдем к вычислению функции Гамильтона с помощью формулы (4*), приведенной в обзоре теории, т. е.

$$H=\sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i-L. \tag{3}$$

Заметив, что, по определению,

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

а функция Лагранжа имеет вид $L=T-\Pi$, запишем выражение (3) в виде

$$H=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-T+\Pi. \tag{4}$$

Внеся равенство (2) в формулу (4), получим искомое выражение функции Гамильтона $H=T+\Pi$.

3°. Канонические уравнения Гамильтона. Рассмотрим консервативную материальную систему с s степенями свободы. Выберем s обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Для описания движения этой системы с помощью уравнений Лагранжа второго рода надо составить s дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,$$

где $i=1, 2, \ldots, s$, а $L=T-\Pi$ — функция Лагранжа.

Снизим порядок каждого дифференциального уравнения со второго до первого путем удвоения числа уравнений. Это можно сделать различными методами, в частности, если к s обобщенным координатам присоединить s дополнительных координат — обобщенные импульсы $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Переменные q_i и p_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ называются *каноническими переменными*. Обобщенная координата q_i и соответствующий ее импульс p_i называются *сопряженными каноническими переменными*. Этим $2s$ каноническим переменным соответствует $2s$ канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{8*}$$

где H — функция Гамильтона, а $i=1, 2, \ldots, s$.

Канонические уравнения Гамильтона — это система $2s$ обыкновенных (а не в частных производных!) дифференциальных уравнений первого порядка.

Каноническими уравнениями, помимо механики, пользуются в квантовой механике, электродинамике и других областях теоретической физики.

Составление канонических уравнений рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выяснить число степеней свободы данной консервативной материальной системы и выбрать соответствующие обобщенные координаты;

2) найти обобщенные импульсы, сопряженные с выбранными обобщенными координатами (см. п. 1° этого параграфа);

3) вычислить функцию Гамильтона (см. п. 2° этого параграфа);

4) составить канонические уравнения с помощью формул (8*).

Задача 17.12. Составить канонические уравнения движения свободной материальной точки массы m в поле силы тяжести. В качестве обобщенных координат выбрать декартовы координаты x, y, z.

Решение. Свободная материальная точка имеет три степени свободы. Значит, для описания ее движения надо иметь шесть канонических переменных.

Обобщенные импульсы p_x, p_y, p_z были приведены в формуле (2) задачи 17.7.

Для составления шести уравнений Гамильтона (8*), имеющих в данном случае вид

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x},\quad \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_y},\quad \dot{z}=\frac{\partial H}{\partial p_z},\quad \dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x},\quad \dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y},\quad \dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z},\qquad (1)$$

воспользуемся функцией Гамильтона H, которая была составлена в задаче 17.9 (см. формулу (3)): $H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+mgz$. Подставив это значение H в уравнения (1), найдем искомые канонические уравнения

$$\dot{x}=\frac{p_x}{m},\quad \dot{y}=\frac{p_y}{m},\quad \dot{z}=\frac{p_z}{m},\quad \dot{p}_x=0,\quad \dot{p}_y=0,\quad \dot{p}_z=-mg.\qquad (2)$$

Эти шесть канонических уравнений первого порядка относительно переменных x, y, z, p_x, p_y, p_z можно привести к трем дифференциальным уравнениям второго порядка относительно переменных x, y и z. Действительно, вычислив производные по времени первых трех канонических уравнений (2) и решив их относительно $\dot{p}_x$, $\dot{p}_y$, $\dot{p}_z$, получим

$$\dot{p}_x=m\ddot{x},\quad \dot{p}_y=m\ddot{y},\quad \dot{p}_z=m\ddot{z}.$$

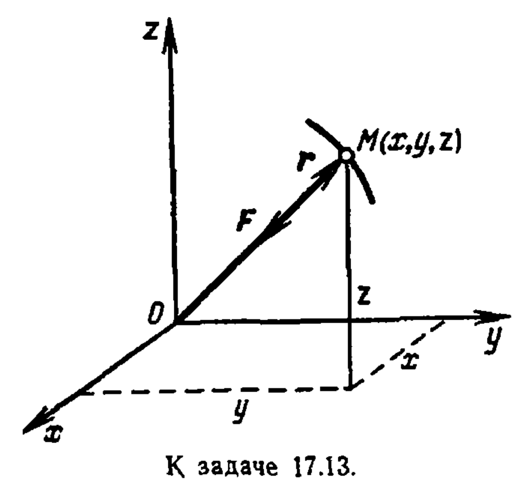
Подставив эти значения $\dot{p}_x$, $\dot{p}_y$, $\dot{p}_z$ в три последних канонических уравнения (2), после сокращения на m найдем

$$\ddot{x}=0,\quad \ddot{y}=0,\quad \ddot{z}=-g.\qquad (3)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (3) — это дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки, находящейся в поле силы тяжести, в проекциях на декартовы оси координат.

Задача 17.13. Составить канонические уравнения движения свободной материальной точки массы m, находящейся под действием квазиупругой силы $\boldsymbol{F} = -c\boldsymbol{r}$ (см. рисунок), где c — постоянный коэффициент. Силой сопротивления движению пренебречь. В качестве обобщенных координат выбрать декартовы координаты x, y, z.

Решение. Свободная материальная точка имеет три степени свободы. Трем обобщенным координатам $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ соответствуют три сопряженных обобщенных импульса p_x, p_y, p_z.



К задаче 17.13.

Для определения p_x, p_y, p_z вычислим кинетическую энергию материальной точки

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{1}$$

Обобщенные импульсы равны

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \tag{2}$$

Так как сила $\boldsymbol{F}$ потенциальна, а связи отсутствуют, то функция Гамильтона равна ее полной механической энергии, т. е.

$$H = T + \Pi. \tag{3}$$

Напомним, что потенциальной энергией называется работа, которую совершает потенциальная сила при перемещении материальной точки из данного положения в нулевое. Поэтому в данном случае

$$\Pi = \int_{r}^{0} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -c \int_{r}^{0} \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{cr^2}{2}. \tag{4}$$

Заметив, что $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, запишем формулу (4) в виде

$$\Pi = \frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2). \tag{5}$$

Подставив результаты (1) и (5) в формулу (3), найдем

$$H = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} c(x^2 + y^2 + z^2). \tag{6}$$

Выражение (6) еще не является требуемой функцией Гамильтона, ибо последняя должна зависеть от обобщенных координат и обоб-

щенных импульсов. Поэтому, воспользовавшись формулами (2), выразим обобщенные скорости в зависимости от обобщенных импульсов:

$$\dot{x}=\frac{p_x}{m}, \quad \dot{y}=\frac{p_y}{m}, \quad \dot{z}=\frac{p_z}{m}.$$

Внеся выражения $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в формулу (6), получим функцию Гамильтона в виде

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{1}{2}c(x^2+y^2+z^2). \tag{7}$$

Перейдем к составлению канонических уравнений

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

которые в данном случае имеют вид

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{z}=\frac{\partial H}{\partial p_z}, \quad \dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z}. \tag{8}$$

Подставив в уравнения (8) выражение функции H из формулы (7), получим искомые канонические уравнения движения

$$\dot{x}=\frac{p_x}{m}, \quad \dot{y}=\frac{p_y}{m}, \quad \dot{z}=\frac{p_z}{m}, \quad \dot{p}_x=-cx, \quad \dot{p}_y=-cy, \quad \dot{p}_z=-cz. \tag{9}$$

Мы получили шесть канонических уравнений первого порядка, соответствующих шести каноническим переменным x, y, z, p_x, p_y, p_z. Эти уравнения можно привести к трем дифференциальным уравнениям второго порядка в проекциях на декартовы оси координат. Для этого надо продифференцировать три первых канонических уравнения (9), затем решить их относительно $\dot{p}_x$, $\dot{p}_y$, $\dot{p}_z$ и подставить найденные $\dot{p}_x$, $\dot{p}_y$, $\dot{p}_z$ в три последних уравнения (9). Получим

$$m\ddot{x}=-cx, \quad m\ddot{y}=-cy, \quad m\ddot{z}=-cz. \tag{10}$$

Уравнения (10) являются проекциями векторного уравнения $m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}$, т. е. $m\boldsymbol{w}=-c\boldsymbol{r}$ на декартовы оси координат.

Задача 17.14. Составить канонические уравнения движения свободной материальной точки массы m, находящейся под действием центральной силы. Потенциальная энергия равна $\Pi=\Pi(r)$. В качестве обобщенных выбрать полярные координаты r и φ.

Решение. Двум обобщенным координатам r и φ соответствуют два сопряженных импульса p_r и p_φ, которые вычислены в решении задачи 17.7 ((см. формулу (5)).

Так как центральная сила $\boldsymbol{F}$ потенциальна, а связи отсутствуют, то функция Гамильтона равна полной механической энергии:

$$H=T+\Pi. \tag{1}$$

Воспользовавшись выражением кинетической энергии (4) в задаче 17.7, запишем

$$H=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\Pi(r). \tag{2}$$

Теперь надо в функции H выразить обобщенные скорости $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$ через обобщенные импульсы p_r, p_φ и координаты r, φ. Использовав формулу (5) задачи 17.7, имеем

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)+\Pi(r). \tag{3}$$

Канонические уравнения

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

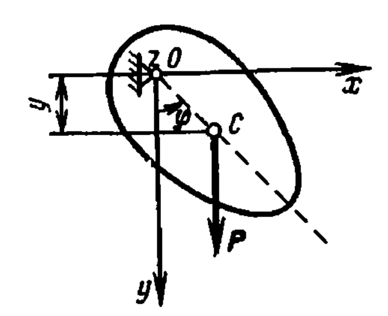
в данном случае имеют вид

$$\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_r},\qquad \dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi},\qquad \dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r},\qquad \dot{p}_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial \varphi}. \tag{4}$$

Внеся в уравнения (4) значение функции Гамильтона (3), получим искомые канонические уравнения движения материальной точки:

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m},\qquad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2},\qquad \dot{p}_r=\frac{p_\varphi^2}{mr^3}-\frac{d\Pi}{dr},\qquad \dot{p}_\varphi=0.$$

Задача 17.15. Составить канонические уравнения движения физического маятника, если P — его вес, I_z — момент инерции относительно оси привеса z, $OC=a$ — расстояние от точки привеса O до центра тяжести C маятника (см. рисунок). Трением пренебречь. В качестве обобщенной координаты выбрать угол поворота φ.



К задаче 17.15.

Решение. Маятник является системой с одной степенью свободы, ибо его положение определяется углом поворота φ. Для вычисления сопряженного обобщенного импульса p_φ запишем кинетическую энергию маятника:

$$T=\frac{1}{2}I_z\dot{\varphi}^2. \tag{1}$$

Далее получаем для сопряженного обобщенного импульса:

$$p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=I_z\dot{\varphi}, \tag{2}$$

откуда

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{I_z}. \tag{3}$$

Единственная активная сила — сила тяжести P — потенциальна, а связь — ось привеса — идеальна и стационарна. Значит, функция

Гамильтона равна полной механической энергии маятника:

$$H = T + \Pi. \quad (4)$$

Потенциальная энергия маятника равна

$$\Pi = -Py = -Pa\cos\varphi. \quad (5)$$

Внеся результаты (1) и (5) в формулу (4), найдем

$$H = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2 - Pa\cos\varphi. \quad (6)$$

Напомним, что этим выражением для H нельзя воспользоваться при составлении канонических уравнений, ибо функция Гамильтона должна быть выражена в зависимости от обобщенных координат и импульсов. Воспользовавшись формулой (3), исключим из выражения (6) обобщенную скорость $\dot{\varphi}$:

$$H = \frac{1}{2I_z} p_\varphi^2 - Pa\cos\varphi. \quad (7)$$

В данном случае канонические уравнения имеют вид

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}. \quad (8)$$

Внеся в уравнения (8) значение (7) функции Гамильтона, получим искомые уравнения движения физического маятника

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{I_z}, \qquad \dot{p}_\varphi = -Pa\sin\varphi. \quad (9)$$

Два канонических уравнения (9) первого порядка эквивалентны одному дифференциальному уравнению второго порядка. Продифференцировав первое уравнение (9) по времени и затем исключив $\dot{p}_\varphi$ из второго уравнения (9), получим дифференциальное уравнение качаний маятника

$$I_z \ddot{\varphi} = -Pa\sin\varphi.$$

Задача 17.16. Вывести с помощью канонических уравнений Гамильтона закон сохранения полной механической энергии.

Решение. В формуле (5*), приведенной в п. 2° этого параграфа, было указано, что функция Гамильтона H в случае голономной системы зависит, вообще говоря, от времени, обобщенных координат и обобщенных импульсов, т. е.

$$H = H(t, q_i, p_i), \quad (1)$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$ — число степеней свободы материальной системы.

Вычислим производную функции (1) по времени:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial H}{\partial q_2}\dot{q}_2+\ldots+\frac{\partial H}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial H}{\partial p_1}\dot{p}_1+\frac{\partial H}{\partial p_2}\dot{p}_2+\ldots+\frac{\partial H}{\partial p_s}\dot{p}_s$$

или

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i. \quad (2)$$

С помощью канонических уравнений

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

заменим $\dot{q}_i$ и $\dot{p}_i$ в выражении (2). Тогда

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

или

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (3)$$

Если связи стационарны, то время t явно не входит в уравнение (1). В этом случае $\partial H/\partial t=0$ и формула (3) примет вид $dH/dt=0$, т. е.

$$H=\text{const}. \quad (4)$$

Так как в рассматриваемом случае функция Гамильтона равна полной механической энергии, т. е. $H=T+\Pi$, то из уравнения (4) следует закон сохранения полной механической энергии

$$T+\Pi=\text{const}.$$

Итак, закон сохранения полной механической энергии имеет место в случае консервативной материальной системы, т. е. при наличии потенциальных сил и стационарных связей.

Задача 17.17. На материальную систему действуют потенциальные силы, а связи голономны и идеальны.

Показать, что функции Гамильтона H и $-t$ являются сопряженными каноническими переменными.

Решение. В предыдущей задаче был получен результат (3)

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}, \text{ т. е. } \dot{H}=-\frac{\partial H}{\partial(-t)}. \quad (1)$$

Сопоставив формулу (1) с каноническим уравнением

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

видим, что подобно p_i и q_i H и $-t$ являются сопряженными каноническими переменными. Этими переменными пользуются в квантовой механике.

4°. **Первые интегралы канонических уравнений Гамильтона.** Первым интегралом канонических уравнений называется функция $f(t, q_i, p_i)$, которая остается постоянной при любых значениях канонических переменных q_i и p_i и удовлетворяет каноническим уравнениям

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$, т. е.

$$f(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s) = \text{const}.$$

Проинтегрировать $2s$ канонических уравнений, значит, найти $2s$ независимых первых интегралов

$$f_j(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s) = C_j, \qquad (9^*)$$

где $j = 1, 2, \ldots, 2s$, ибо, решив уравнения (9*) относительно канонических переменных $q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s$, найдем:

$$q_1 = q_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2s}),$$
$$q_2 = q_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2s}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_s = q_s(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2s}),$$
$$p_1 = p_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2s}),$$
$$p_2 = p_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2s}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_s = p_s(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2s}).$$

Эти значения q_i и p_i, где $i = 1, 2, \ldots, s$, по определению первых интегралов, удовлетворяют каноническим уравнениям Гамильтона.

Если материальная система консервативна, то одним из ее первых интегралов является полная механическая энергия $T + \Pi = h$, равная в этом случае функции Гамильтона, т. е. $h = H$. Этот первый интеграл называется интегралом энергии.

Значительно упрощается отыскание первых интегралов при наличии циклических координат.

Напомним, что циклическими (см. стр. 102) называются обобщенные координаты, которые явно не входят в функцию Лагранжа $L = T - \Pi$. Например, координата q_j является циклической, если

$$L = L(t, q_1, q_2, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s).$$

При этом координата q_j не входит также явно в функцию Гамильтона $H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L$, т. е.

$$H = H(t, q_1, q_2, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s).$$

Если одна из обобщенных координат q_j — циклическая, то сопряженный с ней обобщенный импульс p_j постоянен, т. е. $p_j = C_j = \text{const}$ и является одним из первых интегралов канонических уравнений.

Итак, число постоянных обобщенных импульсов, являющихся первыми интегралами канонических уравнений, равно числу циклических координат. Поэтому при выборе обобщенных координат надо стремиться к тому, чтобы среди них оказалось возможно большее число циклических координат.

Если все координаты являются циклическими, а связи — стационарными, то функция Гамильтона зависит только от постоянных обобщенных импульсов: $H = H(p_1, p_2, \ldots, p_s)$. При этом все обобщенные координаты оказываются линейными функциями времени:

$$q_i = \gamma_i t + D_i, \tag{10*}$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$, $\gamma_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial C_i} = \text{const}$, D_i — постоянные интегрирования. В этом случае интегрирование канонических уравнений не составляет труда.

Поэтому, если бы можно было в ходе решения задачи перейти от избранных обобщенных координат к циклическим координатам, то интегрирование канонических уравнений совершалось бы элементарно. Однако этот переход к циклическим координатам в общем случае неизвестен.

Задача 17.18. Найти с помощью канонических уравнений Гамильтона закон движения свободного твердого тела, совершающего по инерции плоское движение параллельно плоскости Oxy. Даны начальные условия движения: при $t = 0$ имеем $x_C = 0, y_C = 0$, $\varphi = 0$, $\dot{x}_C = v_{Ox}$, $\dot{y}_C = v_{Oy}$, $\dot{\varphi} = \omega_0$, где C — центр масс твердого тела.

Решение. Для определения положения твердого тела зададим три обобщенных координаты: x_C, y_C и φ. Кроме этих обобщенных координат, каноническими переменными являются обобщенные импульсы p_{x_C}, p_{y_C}, p_φ.

Кинетическая энергия твердого тела равна $T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC}\omega^2$. Так как $v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2$, а $\omega^2 = \dot{\varphi}^2$, то

$$T = \frac{1}{2} M(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} I_{zC}\dot{\varphi}^2. \tag{1}$$

Потенциальная энергия свободного твердого, движущегося по инерции тела равна нулю:

$$\Pi = 0. \tag{2}$$

Внеся результаты (1) и (2) в функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, найдем

$$L = \frac{1}{2} M(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} I_{zC}\dot{\varphi}^2. \tag{3}$$

Воспользовавшись выражением (3), вычислим обобщенные импульсы p_{x_C}, p_{y_C}, p_φ:

$$p_{x_C}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_C}=M\dot{x}_C,\qquad p_{y_C}=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_C}=M\dot{y}_C,\qquad p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=I_{zC}\dot{\varphi}. \qquad (4)$$

В данном случае все три обобщенных координаты x_C, y_C и φ не входят в функцию Лагранжа L (3) и являются циклическими. Поэтому все обобщенные импульсы (4) постоянны, т. е. три первых интеграла канонических уравнений равны

$$p_{x_C}=M\dot{x}_C=C_1,\qquad p_{y_C}=M\dot{y}_C=C_2,\qquad p_\varphi=I_{zC}\dot{\varphi}=C_3. \qquad (5)$$

Использовав в (5) начальные условия движения: при $t=0$ дано $\dot{x}_C=v_{Ox}$, $\dot{y}_C=v_{Oy}$, $\dot{\varphi}=\omega_0$, найдем:

$$\dot{x}_C=v_{Ox},\qquad \dot{y}_C=v_{Oy},\ \dot{\varphi}=\omega_0. \qquad (6)$$

Проинтегрировав дифференциальные уравнения (6) и применив начальные условия движения: при $t=0$ дано $x_C=0$, $y_C=0$, $\varphi=0$, получим еще три первых интеграла канонических уравнений — искомые уравнения движения

$$x_C=v_{Ox}t,\qquad y_C=v_{Oy}t,\qquad \varphi=\omega_0 t. \qquad (7)$$

Уравнения (7) соответствуют формуле (10*) в обзоре теории. Наличие всех трех циклических координат дало возможность, минуя составление канонических уравнений, легко получить их шесть первых интегралов.

§ 4. Уравнение Гамильтона — Якоби

1°. Канонические преобразования. В п. 4° § 3 этой главы было показано, что при наличии стационарных связей и всех обобщенных циклических координат можно сразу записать первые интегралы, минуя составление и интегрирование канонических уравнений. Это обстоятельство подчеркивает особую важность удачного выбора переменных при решении каждой конкретной задачи. Однако, начиная решать задачу, очень трудно сразу найти наиболее целесообразную комбинацию переменных, которые предельно упростили бы интегрирование соответствующих канонических уравнений. В связи с этим возникает задача о каноническом преобразовании, т. е. о переходе от одних переменных к другим, упрощающим интегрирование соответствующих канонических уравнений.

Назовем первоначально избранные переменные q_i (координаты) и p_i (импульсы) старой системой переменных, а искомые переменные ξ_i (координаты) и η_i (импульсы) — новой системой.

Необходимо найти зависимость между старыми и новыми переменными, т. е.

$$q_i = q_i(t,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_s,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_s),$$
$$p_i = p_i(t,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_s,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_s),$$

где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$, обеспечивающую переход от канонических уравнений старой системы

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

где функция Гамильтона равна $H = \sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i - L(t,\ q_i,\ p_i)$, к каноническим уравнениям новой системы:

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial R}{\partial \eta_i},\qquad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial R}{\partial \xi_i},$$

где функция Гамильтона равна $R = \sum_{i=1}^{s} \eta_i\dot{\xi}_i - L(t,\ \xi_i,\ \eta_i)$.

Для большей наглядности составим следующую таблицу:

Старая система		Новая система
$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s$	обобщенные координаты	$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_s$
$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_s$	обобщенные импульсы	$\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_s$
$H=\sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i - L(t,\ p_i,\ q_i)$	функция Гамильтона	$R=\sum_{i=1}^{s} \eta_i\dot{\xi}_i - L(t,\ \xi_i,\ \eta_i)$
$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$	канонические уравнения	$\dot{\xi}_i = \frac{\partial R}{\partial q_i},\ \dot{\eta}_i = -\frac{\partial R}{\partial \xi_i}$, где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$

Для канонического преобразования, т. е. для перехода от старой системы переменных к новой, надо выбрать функцию V, называемую *производящей функцией* и зависящую от времени, старых и новых обобщенных координат, т. е.

$$V = V(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_s). \qquad (1^*)$$

При наличии производящей функции V для функций Гамильтона R и H имеет место соотношение

$$R = \frac{\partial V}{\partial t} + H, \qquad (2^*)$$

а старые и новые канонические переменные связаны зависимостями

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \qquad \eta_i = -\frac{\partial V}{\partial \xi_i}, \tag{3*}$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$.

Произведя вычисления по формулам (3*), получим

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s), \\ \eta_i &= \eta_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s), \end{aligned} \tag{4*}$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$.

Решив систему уравнений (4*) относительно ξ_i и η_i, выразим новые канонические переменные ξ_i и η_i в зависимости от старых p_i и q_i, т. е.

$$\xi_i = \xi_i(t, q_i, p_i), \ \eta_i = \eta_i(t, q_i, p_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Задача 17.19. Дана система переменных q_i и p_i. Требуется найти новые переменные ξ_i и η_i, выразить их в зависимости от старых переменных q_i и p_i и вычислить новую функцию Гамильтона R в зависимости от старой функции H, если производящая функция V имеет вид $V = \sum_{i=1}^{s} q_i \xi_i$.

Решение. Использовав формулы (3*), получим

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} = \xi_i, \qquad \eta_i = -\frac{\partial V}{\partial \xi_i} = -q_i,$$

т. е. новые переменные равны

$$\xi_i = p_i, \qquad \eta_i = -q_i,$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$.

Итак, в новой системе переменных старые импульсы стали новыми координатами, а отрицательные значения старых координат стали новыми импульсами.

Производящая функция $V = \sum_{i=1}^{s} q_i \xi_i$ явно от времени не зависит. Поэтому $\partial V / \partial t = 0$ и, следуя формуле (2*), получим $R = H$.

2°. Уравнение Гамильтона—Якоби. Поставим задачу об отыскании производящей функции V, которая позволила бы перейти от первоначальных избранных переменных q_i и p_i к новым постоянным координатам $\xi_i = \alpha_i = \text{const}$ и новым постоянным импульсам $\eta_i = \beta_i = \text{const}$, где $i = 1, 2, \ldots, s$. Подобное каноническое преобразование привело бы к зависимостям старых переменных q_i и p_i от времени и от постоянных α_i и β_i, т. е. дало бы возможность, минуя интегрирование, легко найти первые интегралы канонических уравнений.

Для определения соответствующей производящей функции V надо решить уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(t,\ q_i,\ \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)=0. \qquad (5^*)$$

Это — уравнение в частных производных первого порядка, второй степени. В том, что это уравнение второй степени, нетрудно убедиться, вспомнив, что в функции Гамильтона H импульсы p_i содержатся в квадратах. Так как при каноническом преобразовании $p_i = \partial V/\partial q_i$ (см. формулу (3*) в п. 1°), то частные производные $\partial V/\partial q_i$ войдут в H и, следовательно, в уравнение (5*) во вторых степенях.

Итак, решение одного уравнения Гамильтона—Якоби (5*) в частных производных эквивалентно решению $2s$ обыкновенных канонических уравнений. Заметим сразу, что объем вычислений примерно одинаков.

Решение задач на составление уравнения Гамильтона—Якоби рекомендуется выполнять в следующей последовательности:

1) составить функцию Гамильтона H (см. 2° § 3 данной главы);

2) заменить в функции H обобщенные импульсы p_i по формулам $p_i = \partial V/\partial q_i$;

3) подставить полученное в п. 2) выражение H в уравнение Гамильтона—Якоби (5*).

Задача 17.20. Составить уравнение Гамильтона—Якоби для описания движения в поле силы тяжести свободной материальной точки массы m. В качестве обобщенных взять декартовы координаты x, y, z.

Решение. В формуле (3) задачи 17.9 была записана соответствующая функция Гамильтона:

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+mgz.$$

В данном случае на основании формулы (3*), приведенной в обзоре теории п. 1° этого параграфа, имеем $p_x=\partial V/\partial x$, $p_y=\partial V/\partial y$, $p_z=\partial V/\partial z$, и функция H принимает вид

$$H=\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]+mgz. \qquad (1)$$

Использовав формулу (1) в уравнении (5*), запишем искомое уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]+mgz=0. \qquad (2)$$

Задача 17.21. Решить предыдущую задачу, приняв в качестве обобщенных сферические координаты ρ, φ, θ.

Решение. В формуле (3) задачи 17.10 была записана соответствующая функция Гамильтона

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2\sin\theta}+\frac{p_\theta^2}{\rho^2}\right)+mg\rho\cos\theta.$$

На основании формулы (3*), приведенной в обзоре теории п. 1° этого параграфа, имеем: $p_\rho=\partial V/\partial\rho$, $p_\varphi=\partial V/\partial\varphi$, $p_\theta=\partial V/\partial\theta$ и функция H принимает вид

$$H=\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2\right]+mg\rho\cos\theta. \qquad (1)$$

Внеся выражение (1) в формулу (5*), получим искомое уравнение Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2\right]+mg\rho\cos\theta=0.$$

Задача 17.22. Составить уравнение Гамильтона—Якоби для описания движения физического маятника, если P — его вес, I_z — момент инерции относительно оси привеса, a — расстояние от точки привеса до центра тяжести маятника. В качестве обобщенной координаты выбрать угол φ отклонения маятника от вертикали.

Решение. В формуле (7) задачи 17.15 дана соответствующая функция Гамильтона

$$H=\frac{1}{2I_z}p_\varphi^2-Pa\cos\varphi.$$

На основании формулы (3*), приведенной в обзоре теории п. 1° этого параграфа, имеем

$$p_\varphi=\frac{\partial V}{\partial\varphi},$$

и функция H принимает вид

$$H=\frac{1}{2I_z}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)^2-Pa\cos\varphi. \qquad (1)$$

Использовав выражение (1) в формуле (5*), получим искомое уравнение Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2I_z}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)^2-Pa\cos\varphi=0.$$

3°. **Интегрирование уравнения Гамильтона—Якоби методом отделения переменных. Определение первых интегралов канонических уравнений с помощью уравнения Гамильтона—Якоби.** Из теории дифференциальных уравнений известно, что полный интеграл уравнения в частных производных (не отождествлять полный интеграл с общим интегралом, который в этой книге не рассматривается) содержит постоянные интегрирования в числе, равном числу независимых переменных. Искомая производящая функция $V=V(t, q_i, \xi_i)$, где $i=1, 2, \ldots, s$, дает,

возможность совершить каноническое преобразование к постояниым координатам $\xi_l=\alpha_l=\text{const}$ и постоянным импульсам $\eta_l=\beta_l=\text{const}$, т. е. $V=V(t, q_l, \alpha_l)$, где $l=1, 2, \ldots, s$. Поэтому функция V зависит от $s+1$ переменной (время t и s координат q_l), и значит, полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби содержит $s+1$ постоянную интегрирования.

Одна из постоянных (α_{s+1}) может стоять отдельным слагаемым, ибо искомая производящая функция V входит в уравнение Гамильтона—Якоби (5*)

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(t, q_l, \frac{\partial V}{\partial q_l}\right)=0$$

только под знаком частных производных $\partial V/\partial t$ и $\partial V/\partial q_l$. Поэтому в результате интегрирования уравнення Гамильтона—Якоби искомая функция V определится в виде

$$V=S(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)+\alpha_{s+1}, \qquad (6^*)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ являются новыми постоянными координатами и одновременно — постоянными интегрирования. Заметив, что $\partial V/\partial t= \partial S/\partial t$ и $\partial V/\partial q_l=\partial S/\partial q_l$, впредь будем пользоваться уравнением Гамильтона—Якоби в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t, q_l, \frac{\partial S}{\partial q_l}\right)=0, \qquad (7^*)$$

где $l=1, 2, \ldots, s$.

Интегрирование уравнения Гамильтона—Якоби (7*), подобно интегрированию канонических уравнений, представляет значительные трудности. В некоторых случаях, указанных ниже, можно несколько облегчить интегрирование применением *метода отделения переменных.*

Напомним, что функция Гамильтона зависит, вообще говоря, от времени, обобщениых координат q_l и сопряженных с ними обобщенных импульсов p_l, т. е. $H=H(t, q_l, p_l)$, где $l=1, 2, \ldots, s$ — число степеней свободы материальной системы.

Рассмотрим случай, когда в H входят сопряженные переменные q_1 и p_1 в виде функции $\varphi_1=\varphi_1(q_1, p_1)$, не содержащей других переменных, т. е.

$$H=H[t, \varphi_1(q_1, p_1), q_l, p_l] \qquad (l=2, 3, \ldots, s).$$

Такая структура функции Гамильтона дает возможность упростить интегрирование уравнения Гамильтона—Якоби (7*) методом отделения переменных. Это уравнение в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left[t, \varphi_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), q_l, \frac{\partial S}{\partial q_l}\right]=0, \qquad (8^*)$$

где $l=1, 2, \ldots, s$.

Если в искомой производящей функции S отделить переменную q_1, т. е. записать ее в виде

$$S = S_1(q_1) + S_0(t, q_l) \qquad (l = 2, 3, \ldots, s), \tag{9*}$$

то уравнение Гамильтона—Якоби (8*) приводится к двум уравнениям

$$\varphi_1\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \alpha_1, \quad \text{где} \quad \alpha_1 = \text{const} \tag{10*}$$

и

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + H\left(t, \alpha_1, q_l, \frac{\partial S_0}{\partial q_l}\right) = 0 \qquad (l = 2, 3, \ldots, s). \tag{11*}$$

Дифференциальное уравнение (10*) является обыкновенным, а уравнение (11*), хотя и остается в частных производных, но в нем число переменных уменьшится на единицу. Тем самым упрощается его интегрирование.

Аналогично, если в функцию Гамильтона H входит не одна пара, а l пар сопряженных переменных q_j, p_j в виде функций $\varphi_j = \varphi_j(q_j, p_j)$, где $j = 1, 2, \ldots, l$, причем φ_j не содержит других переменных, т. е.

$$H = H[t, \varphi_j(q_j, p_j), q_i, p_i],$$

где $j = 1, 2, \ldots, l$, $i = l+1, l+2, \ldots, s$, то в искомой производящей функции S можно отделить переменные и записать ее в виде

$$S = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \ldots + S_l(q_l) + S_0(t, q_i), \tag{12*}$$

где

$$i = l+1, \quad l+2, \ldots, s.$$

В этом случае уравнение Гамильтона—Якоби приводится к l обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\varphi_1\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \alpha_1, \quad \varphi_2\left(q_2, \frac{dS_2}{dq_2}\right) = \alpha_2, \ \ldots, \ \varphi_l\left(q_l, \frac{dS_l}{dq_l}\right) = \alpha_l \tag{13*}$$

и одному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + H\left(t, \alpha_j, q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i}\right) = 0, \tag{14*}$$

где $j = 1, 2, \ldots, l$, $i = l+1, l+2, \ldots, s$. Это уравнение интегрировать легче, чем исходное уравнение (7*). (В уравнении (7*) $s+1$ переменная: $t, q_1, q_2, \ldots, q_s$, а в уравнении (14*) $s-l+1$ переменная: $t, q_{l+1}, q_{l+2}, \ldots, q_s$, т. е. в уравнении (14*) на l переменных меньше.)

Методом отделения переменных удобно также пользоваться при наличии циклических координат. Так, если имеется l циклических координат $q_1, q_2, \ldots, q_l$, где $l < s$, то искомую производящую

функцию S можно записать в виде

$$S=\alpha_1 q_1+\alpha_2 q_2+\ldots+\alpha_l q_l+S_0(t,\ q_{l+1},\ q_{l+2},\ \ldots,\ q_s). \qquad (15^*)$$

Для определения S_0 надо решить уравнение Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial S_0}{\partial t}+H\left(t,\ q_{l+1},\ q_{l+2},\ \ldots,\ q_s,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_l,\ \frac{\partial S_0}{\partial q_{l+1}},\ \frac{\partial S_0}{\partial q_{l+2}},\ \ldots,\ \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right)=0. \qquad (16^*)$$

Уравнение (16*) содержит уже не $s+1$, а только $s-l+1$ переменных, т. е. число переменных уменьшилось на число l циклических координат.

Если связи стационарны, то полная механическая энергия $h=T+\Pi$ является одним из первых интегралов канонических уравнений. В этом случае производящую функцию S можно записать в виде

$$S=-ht+S_0(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{s-1},\ h), \qquad (17^*)$$

где роль α_s играет полная механическая энергия h.

Для определения функции S_0 надо решить следующее уравнение Гамильтона—Якоби:

$$H\left(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ \frac{\partial S_0}{\partial q_1},\ \frac{\partial S_0}{\partial q_2},\ \ldots,\ \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right)=h. \qquad (18^*)$$

Если при наличии l циклических координат система также консервативна, то искомая производящая функция S имеет вид

$$S=-ht+\alpha_1 q_1+\alpha_2 q_2+\ldots+\alpha_l q_l+S_0(q_{l+1},\ q_{l+2},\ \ldots,\ q_s), \qquad (19^*)$$

где h — полная механическая энергия материальной системы.

В этом случае для определения S_0 надо решить уравнение Гамильтона—Якоби

$$H\left(q_{l+1},\ q_{l+2},\ \ldots,\ q_s,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s,\ \frac{\partial S_0}{\partial q_{l+1}},\ \frac{\partial S_0}{\partial q_{l+2}},\ \ldots,\ \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right)=h. \qquad (20^*)$$

Уравнение (20*) содержит только $s-l$ переменных.

Наконец, если материальная система по-прежнему *консервативна* и все обобщенные координаты, кроме одной q_s, являются циклическими, то

$$S=-ht+\alpha_1 q_1+\alpha_2 q_2+\ldots+\alpha_{s-1} q_{s-1}+S_0(q_s). \qquad (21^*)$$

При этом уравнение в частных производных (20*) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$H\left(q_s,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{s-1},\ \frac{dS_0}{dq_s}\right)=h, \qquad (22^*)$$

где h — полная механическая энергия материальной системы.

Решение задач динамики материальной системы с помощью уравнения Гамильтона—Якоби рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1) составить уравнение Гамильтона—Якоби (см. п. 2° этого параграфа)

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t,\ q_i,\ \frac{\partial S}{\partial q_i}\right)=0,$$

где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$ — число степеней свободы материальной системы;

2) решить уравнение Гамильтона—Якоби и найти производящую функцию S

$$S=S(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s),$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$ являются новыми, пока неизвестными постоянными обобщенными координатами и одновременно — постоянными интегрирования;

3) применив формулы

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i},\qquad \beta_i=-\frac{\partial S}{\partial \alpha_i},\tag{23*}$$

где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$, найти

$$p_i=p_i(t,\ q_i,\ \alpha_i),\qquad \beta_i=\beta_i(t,\ q_i,\ \alpha_i),\tag{24*}$$

где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$ (напомним, что p_i — старые обобщенные импульсы, а β_i — новые, пока неизвестные постоянные обобщенные импульсы);

4) решив систему $2s$ алгебраических уравнений (24*) относительно q_i и p_i, найти канонические переменные

$$q_i=q_i(t,\ \alpha_i,\ \beta_i),\qquad p_i=p_i(t,\ \alpha_i,\ \beta_i),\tag{25*}$$

где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$. Здесь α_i и β_i — новые, пока неизвестные постоянные канонические переменные, которые одновременно являются постоянными интегрирования:

5) использовав $2s$ начальных условий движения: при $t=0$ дано $q_i=q_{i0}$, $p_i=p_{i0}$, определить $2s$ постоянных интегрирования α_i и β_i, где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$. Подставив их значения в (25*), найти первые интегралы канонических уравнений, т. е. искомые канонические переменные

$$q_i=q_i(t),\qquad p_i=p_i(t).$$

Если материальная система консервативна и производящая функция S ищется в виде (17*), то формулы (23*) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}p_i&=\frac{\partial S_0}{\partial q_i},\quad \text{где}\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ s;\\ \beta_i&=-\frac{\partial S_0}{\partial \alpha_i},\quad \text{где}\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1,\end{aligned}\right\}\tag{26*}$$

$$\beta_s=-\frac{\partial S}{\partial h}=t-\frac{\partial S_0}{\partial h}.\tag{27*}$$

Заметим, что $2s-1$ уравнений (26*) не содержит явно времени. Они называются *уравнениями траектории*. Уравнение (27*), содержащее явно время, иногда называется уравнением движения по траектории. (Напомним, что уравнения Лагранжа второго рода не дают возможности непосредственно, отдельно получить уравнения траектории и уравнения движения. В этом преимущество использования канонических уравнений.) В уравнениях (26*) и (27*) содержится $2s$ постоянных интегрирования $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, h, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$. Для их определения должны быть заданы $2s$ начальных условий движения: при $t=0$ дано $q_i=q_{i0}$, $p_i=p_{i0}$, где $i=1, 2, \ldots, s$.

Задача 17.23. Найти закон малых колебаний математического маятника с помощью уравнения Гамильтона—Якоби. В начальный момент маятник находился в покое, а его нить длиной l была отклонена от вертикали на угол φ_0. Силами сопротивления движению пренебречь.

К задаче 17.23.

Решение. Математический маятник имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты q выберем угол φ отклонения маятника от вертикали, т. е. $q=\varphi$.

Так как сила тяжести потенциальна, а нить постоянной длины l реализует стационарную связь, то функция Гамильтона H равна полной механической энергии, т. е.

$$H=T+\Pi=h. \tag{1}$$

Кинетическая энергия маятника, являющегося точечной массой, равна

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2. \tag{2}$$

Обобщенный импульс p_φ, вычисляемый по формуле $p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$, равен

$$p_\varphi=ml^2\dot{\varphi}, \tag{3}$$

откуда найдем

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{ml^2}. \tag{4}$$

Потенциальная энергия маятника определяется (см. рисунок) по формуле $\Pi=mg\Delta x$, где $\Delta x=l(1-\cos\varphi)$, т. е.

$$\Pi=mgl(1-\cos\varphi). \tag{5}$$

Разложение $\cos\varphi$ в ряд по степеням φ имеет вид $\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2}+\frac{\varphi^4}{4!}-\ldots$ Считая колебания маятника малыми, ограничимся первыми двумя членами разложения, т. е. примем $\cos\varphi\approx 1-\frac{\varphi^2}{2}$. Теперь потенциальная энергия (5) запишется в виде

$$\Pi=\frac{mgl}{2}\varphi^2. \tag{6}$$

Использовав формулы (2) и (6) в выражении (1), найдем

$$H=\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2+\frac{mgl}{2}\varphi^2. \tag{7}$$

Функция Гамильтона H должна быть выражена в зависимости от обобщенных координат и обобщенных импульсов. Поэтому, внеся в (7) значение $\dot{\varphi}$ из формулы (4), получим

$$H=\frac{1}{2ml^2}p_\varphi^2+\frac{mgl}{2}\varphi^2. \tag{8}$$

Напомним, что решение задачи об определении первых интегралов канонических уравнений с помощью уравнения Гамильтона—Якоби сводится к отысканию производящей функции S. Эта функция дает возможность совершить каноническое преобразование от старых переменных обобщенных координат и импульсов к новым постоянным координатам и импульсам. В данном случае старым переменным φ и p_φ соответствуют новые, пока неизвестные постоянные α и β. В соответствии с формулой (17*), приведенной в обзоре теории, в данном случае при $s=1$ искомая производящая функция S имеет вид

$$S=-ht+S_0(\varphi,\ h), \tag{9}$$

где h — полная механическая энергия, причем $\alpha=h$. Этой постоянной h соответствует постоянный обобщенный импульс β, подлежащий, подобно h, последующему определению.

Для вычисления функции S_0 применим уравнение Гамильтона—Якоби (18*), приведенное в обзоре теории. В данном случае при $s=1$ и $q=\varphi$ имеем

$$H\left(\varphi,\ \frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)=h. \tag{10}$$

Заменив в выражении (8) p_φ на $\partial S_0/\partial\varphi$ и затем внеся его в уравнение (10), получим уравнение Гамильтона—Якоби в виде

$$\frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{mgl}{2}\varphi^2=h.$$

Так как S_0 зависит только от одной переменной φ [см. (9)], то $\dfrac{\partial S_0}{\partial\varphi}=\dfrac{dS_0}{d\varphi}$ и, значит,

$$\frac{1}{2ml^2}\left(\frac{dS_0}{d\varphi}\right)^2+\frac{mgl}{2}\varphi^2=h. \tag{11}$$

Итак, уравнение Гамильтона—Якоби в частных производных в данном случае оказалось приведенным к обыкновенному дифференциальному уравнению (11). Решив уравнение (11) относительно $dS_0/d\varphi$, получим

$$\frac{dS_0}{d\varphi}=l\sqrt{2m}\sqrt{h-\frac{mgl}{2}\varphi^2}.$$

После разделения переменных и интегрирования найдем

$$S_0 = l\sqrt{2m}\int\sqrt{h - \frac{mgl}{2}\varphi^2}\,d\varphi. \qquad (12)$$

Внеся значение (12) в выражение производящей функции (9), будем иметь

$$S = -ht + l\sqrt{2m}\int\sqrt{h - \frac{mgl}{2}\varphi^2}\,d\varphi. \qquad (13)$$

Теперь нетрудно применить формулы (26*) и (27*), приведенные в обзоре теории. При $s = 1$ имеем

$$\left.\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial S_0}{\partial\varphi} = -l\sqrt{2m}\int\frac{mgl\varphi\,d\varphi}{2\sqrt{h - \frac{mgl}{2}\varphi^2}}, \\ \beta &= -\frac{\partial S}{\partial h} = t - l\sqrt{2m}\int\frac{d\varphi}{2\sqrt{h - \frac{mgl}{2}\varphi^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Вычислив интегралы, стоящие в формулах (14), найдем

$$p_\varphi = l\sqrt{2m\left(h - \frac{mgl}{2}\varphi^2\right)}, \quad \beta = t - \sqrt{\frac{l}{g}}\arcsin\sqrt{\frac{mgl}{2h}}\,\varphi. \qquad (15)$$

Как следует из выражений (15), новой постоянной координатой оказалась полная механическая энергия h, а новый постоянный импульс β, сопряженный с координатой h, имеет размерность времени.

Для определения h и β воспользуемся начальными условиями движения маятника: при $t = 0$ имеем $\varphi = \varphi_0$, $\dot\varphi = \dot\varphi_0 = 0$. Применив формулу (3), найдем: $p_{\varphi_0} = ml^2\dot\varphi_0 = 0$.

Подставив в уравнения (15) $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $p_\varphi = p_{\varphi_0} = 0$, получим

$$h = \frac{mgl}{2}\varphi_0^2, \quad \beta = -\sqrt{\frac{l}{g}}\arcsin\sqrt{\frac{mgl}{2h}}\,\varphi_0. \qquad (16)$$

Внеся значения (16) в уравнения (15), после несложных преобразований найдем искомые первые интегралы канонических уравнений

$$p_\varphi = ml\sqrt{gl(\varphi_0^2 - \varphi^2)}, \qquad \varphi = \varphi_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Конечно, уравнение $\varphi = \varphi_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ можно было легко получить, применив дифференциальное уравнение вращения вокруг неподвижной оси $ml^2\ddot\varphi = -mgl\sin\varphi$, и затем, положив $\sin\varphi \approx \varphi$, его проинтегрировать. Однако, решив задачу с помощью уравнения Гамильтона — Якоби, удалось выяснить физический смысл новых сопряженных канонических постоянных. Ими оказались полная механическая энергия h и время t. Этот результат играет существенную роль в квантовой механике.

Задача 17.24. Найти закон движения и уравнение траектории свободной материальной точки массы m, движущейся в поле силы тяжести. В качестве обобщенных выбрать декартовы координаты x, y, z. Решить задачу с помощью уравнения Гамильтона—Якоби.

Решение. В задаче 17.20 было получено уравнение Гамильтона—Якоби (см. (2)).

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]+mgz=0. \quad (1)$$

Воспользовавшись формулой (6*), данной в обзоре теории, запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+mgz=0. \quad (2)$$

Так как в данном случае имеет место интеграл энергии, а координаты x и y являются циклическими, то, применив метод отделения переменных, в соответствии с формулой (21*), приведенной в обзоре теории, будем искать производящую функцию S в виде

$$S=-ht+\alpha_1 x+\alpha_2 y+S_0(z), \quad (3)$$

где h — полная механическая энергия, α_1 и α_2 — новые постоянные координаты, одновременно являющиеся постоянными интегрирования. Заметим, что h, α_1, α_2 и $S_0(z)$ пока неизвестны.

Вычислив производные функции (3) по t, x, y и z, получим

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-h, \quad \frac{\partial S}{\partial x}=\alpha_1, \quad \frac{\partial S}{\partial y}=\alpha_2, \quad \frac{\partial S}{\partial z}=\frac{\partial S_0}{\partial z}=\frac{dS_0}{dz}. \quad (4)$$

Внеся результаты (4) в уравнение (2), найдем

$$\frac{1}{2m}\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2+\left(\frac{dS_0}{dz}\right)^2\right]+mgz=h. \quad (5)$$

Итак, благодаря интегралу энергии, а также наличию двух циклических координат x и y уравнение Гамильтона—Якоби (2) в частных производных превратилось в обыкновенное дифференциальное уравнение (5). Это уравнение можно было непосредственно получить, применив формулу (22*), приведенную в обзоре теорий.

Решив уравнение (5) относительно dS_0/dz, найдем

$$\frac{dS_0}{dz}=\sqrt{2m(h-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2}. \quad (6)$$

Разделив переменные в дифференциальном уравнении (6) и проинтегрировав его, получим

$$S_0=\int\sqrt{2m(h-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\,dz. \quad (7)$$

Внеся значение (7) в выражение (3) производящей функции S, найдем

$$S=-ht+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\int\sqrt{2m(h-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\,dz. \quad (8)$$

Здесь пока неизвестны h, α_1 и α_2.

Для установления зависимости между старыми переменными обобщенными координатами x, y, z и старыми импульсами p_x, p_y, p_z, а также новыми постоянными координатами h, α_1, α_2 и новыми постоянными импульсами β_1, β_2, β_3, применим формулы (23*), приведенные в обзоре теории:

$$p_x=\frac{\partial S}{\partial x}=\alpha_1,\quad p_y=\frac{\partial S}{\partial y}=\alpha_2,\quad p_z=\frac{\partial S}{\partial z}=\sqrt{2m(h-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2}, \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\beta_1=-\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=-x-\frac{\partial S_0}{\partial \alpha_1},\qquad \beta_2=-\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=-y-\frac{\partial S_0}{\partial \alpha_2},\\ \beta_3=-\frac{\partial S}{\partial h}=t-\frac{\partial S_0}{\partial h}.\end{gathered} \tag{10}$$

Воспользовавшись результатом (7), найдем

$$\frac{\partial S_0}{\partial \alpha_1}=\int\frac{-\alpha_1\,dz}{\sqrt{2m(h-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2}},\qquad \frac{\partial S_0}{\partial \alpha_2}=\int\frac{-\alpha_2\,dz}{\sqrt{2m(h-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2}},$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial h}=\int\frac{m\,dz}{\sqrt{2m(h-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2}}.$$

Вычислив эти интегралы, получим

$$\frac{\partial S_0}{\partial \alpha_1}=\frac{\alpha_1}{m^2g}\sqrt{2m(h-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2},\qquad \frac{\partial S_0}{\partial \alpha_2}=\frac{\alpha_2}{m^2g}\sqrt{2m(h-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2},$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial h}=-\frac{1}{mg}\sqrt{2m(h-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2}.$$

Теперь уравнения (10) принимают вид

$$\begin{gathered}\beta_1=-x-\frac{\alpha_1}{m^2g}\sqrt{2m(h-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2},\\ \beta_2=-y-\frac{\alpha_2}{m^2g}\sqrt{2m(h-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2},\end{gathered} \tag{11}$$

$$\beta_3=t+\frac{1}{mg}\sqrt{2m(h-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2}. \tag{12}$$

Итак, получена система шести уравнений (9), (11) и (12), устанавливающих зависимость между старыми каноническими переменными x, y, z, p_x, p_y, p_z и новыми каноническими постоянными h, α_1, α_2, β_1, β_2, β_3, которые одновременно являются постоянными интегрирования.

Для определения постоянных интегрирования должны быть заданы начальные условия движения: при $t=0$ пусть даны $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, $p_x=p_{x_0}$, $p_y=p_{y_0}$, $p_z=p_{z_0}$.

Два уравнения (11) являются искомыми уравнениями траектории материальной точки (траекторией является кривая, по которой пересекаются цилиндрические поверхности, описанные уравнениями (11)). Уравнение (12), содержащее явно время, определяет искомый закон движения материальной точки.

В заключение получим с помощью формул (9), (11) и (12) уравнения свободного падения материальной точки, происходящего вдоль

оси z с высоты a. Как известно, уравнения траектории — оси z — имеют вид

$$x = y = 0, \tag{13}$$

а закон движения дается уравнением

$$z = a - \frac{gt^2}{2}. \tag{14}$$

В этом случае начальные условия движения таковы:

$$\text{при } t = 0 \text{ имеем } x = 0,\ y = 0,\ z = a,\ \dot{x} = 0,\ \dot{y} = 0,\ \dot{z} = 0. \tag{15}$$

В соответствии с формулой (2) задачи 17.7 а) запишем обобщенные импульсы:

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

При $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ начальные значения обобщенных импульсов будут

$$p_{x_0} = 0, \quad p_{y_0} = 0, \quad p_{z_0} = 0. \tag{16}$$

Внеся (15) и (16) в уравнения (9), найдем

$$0 = \alpha_1, \quad 0 = \alpha_2, \quad 0 = \sqrt{2m(h - mga) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}. \tag{17}$$

Использовав начальные условия (15) в уравнениях (11) и (12), получим

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{\alpha_1}{m^2 g}\sqrt{2m(h - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}, \\ \beta_2 &= -\frac{\alpha_2}{m^2 g}\sqrt{2m(h - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}, \\ \beta_3 &= \frac{1}{mg}\sqrt{2m(h - mga) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Решив систему уравнений (17) и (18), найдем

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\quad h = mga,\quad \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 0. \tag{19}$$

Внесение значений (19) в уравнения (11) и (12) приводит к формулам (13) и (14):

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = a - \frac{gt^2}{2}.$$

Конечно, применение уравнения Гамильтона—Якоби при решении столь простой задачи нецелесообразно. Оно было дано для иллюстрации использования метода отделения переменных при интегрировании уравнения Гамильтона—Якоби.

Задача 17.25. Найти уравнения движения и уравнение траектории материальной точки, движущейся в плоскости под действием центральной силы, если потенциальная энергия равна $\Pi = \Pi(r)$, где r — переменное расстояние от материальной точки до неподвижного центра. Применить уравнение Гамильтона—Якоби в полярных координатах.

Даны начальные условия движения: при $t = 0$ имеем $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, $r = r_0$, $\dot{r} = \dot{r}_0$.

Решение. Материальная точка, движущаяся в плоскости, имеет две степени свободы. В качестве обобщенных примем полярные координаты точки, т. е. $q_1=r$, $q_2=\varphi$.

Кинетическая энергия материальной точки равна

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2), \tag{1}$$

где m — масса материальной точки,

Обобщенные импульсы p_r и p_φ равны

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}, \qquad p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}. \tag{2}$$

Решив уравнения (2) относительно $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$, имеем

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2}. \tag{3}$$

Так как свободная материальная точка движется в потенциальном поле, то функции Гамильтона H равна ее полной механической энергии h, т. е.

$$H=h, \tag{4}$$

где

$$h=T+\Pi. \tag{5}$$

По условию $\Pi=\Pi(r)$. Поэтому, учтя выражение (1), найдем

$$h=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\Pi(r). \tag{6}$$

Координата φ явно не входит в (6) и поэтому является циклической.

При подстановке выражения (6) в функцию Гамильтона (4) надо использовать соотношения (3). Получим

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)+\Pi(r). \tag{7}$$

Напомним, что в случае консервативной материальной системы уравнение Гамильтона—Якоби имеет вид

$$H=h. \tag{8}$$

Используя в (8) функцию Гамильтона (7), надо заменить в ней p_r на $\partial S/\partial r$, а p_φ — на $\partial S/\partial\varphi$, где S — пока неизвестная производящая функция. Выполнив эти замены в (8), получим уравнение Гамильтона—Якоби

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right]+\Pi(r)=h. \tag{9}$$

Так как система консервативна, а координата φ является циклической, то, использовав формулу (21*), приведенную в обзоре теории, запишем

$$S=-ht+\alpha\varphi+S_0(r), \tag{10}$$

где механическая энергия h и постоянная α одновременно являются новыми постоянными обобщенными координатами, подлежащими последующему определению.

Использовав функцию (10), найдем

$$\frac{\partial S}{\partial r}=\frac{\partial S_0}{\partial r}=\frac{dS_0}{dr}, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi}=\alpha. \tag{11}$$

Внесем результаты (11) в уравнение Гамильтона—Якоби (9):

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_0}{dr}\right)^2+\frac{\alpha^2}{r^2}\right]+\Pi(r)=h. \tag{12}$$

Оно в данном случае оказалось обыкновенным дифференциальным уравнением.

Решив уравнение (12) относительно dS_0/dr, получим

$$\frac{dS_0}{dr}=\sqrt{2m(h-\Pi)-\frac{\alpha^2}{r^2}}, \tag{13}$$

откуда $dS_0=\sqrt{2m(h-\Pi)-\frac{\alpha^2}{r^2}}\,dr$, т. е.

$$S_0=\int\sqrt{2m(h-\Pi)-\frac{\alpha^2}{r^2}}\,dr. \tag{14}$$

Внеся результат (14) в формулу (10), получим преобразующую функцию в виде

$$S=-ht+\alpha\varphi+\int\sqrt{2m(h-\Pi)-\frac{\alpha^2}{r^2}}\,dr. \tag{15}$$

Для определения зависимостей между старыми обобщенными координатами r, φ и старыми обобщенными импульсами p_r, p_φ, а также новыми — постоянными обобщенными координатами h, α и новыми — постоянными обобщенными импульсами β_1 и β_2, применим формулы (23*), приведенные в обзоре теории. В данном случае эти формулы имеют вид

$$p_r=\frac{\partial S}{\partial r}, \qquad p_\varphi=\frac{\partial S}{\partial \varphi}, \qquad \beta_1=-\frac{\partial S}{\partial \alpha}, \qquad \beta_2=-\frac{\partial S}{\partial h}.$$

Использовав выражения (13) и (15), получим

$$p_r=\frac{dS_0}{dr}=\sqrt{2m(h-\Pi)-\frac{\alpha^2}{r^2}}, \quad p_\varphi=\alpha, \tag{16}$$

$$\beta_1=-\varphi-\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\sqrt{2m(h-\Pi)-\frac{\alpha^2}{r^2}}\,dr, \tag{17}$$

$$\beta_2=t-\frac{\partial}{\partial h}\int\sqrt{2m(h-\Pi)-\frac{\alpha^2}{r^2}}\,dr. \tag{18}$$

Вычислив частные производные в (17) и (18), запишем:

$$\beta_1 = -\varphi + \int \frac{\alpha\, dr}{r^2 \sqrt{2m(h-\Pi) - \frac{\alpha^2}{r^2}}}, \tag{19}$$

$$\beta_2 = t - \int \frac{m\, dr}{\sqrt{2m(h-\Pi) - \frac{\alpha^2}{r^2}}}. \tag{20}$$

Уравнения (16), (19) и (20) содержат четыре неизвестных постоянных h, α, β_1 и β_2. Для вычисления их воспользуемся начальными условиями движения: при $t=0$ имеем $r=r_0$, $\varphi=0$, $\dot r=\dot r_0$, $\dot\varphi=\dot\varphi_0$. Значение потенциальной энергии Π в момент $t=0$ обозначим через Π_0. Использовав выражения (2) в формуле (16), запишем

$$m\dot r = \sqrt{2m(h-\Pi) - \frac{\alpha^2}{r^2}}, \quad mr^2\dot\varphi = \alpha. \tag{21}$$

Подставив во второе уравнение (21) $r=r_0$, $\dot\varphi=\dot\varphi_0$, найдем

$$\alpha = mr_0^2\dot\varphi_0. \tag{22}$$

Внеся в первое уравнение (21) $r=r_0$, $\dot r=\dot r_0$, $\Pi=\Pi_0$ и использовав результат (22), получим $m\dot r_0 = \sqrt{2m(h-\Pi_0) - m^2r_0^2\dot\varphi_0^2}$, откуда

$$h = \frac{m}{2}(\dot r_0^2 + r_0^2\dot\varphi_0^2) + \Pi_0. \tag{23}$$

Заметим, что формулу (23) можно было непосредственно получить, подставив в (6) $r=r_0$, $\dot r=\dot r_0$, $\dot\varphi=\dot\varphi_0$, $\Pi=\Pi_0$.

Внеся результаты (22) и (23) в уравнения (19) и (20), запишем

$$\beta_1 = -\varphi + mr_0^2\dot\varphi_0 \int \frac{dr}{r\sqrt{2mr^2\left[\frac{m}{2}(\dot r_0^2 + r_0^2\dot\varphi_0^2) + \Pi_0 - \Pi\right] - m^2r_0^4\dot\varphi_0^2}}, \tag{24}$$

$$\beta_2 = t - m\int \frac{r\, dr}{\sqrt{2mr^2\left[\frac{m}{2}(\dot r_0^2 + r_0^2\dot\varphi_0^2) + \Pi_0 - \Pi\right] - m^2r_0^4\dot\varphi_0^2}}. \tag{25}$$

Для вычисления интегралов, стоящих в (24) и (25), надо знать функциональную зависимость $\Pi = \Pi(r)$ (см. следующую задачу). Затем, использовав начальные условия движения, следует определить постоянные β_1 и β_2.

Соотношение (24) является искомым уравнением траектории материальной точки в полярных координатах, а выражение (25) — искомым уравнением движения точки.

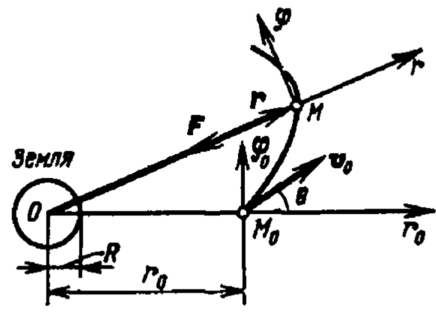
Задача 17.26. Воспользовавшись условием и решением предыдущей задачи, рассмотреть движение космического аппарата под действием силы притяжения, обратно пропорциональной квадрату расстояния от аппарата до центра Земли. Ускорение силы тяжести у поверхности Земли равно g, R — радиус Земли.

Найти уравнение траектории и уравнение движения аппарата, считая его материальной точкой.

В начальный момент аппарат отстоял от центра Земли на расстоянии r_0 и имел начальную скорость v_0, образующую угол θ с вертикалью (см. рисунок). Силой сопротивления движению пренебречь.

Решение. Проекции начальной скорости v_0 на оси r_0 и φ_0 равны

$$v_{r_0} = \dot{r}_0 = v_0 \cos\theta, \quad v_{\varphi_0} = r_0\dot{\varphi}_0 = v_0 \sin\theta. \tag{1}$$



К задаче 17.26.

По условию проекция F_r силы притяжения F на ось r выражается зависимостью

$$F_r = -\frac{k}{r^2}, \tag{2}$$

где k — коэффициент, подлежащий последующему определению. На поверхности Земли, т. е. при $r = R$, сила F равна силе тяжести P. Поэтому для определения коэффициента k внесем в формулу (2) значения $r = R$, $F_r = -P = -mg$, где буквой m обозначена масса аппарата. Получим $-mg = -k/R^2$, откуда $k = mgR^2$. Подставив это значение k в формулу (2), найдем

$$F_r = -\frac{mgR^2}{r^2}. \tag{3}$$

Перейдем к вычислению потенциальной энергии П. Напомним, что потенциальная энергия равна величине работы потенциальной силы при перемещении материальной точки из данного положения в нулевое. Приняв во внимание, что при $r \to \infty$ мы имеем $F \to 0$, запишем

$$П = \int_r^\infty F_r\, dr.$$

Использовав выражение (3), найдем

$$П = -mgR^2 \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = mgR^2 \cdot \frac{1}{r}\Big|_r^\infty,$$

т. е.

$$П = -\frac{mgR^2}{r}. \tag{4}$$

В начальном положении аппарата при $r = r_0$ имеем

$$П_0 = -\frac{mgR^2}{r_0}. \tag{5}$$

Использовав зависимости (1), (4) и (5) в формулах предыдущей задачи (19), (20), (22) и (23), запишем:

$$\beta_1 = -\varphi + \int \frac{\alpha\, dr}{r^2 \sqrt{2mh + \frac{2m^2gR^2}{r} - \frac{\alpha^2}{r^2}}}, \tag{6}$$

$$\beta_2 = t - \int \frac{mr\, dr}{\sqrt{2mhr^2 + 2m^2gR^2r - \alpha^2}}, \tag{7}$$

$$\alpha = mr_0v_0 \sin\theta, \tag{8}$$

$$h = \frac{m}{2r_0}(r_0v_0^2 - 2gR^2). \tag{9}$$

После вычисления интегралов, стоящих в формулах (6) и (7), получим искомое уравнение траектории и уравнение движения ракеты.

Обозначим интеграл формулы (6) через A. Сделав подстановку

$$\frac{1}{r} = z \tag{10}$$

и найдя $-dr/r^2 = dz$, запишем:

$$A = \int \frac{\alpha\, dz}{\sqrt{2mh + 2m^2gR^2z - \alpha^2z^2}}.$$

Добавив и отняв под знаком радикала $m^4g^2R^4/\alpha^2$, получим

$$A = \int \frac{\alpha\, dz}{\sqrt{\gamma^2 - \left(\alpha z - \frac{m^2gR^2}{\alpha}\right)^2}}, \tag{11}$$

где обозначено

$$\gamma = \sqrt{2mh + \frac{m^4g^2R^4}{\alpha^2}}. \tag{12}$$

Сделав в интеграле (11) подстановку

$$\alpha z - \frac{m^2gR^2}{\alpha} = x, \tag{13}$$

найдем $\alpha\, dz = dx$, т. е. $dz = dx/\alpha$. Теперь интеграл (11) примет вид $A = \int \frac{dx}{\sqrt{\gamma^2 - x^2}}$, т. е. $A = -\arccos\frac{x}{\gamma}$. Внеся это значение интеграла в формулу (6), найдем $\beta_1 = -\varphi - \arccos(x/\gamma)$, откуда

$$x = \gamma\cos(\varphi + \beta_1). \tag{14}$$

Использовав в уравнении (14) формулы (12) и (13), получим

$$\alpha z - \frac{m^2gR^2}{\alpha} = \gamma\cos(\varphi + \beta),$$

откуда

$$z = \frac{m^2gR^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha}\cos(\varphi + \beta_1).$$

Применив (10), запишем

$$r=\frac{1}{\frac{m^2gR^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}\cos(\varphi+\beta_1)},$$

т. е.

$$r=\frac{\frac{\alpha^2}{m^2gR^2}}{1+\frac{\alpha\gamma}{m^2gR^2}\cos(\varphi+\beta_1)}. \qquad (15)$$

Введя обозначения

$$p=\frac{\alpha^2}{m^2gR^2}, \qquad (16)$$

$$e=\frac{\alpha\gamma}{m^2gR^2}, \qquad (17)$$

$$\psi=\varphi+\beta_1, \qquad (18)$$

получим искомое уравнение (15) траектории аппарата в виде

$$r=\frac{p}{1+e\cos\psi}. \qquad (19)$$

Как известно из курса аналитической геометрии, уравнение (19) является уравнением кривых второго порядка в полярных координатах, причем p (см. (16)) называется параметром кривой, а e (см. (17)) — ее эксцентриситетом. Угол β_1, значение которого пока не определено, фиксирует положение оси симметрии кривой.

Внеся в (12) значения (8) и (9), найдем

$$\gamma=m\sqrt{\frac{1}{r_0}(r_0v_0^2-2gR^2)+\frac{g^2R^4}{r_0^2v_0^2\sin^2\theta}}. \qquad (20)$$

Затем, использовав в формулах (16) и (17) соотношения (8) и (20), получим

$$p=\frac{r_0^2v_0^2\sin^2\theta}{gR^2}, \qquad (21)$$

$$e=\sqrt{1+\frac{(r_0v_0^2-2gR^2)\,r_0v_0^2\sin^2\theta}{g^2R^4}}. \qquad (22)$$

Траектория аппарата является: а) окружностью при $e=0$, б) эллипсом при $0<e<1$, в) параболой при $e=1$, г) гиперболой при $e>1$ (см., например, подробнее исследоваие уравнения (19) в задаче 8.33 второго тома, стр. 72 — 74).

Определим угол β_1, фиксирующий положение оси симметрии траектории аппарата. Полярные координаты начального положения аппарата равны $r=r_0$, $\varphi=0$. Внеся эти значения в формулу (15), найдем

$$r_0=\frac{\frac{\alpha^2}{m^2gR^2}}{1+\frac{\alpha\gamma}{m^2gR^2}\cos\beta_1}. \qquad (23)$$

Решив уравнение (23) относительно $\cos\beta_1$, получим

$$\cos\beta_1=\frac{\alpha^2-m^2r_0gR^2}{r_0\alpha\gamma}.$$

Подставив в это равенство значения (8) и (20), после несложных преобразований найдем

$$\cos\beta_1=\frac{r_0v_0^2\sin^2\theta-gR^2}{\sqrt{r_0v_0^2(r_0v_0^2-2gR^2)\sin^2\theta+g^2R^4}}. \tag{24}$$

В заключение займемся определением уравнения движения аппарата по эллипсу. Для этого надо воспользоваться уравнением (7), в котором постоянная β_2 подлежит последующему определению. Введя обозначение

$$\mathrm{B}=\int\frac{mr\,dr}{\sqrt{2mhr^2+2m^2gR^2r-\alpha^2}}, \tag{25}$$

запишем уравнение (7) в виде

$$t-\beta_2=\mathrm{B}. \tag{26}$$

При движении аппарата по эллипсу эксцентриситет e меньше единицы. В соответствии с формулой (22) это имеет место при условии $r_0v_0^2-2gR^2<0$. При этом полная механическая энергия h (см. (9)) оказывается отрицательной: $h<0$.

Для вычисления интеграла (25) сделаем подстановку:

$$2mhr^2+2m^2gR^2r-\alpha^2=z. \tag{27}$$

Вычислив дифференциал (27), найдем

$$4mhr\,dr+2m^2gR^2\,dr=dz. \tag{28}$$

Приняв во внимание (27) и (28), запишем интеграл (25) в виде

$$\mathrm{B}=\frac{1}{4h}\int\frac{4mhr+2m^2gR^2}{\sqrt{2mhr^2+2m^2gR^2-\alpha^2}}dr-\frac{m^2gR^2}{2h}\int\frac{dr}{\sqrt{2mhr^2+2m^2gR^2-\alpha^2}},$$

т. е.

$$\mathrm{B}=\frac{1}{2h}\int\frac{dz}{2\sqrt{z}}-\frac{m^2gR^2}{2h}\int\frac{dr}{\sqrt{2mhr^2+2mgR^2r-\alpha^2}}. \tag{29}$$

Вычислив первый интеграл в (29), получим

$$\mathrm{B}=\frac{1}{2h}\sqrt{2mhr^2+2mgR^2r-\alpha^2}-\frac{m^2gR^2}{2h}\int\frac{dr}{\sqrt{2mhr^2+2mgR^2r-\alpha^2}}. \tag{30}$$

Для вычисления интеграла в (30) воспользуемся равенством

$$2mhr^2+2m^2gR^2r-\alpha^2=-\frac{m^3g^2R^4+2h\alpha^2}{2h}+\frac{m}{2h}(2rh+mgR^2)^2.$$

Затем обозначим

$$-\frac{m^3g^2R^4+2h\alpha^2}{2h}=a^2,\qquad \sqrt{-\frac{m}{2h}}\cdot(2rh+mgR^2)=x. \tag{31}$$

(Напомним, что $h < 0$.) Тогда

$$2h\sqrt{-\frac{m}{2h}}\,dr = dx, \quad \text{т. е.} \quad dr = \frac{dx}{\sqrt{-2mh}}.$$

Поэтому интеграл, стоящий в формуле (30), можно записать в виде

$$\int \frac{dr}{\sqrt{2mhr^2 + 2mgR^2 r - \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{-2mh}} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-2mh}} \arcsin \frac{x}{a}.$$

Использовав равенства (31), найдем

$$\int \frac{dr}{\sqrt{2mhr^2 + 2mgR^2 r - \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{-2mh}} \arcsin \frac{\sqrt{m}\,(2rh + mgR^2)}{\sqrt{m^2 g^2 R^4 + 2h\alpha^2}}. \qquad (32)$$

Внеся выражение (32) в формулу (30), получим значение B. Затем подставив его в уравнение (26), найдем

$$t - \beta_2 = \frac{1}{2h}\sqrt{2mhr^2 + 2mgR^2 r - \alpha^2} - \frac{mgR^2\sqrt{-2mh}}{4h^2} \arcsin \frac{\sqrt{m}\,(2rh + mgR^2)}{\sqrt{m^2 g^2 R^4 + 2h\alpha^2}}. \qquad (33)$$

Для определения постоянной интегрирования β_2 подставим в (33) начальное условие движения: при $t = 0$ имеем $r = r_0$. Найдем

$$\beta_2 = -\frac{1}{2h}\sqrt{2mhr_0^2 + 2mgR^2 r_0 - \alpha^2} + \frac{mgR^2\sqrt{-2mh}}{4h^2} \arcsin \frac{\sqrt{m}\,(2r_0 h + mgR^2)}{\sqrt{m^2 g^2 R^4 + 2h\alpha^2}}.$$

Внесем это значение β_2 в формулу (33) и одновременно заменим в ней α и h с помощью выражений (8) и (9). После несложных преобразований окончательно получим

$$t = \frac{r_0}{r_0 v_0^2 - 2gR^2}\left[\sqrt{\frac{r^2}{r_0}(r_0 v_0^2 - 2gR^2) + 2gR^2 r - r_0^2 v_0^2 \sin^2\theta} - r_0 v_0 \cos\theta\right] + \frac{gR^2 r_0 \sqrt{r_0(2gR^2 - r_0 v_0^2)}}{(r_0 v_0^2 - 2gR^2)^2}\left[\arcsin \frac{r_0 v_0^2 - gR^2}{\sqrt{g^2 R^4 - (r_0 v_0^2 - 2gR^2)\, r_0 v_0^2 \sin^2\theta}} - \arcsin \frac{\frac{r}{r_0}(r_0 v_0^2 - 2gR^2) + gR^2}{\sqrt{g^2 R^4 + (r_0 v_0^2 - 2gR^2)\, r_0 v_0^2 \sin^2\theta}}\right]. \qquad (34)$$

Напомним, что в этом искомом уравнении движения аппарата по эллипсу переменными величинами являются r и t, начальное положение аппарата определено параметрами r_0, v_0 и θ, g — ускорение силы тяжести у поверхности Земли, R — радиус Земли. Движение аппарата по эллиптической орбите имеет место при выполнении условия $r_0 v_0^2 - 2gR^2 < 0$.

Аналогично можно получить уравнения движения космического аппарата по параболе и по гиперболе.

Применение уравнения Гамильтона — Якоби при решении двух последних задач оказалось целесообразным, ибо дало возможность одновременно определить как уравнения движения, так и уравнения траектории точки.

§ 5. Принцип Гамильтона — Остроградского

Рассмотрим голономную материальную систему с тремя степенями свободы. Любому частному значению времени $t=t^*$ соответствует значение трех обобщенных координат $q_1=q_1^*$, $q_2=q_2^*$, $q_3=q_3^*$, однозначно определяющих положения всех точек системы.

Построим систему осей координат q_1, q_2, q_3 (рис. 17.1) и обозначим в ней точку M с координатами q_1^*, q_2^*, q_3^*, которая называется *изображающей точкой*. Пространство, связанное с системой осей q_1, q_2, q_3, называется *пространством конфигураций*. При движении материальной системы обобщенные координаты q_1, q_2, q_3 изменяются

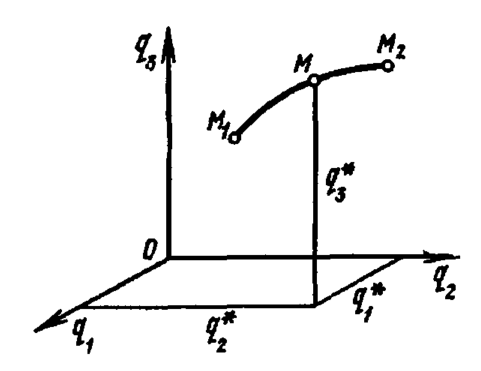


Рис. 17.1.

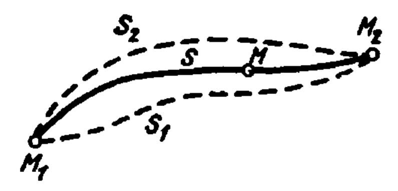


Рис. 17.2.

в зависимости от времени. При этом изображающая точка M описывает траекторию, называемую *«прямым путем»*. Так, за промежуток времени $\Delta t=t_2-t_1$ изображающая точка опишет «прямой путь» M_1M_2 (рис. 17.2), причем моменту времени t_1 соответствует положение M_1, а моменту t_2 — положение M_2.

Если голономная материальная система имеет s степеней свободы, то изображающая точка M движется в пространстве s измерений. Значит, в любой момент времени положение изображающей точки M в пространстве s измерений определяется с помощью s обобщенных координат q_1, q_2, ..., q_s.

Уравнения $q_1=q_1(t)$, $q_2=q_2(t)$, ..., $q_s=q_s(t)$ описывают движение данной материальной системы. Это движение происходит под действием системы приложенных к ней сил при наличии заданных начальных условий движения.

Рассмотрим возможное движение этой материальной системы, допускаемое наложенными связями. Оно описывается уравнениями:

$$q_1^*=q_1+\delta q_1, \quad q_2^*=q_2+\delta q_2, \ \ldots, \ q_s^*=q_s+\delta q_s.$$

При этом изображающая точка, которая ранее двигалась по «прямому

пути», получит другую траекторию, называемую *«окольным путем»*. Так как вариации обобщенных координат $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ произвольны, то изображающая точка может иметь бесчисленное множество «окольных путей» (на рис. 17.2 «окольные пути» изображены пунктирными линиями).

Наложим следующее условие на вариации обобщенных координат: будем считать, что на концах интервала (t_1, t_2) они равны нулю, т. е. при $t=t_1$ и $t=t_2$ будем иметь $\delta q_1=\delta q_2=\ldots=\delta q_s=0$. Это значит, что в точках M_1 и M_2 «прямой путь» и «окольные пути» соединяются (см. рис. 17.2).

Введем понятие *действия S по Гамильтону*:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \tag{1*}$$

где $L=T-\Pi$ — функция Лагранжа.

Движению изображающей точки M по «прямому пути» M_1M_2 (сплошная линия на рис. 17.2) соответствует действительное движение материальной системы за промежуток времени $\Delta t=t_2-t_1$. Вычислив кинетическую энергию T, потенциальную энергию Π и затем функцию Лагранжа L, определим по формуле (1*) величину действия S.

Движениям изображающей точки по «окольным путям» (штриховые линии на рис. 17.2) соответствуют возможные варьированные движения, допускаемые связями, за тот же промежуток времени $\Delta t=t_2-t_1$. При этом T, Π и L будут иметь другие значения. Вычислив действие S по Гамильтону при движении изображающей точки N по «окольным путям», получим значения S_1, S_2 и т. д.

Сопоставив значение S с соответствующими значениями $S_1, S_2, \ldots$, можно обнаружить, что при движении по «прямому пути» действие имеет экстремальное значение (максимум или минимум). Это имеет место при равенстве нулю первой вариации действия по Гамильтону. Принцип Гамильтона — Остроградского можно сформулировать так: *если при движении материальной системы, подчиненной идеальным, голономным связям, находящейся под действием потенциальных сил, «прямой» и «окольные пути» соединяются в крайних точках, то при движении системы по «прямому пути» первая вариация действия S равна нулю, т. е. действие имеет стационарное значение*:

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt=0. \tag{2*}$$

Можно показать, что при достаточно малом промежутке времени Δt действие S достигает минимума при движении изображающей точки по «прямому пути», по сравнению с ее движениями по «окольным путям», за один и тот же промежуток времени Δt (см. А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961).

В более общем случае, когда отсутствует условие потенциальности сил, имеет место интегральный принцип Гамильтона — Остроградского

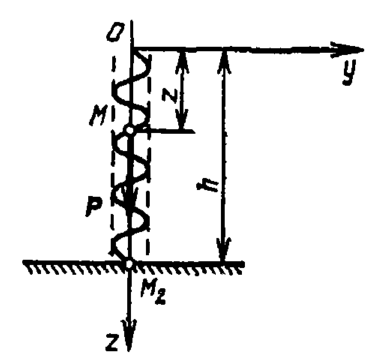
$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta A + \delta T)\, dt = 0, \tag{3*}$$

где δA — работа активных сил на возможных перемещениях точек системы, а δT — вариация кинетической энергии.

Надо помнить, что в интегральном и вариационном принципах Гамильтона — Остроградского сопоставляются величины действий S при действительном и возможном движениях материальной системы, т. е. при движениях изображающей точки по «прямому» и «окольным путям» за один и тот же промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$. (В других вариационных принципах, не излагаемых в этой книге, накладываются другие условия.)

Общность интегрального и вариационного принципов Гамильтона — Остроградского заключается в их независимости от выбора какой-либо определенной системы отсчета.

Этими принципами пользуются при составлении дифференциальных уравнений движения материальных систем с распределенными параметрами, при выводе различных форм уравнений динамики, например уравнений Лагранжа второго рода, канонических уравнений Гамильтона и др., а также при решении задач динамики приближенными методами (см. задачи 20.12 и 20.13). Кроме того, эти принципы являются исходной точкой обобщений на неклассические области механики (волновая механика, квантовая механика и др.).



К задаче 17.27.

Задача 17.27. Вычислить действие S по Гамильтону для случая свободного падения с высоты h материальной точки массы m (см. рисунок). Сопоставить полученный результат с величиной действия $\tilde{S}$ при варьированном движении, описываемом уравнениями

$$\tilde{x} = 0, \quad \tilde{y} = \varepsilon \sin \pi \sqrt{\frac{g}{2h}}\, t, \quad \tilde{z} = \frac{gt^2}{2},$$

где ε — постоянный малый параметр.

Решение. Свободное падение материальной точки происходит по закону

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{gt^2}{2}. \tag{1}$$

Кинетическая энергия материальной точки равна

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2). \qquad (2)$$

Потенциальная энергия равна

$$\Pi=-mgz. \qquad (3)$$

Использовав при вычислении функции Лагранжа L результаты (2) и (3), запишем

$$L=T-\Pi=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+mgz. \qquad (4)$$

Вычислив производные функций (1) по времени, найдем

$$\dot{x}=0, \quad \dot{y}=0, \quad \dot{z}=gt. \qquad (5)$$

Подстановка формул (5) и (1) в функцию Лагранжа (4) дает

$$L=mg^2t^2. \qquad (6)$$

Для вычисления величины действия S по Гамильтону используем формулу (1*), приведенную в обзоре теории. В данном случае $t_1=0$, а t_2 равно моменту времени, соответствующему падению материальной точки с высоты h. Учтя уравнение (1) $z=gt^2/2$, найдем $t_2=\sqrt{2h/g}$. Итак,

$$t_1=0, \quad t_2=\sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (7)$$

Использовав пределы интегрирования (7) при вычислении действия S по формуле (1*), запишем

$$S=\int_0^{\sqrt{\frac{2h}{g}}} L\,dt. \qquad (8)$$

Подставив результат (6) в выражение (8) и вычислив интеграл, найдем искомую величину действия:

$$S=\frac{mg^2}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}. \qquad (9)$$

В соответствии с условием варьированное движение, т. е. движение по «окольному пути», происходит по закону

$$\tilde{x}=0, \quad \tilde{y}=\varepsilon\sin\pi\sqrt{\frac{g}{2h}}t, \quad \tilde{z}=\frac{gt^2}{2}. \qquad (10)$$

Как следует из уравнений (10), это движение происходит по синусоиде в плоскости Oyz.

Напомним, что «прямой» и «окольный путь» должны соединяться по концам интервала, т. е. в точках $O(0, 0, 0)$ и $M_2(0, 0, h)$.

Точке O соответствует момент времени $t_1=0$, а точке M_2 — момент $t_2=\sqrt{2h/g}$. Подставив в уравнения (1) и (10) значение $t_1=0$, получим $x=\tilde{x}=0$, $y=\tilde{y}=0$, $z=\tilde{z}=0$. Затем, внеся $t_2=\sqrt{2h/g}$ в уравнения (1) и (10), найдем $x=\tilde{x}=0$, $y=\tilde{y}=0$, $z=\tilde{z}=h$. Итак, условие соединения «прямого» и «окольного» путей в крайних точках O и M_2 выполнено.

По аналогии с формулой (4) функция Лагранжа $\tilde{L}$ при движении по синусоиде имеет вид

$$\tilde{L}=\frac{1}{2}m\left(\dot{\tilde{x}}^2+\dot{\tilde{y}}^2+\dot{\tilde{z}}^2\right)+mg\tilde{z}. \tag{11}$$

Вычислив производные (10) по времени, найдем

$$\dot{\tilde{x}}=0, \qquad \dot{\tilde{y}}=\varepsilon\pi\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\pi\sqrt{\frac{2h}{g}}\,t, \qquad \dot{\tilde{z}}=gt. \tag{12}$$

Подстановка формул (12) и (10) в функцию Лагранжа (11) дает

$$\tilde{L}=mg^2t^2+\frac{m\varepsilon^2\pi^2g}{4h}\cos^2\pi\sqrt{\frac{g}{2h}}\,t. \tag{13}$$

Вычисление действия $\tilde{S}$ при варьированном движении проведем по формуле

$$\tilde{S}=\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2h}{g}}}\tilde{L}\,dt. \tag{14}$$

Заметим, что пределы интегрирования в формулах (8) и (14) должны быть одинаковыми, ибо по условию, положенному в основу принципа Гамильтона — Остроградского, движения по «прямому» и «окольному пути» происходят за один и тот же промежуток времени.

Подставив результат (13) в формулу (14) и учтя при интегрировании, что

$$\cos^2\pi\sqrt{\frac{2h}{g}}\,t=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\pi\sqrt{\frac{g}{2h}}\,t\right),$$

получим искомую величину действия $\tilde{S}$ при движении по синусоиде:

$$\tilde{S}=\frac{mg^2}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}+\frac{\varepsilon^2\pi^2m}{4}\sqrt{\frac{g}{2h}}. \tag{15}$$

Для сопоставления величин действий при движениях по «прямому» и «окольному пути» вычтем (9) из (15):

$$\tilde{S}-S=\frac{\varepsilon^2\pi^2m}{4}\sqrt{\frac{g}{2h}}>0. \tag{16}$$

Как следует из формулы (16), при произвольном значении параметра ε действие S при движении по «прямому пути» (вдоль оси z) меньше действия $\tilde{S}$ при движении по «окольному пути» (варьированное движение по синусоиде).

Задача 17.28. Вывести дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси с помощью интегрального принципа Гамильтона — Остроградского.

Решение. Напомним, что интегральный принцип Гамильтона — Остроградского имеет вид

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A)\, dt = 0. \qquad (1)$$

Для применения уравнения (1) надо предварительно вычислить вариацию δT кинетической энергии и работу δA активных сил F_1^a, F_2^a, ..., F_n^a на возможных перемещениях их точек приложения.

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем его угол поворота, т. е. $q = \varphi$. Дадим твердому телу возможное угловое перемещение $\delta\varphi$. Как известно, выражение работы имеет вид

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} m_z (F_k^a)\, \delta\varphi, \qquad (2)$$

где z — ось вращения твердого тела.

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2, \qquad (3)$$

где I_z — момент инерции твердого тела относительно оси вращения z. Проварьировав функцию (3), получим

$$\delta T = I_z \dot{\varphi}\, \delta\dot{\varphi}. \qquad (4)$$

Воспользуемся тождеством

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\, \delta\varphi) = \ddot{\varphi}\, \delta\varphi + \dot{\varphi} \frac{d}{dt} \delta\varphi. \qquad (5)$$

Так как $\frac{d}{dt}\delta\varphi = \delta\dot{\varphi}$ (считаем, что варьирование и дифференцирование — переставимые операции), то с помощью (5) запишем:

$$\dot{\varphi}\, \delta\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\, \delta\varphi) - \ddot{\varphi}\, \delta\varphi. \qquad (6)$$

Подставив результат (6) в формулу (4), найдем

$$\delta T = \frac{d}{dt}(I_z \dot{\varphi}\, \delta\varphi) - I_z \ddot{\varphi}\, \delta\varphi. \qquad (7)$$

Для применения принципа Гамильтона — Остроградского внесем результаты (2) и (7) в уравнение (1):

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}(I_z \dot{\varphi}\, \delta\varphi) - I_z \ddot{\varphi}\, \delta\varphi + \sum_{k=1}^{n} m_z (F_k^a)\, \delta\varphi \right] dt = 0,$$

т. е.

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^a) - I_z\ddot{\varphi}\right]\delta\varphi\,dt + \int_{t_1}^{t_2} d\,(I_z\dot{\varphi}\,\delta\varphi) = 0. \qquad (8)$$

Нетрудно видеть, что второй интеграл в формуле (8) обращается в нуль. Действительно,

$$\int_{t_1}^{t_2} d\,(I_z\dot{\varphi}\,\delta\varphi) = I_z\dot{\varphi}\,\delta\varphi\,\Big|_{t_1}^{t_2}. \qquad (9)$$

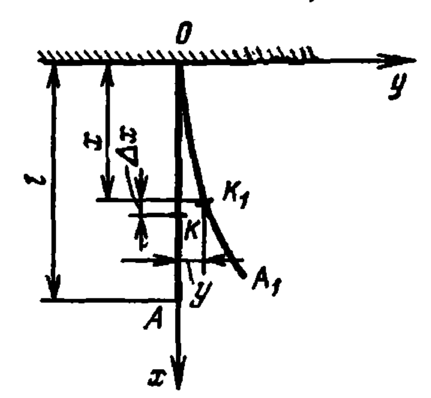
Напомним, что в основу вывода интегрального принципа Гамильтона — Остроградского положено условие соединения начала и конца «прямого» и «окольного» путей. Значит, в данном случае при $t=t_1$ и $t=t_2$ имеем $\delta\varphi=0$. Поэтому интеграл (9) обращается в нуль и уравнение (8) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^a) - I_z\ddot{\varphi}\right]\delta\varphi\,dt = 0. \qquad (10)$$

Согласно основной лемме вариационного исчисления и учтя произвольность $\delta\varphi$, из уравнения (10) получим $\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^a) - I_z\ddot{\varphi} = 0$, т. е. искомое дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси будет

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^a).$$

Задача 17.29. Упругий однородный нерастяжимый стержень постоянного сечения, жестко заделанный верхним концом, совершает изгибные колебания в вертикальной плоскости Oxy — плоскости рисунка. Длина стержня равна l, ρ — его плотность, E — модуль упругости, I — момент инерции площади постоянного поперечного сечения.



К задаче 17.29.

Применив вариационный принцип Гамильтона — Остроградского, составить дифференциальное уравнение изгибных колебаний стержня в плоскости Oxy.

Решение. Рассматриваемый упругий стержень представляет материальную систему с распределенными параметрами, т. е. материальную систему с бесчисленным множеством координат.

В недеформированном состоянии стержень занимал вертикальное положение OA. Изобразим его на рисунке в процессе изгибных коле-

баний в промежуточном положении OA_1. При этом произвольная точка стержня переместилась из положения K в K_1 с координатами x и y.

Если принять y за величину первого порядка малости, то при условии нерастяжимости стержня разность Δx между абсциссами точек K и K_1 (см. рисунок) окажется величиной второго порядка малости. Пренебрегая ею, будем считать, что абсцисса x точки K в ходе колебаний остается постоянной и, следовательно,

$$\dot{x}=0. \tag{1}$$

Величина y зависит от положения точки K на стержне, т. е. от x. В процессе колебаний y меняется также в зависимости от времени t, т. е.

$$y=y(x,\ t). \tag{2}$$

Для применения вариационного принципа Гамильтона — Остроградского определим действие $S=\int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt$, где функция Лагранжа L равна разности кинетической и потенциальной энергий, т. е. $L=T-\Pi$.

Приняв во внимание непрерывное распределение масс, вычислим кинетическую энергию стержня с помощью определенного интеграла:

$$T=\frac{1}{2}\rho\int\limits_0^l v^2\,dx, \tag{3}$$

где ρ — плотность, а v — скорость точки стержня. При вычислении квадрата скорости по формуле $v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$, учитывая равенство (1), найдем: $v^2=\dot{y}^2$. Внеся это значение v^2 в подынтегральную функцию (3), получим

$$T=\frac{1}{2}\rho\int\limits_0^l \dot{y}^2\,dx. \tag{4}$$

Как известно из курса сопротивления материалов, потенциальная энергия упругой деформации изгиба равна

$$\Pi=\frac{EI}{2}\int\limits_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx, \tag{5}$$

где E — модуль упругости, а I — момент инерции площади постоянного поперечного сечения стержня.

Впредь для упрощения записи введем следующие обозначения частных производных по x:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=y',\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=y'',\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=y''',\quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=y^{\mathrm{IV}}.$$

Поэтому запишем формулу (5) в виде

$$\Pi = \frac{EI}{2}\int_0^l y''^2\,dx. \qquad (6)$$

Определим функцию Лагранжа $L = T - \Pi$. Приняв во внимание результаты (4) и (6), найдем

$$L = \frac{1}{2}\int_0^l (\rho\dot{y}^2 - EIy''^2)\,dx. \qquad (7)$$

Как известно, действие S по Гамильтону равно $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$. Использовав выражение (7), получим

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l (\rho\dot{y}^2 - EIy''^2)\,dx. \qquad (8)$$

Вычислим вариацию действия S, данного формулой (8):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l (\rho\dot{y}\,\delta\dot{y} - EIy''\delta y'')\,dx. \qquad (9)$$

Согласно принципу Гамильтона — Остроградского, решение вариационной задачи об отыскании зависимости $y = y(x, t)$ сводится к определению такой функции y, при наличии которой действие S имеет стационарное значение, т. е. то значение, при котором первая вариация действия S равна нулю:

$$\delta S = 0. \qquad (10)$$

Напомним, что искомая функция $y = y(x, t)$ должна быть непрерывной и иметь непрерывные частные производные по x и по t, а ее вариации в начальный t_1 и конечный t_2 моменты времени должны быть равны нулю (это значит, что «прямой» и «окольные пути» по концам интервала $\Delta t = t_2 - t_1$ соединяются):

$$\delta y(x, t_1) = 0, \qquad \delta y(x, t_2) = 0. \qquad (11)$$

Подставив выражение (9) в уравнение (10), получим

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l (\rho\dot{y}\,\delta\dot{y} - EIy''\delta y'')\,dx = 0. \qquad (12)$$

Выполним ряд преобразований уравнения (12). Использовав переставимость варьирования и дифференцирования, запишем:

$$\delta\dot{y} = \frac{d}{dt}\delta y, \quad \delta y'' = \frac{\partial}{\partial x}\delta y'.$$

Теперь уравнение (12) примет вид

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l \left(\rho \dot{y} \frac{d}{dt}\,\delta y - EIy'' \frac{\partial}{\partial x}\,\delta y'\right) dx = 0. \tag{13}$$

Заметим, что

$$\dot{y} \frac{d}{dt}\,\delta y = \frac{d}{dt}(\dot{y}\,\delta y) - \ddot{y}\,\delta y, \tag{14}$$

$$y'' \frac{\partial}{\partial x}\,\delta y' = \frac{\partial}{\partial x}(y''\delta y') - y'''\delta y', \tag{15}$$

$$y'''\delta y' = y''' \frac{\partial}{\partial x}\,\delta y = \frac{\partial}{\partial x}(y'''\delta y) - y^{\mathrm{IV}}\delta y. \tag{16}$$

Подставив (16) в (15), найдем

$$y'' \frac{\partial}{\partial x}\,\delta y' = \frac{\partial}{\partial x}(y''\delta y' - y'''\delta y) + y^{\mathrm{IV}}\delta y. \tag{17}$$

Внеся результаты (14) и (17) в уравнение (13), получим

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l \left[\rho \frac{d}{dt}(\dot{y}\,\delta y) - \rho\ddot{y}\,\delta y + EI \frac{\partial}{\partial x}(y'''\delta y - y''\delta y') - EIy^{\mathrm{IV}}\delta y\right] dx = 0,$$

т. е.

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l \frac{d}{dt}(\dot{y}\,\delta y)\, dx - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l (\rho\ddot{y} + EIy^{\mathrm{IV}})\,\delta y\, dx +$$

$$+ EI \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l \frac{\partial}{\partial x}(y'''\delta y - y''\delta y')\, dx = 0. \tag{18}$$

Для последующих преобразований уравнения (18) вычислим

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l \frac{d}{dt}(\dot{y}\,\delta y)\, dx = \int_0^l dx \int_{t_1}^{t_2} d(\dot{y}\,\delta y) =$$

$$= \int_0^l [\dot{y}(x, t_2)\,\delta y(x, t_2) - \dot{y}(x, t_1)\,\delta y(x, t_1)]\, dx.$$

Приняв во внимание соотношения (11), найдем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l \frac{d}{dt}(\dot{y}\,\delta y)\, dx = 0. \tag{19}$$

Далее

$$\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}(y'''\delta y - y''\delta y')\, dx = y'''(l, t)\,\delta y(l, t) - y''(l, t)\,\delta y'(l, t) -$$

$$- y'''(0, t)\,\delta y(0, t) + y''(0, t)\,\delta y'(0, t). \tag{20}$$

В точке $x=0$ стержень закреплен. Поэтому $\delta y(0, t)=0$, $\delta y'(0, t)=0$ и формула (20) примет вид

$$\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}(y'''\delta y - y''\delta y')\,dx = y'''(l, t)\,\delta y(l, t) - y''(l, t)\,\delta y'(l, t). \quad (21)$$

Внесем результаты (19) и (21) в уравнение (18):

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l (\rho\ddot{y} + EIy^{\mathrm{IV}})\,\delta y\,dx + \\ + EI\int_{t_1}^{t_2} [y'''(l, t)\,\delta y(l, t) - y''(l, t)\,\delta y'(l, t)]\,dt = 0. \quad (22)$$

Так как вариации, стоящие в уравнении (22), произвольны, то, согласно основной лемме вариационного исчисления, из этого уравнения следует

$$\rho\ddot{y} + EIy^{\mathrm{IV}} = 0, \quad (23)$$

$$y''(l, t) = 0, \qquad y'''(l, t) = 0. \quad (24)$$

Выражение (23) является искомым дифференциальным уравнением в частных производных изгибных колебаний стержня. Соотношения (24) представляют собой условия для конца A стержня.

Заметим, что краевые условия для неподвижного конца O стержня имеют вид $y(0, t)=0$, $y'(0, t)=0$. Для интегрирования уравнения (23), кроме краевых условий, должны быть заданы начальные условия движения стержня.

Применение вариационного принципа Гамильтона — Остроградского при составлении дифференциального уравнения (23) изгибных колебаний упругого стержня — материальной системы с распределенными параметрами — оказалось целесообразным и эффективным.

ГЛАВА XVIII

ТЕОРИЯ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

§ 1. Устойчивость равновесия системы

Равновесие системы материальных точек называется устойчивым, если после сообщения точкам системы весьма малых начальных отклонений от положения равновесия и весьма малых начальных скоростей система в своем последующем движении будет весьма мало отклоняться от рассматриваемого равновесного положения.

Ограничимся изучением устойчивости равновесия системы, подчиненной голономным, стационарным и идеальным связям. Если такая система находится в консервативном силовом поле, то устойчивость равновесия системы определяется согласно теореме Лагранжа — Дирихле или теоремам Ляпунова. Теорема Лагранжа — Дирихле гласит: если в положении изолированного равновесия системы потенциальная энергия имеет минимум, то положение равновесия устойчиво.

Потенциальная энергия системы может быть разложена в ряд по степеням обобщенных координат. Это разложение начинается с членов не ниже второго порядка относительно координат, если за начало отсчета координат принято положение равновесия и потенциальная энергия в положении равновесия считается равной нулю:

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1\, \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \ldots + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k^2}\right)_0 q_k^2\right] + \ldots \qquad (1^*)$$

Если в положении равновесия значение потенциальной энергии не является минимальным, то для суждения об устойчивости равновесия следует применить теоремы Ляпунова, которые формулируются следующим образом.

а) Равновесие системы неустойчиво, если отсутствие минимума потенциальной энергии может быть определено по членам второго порядка в разложении потенциальной энергии (1*), без рассмотрения членов высших порядков.

б) Равновесие системы неустойчиво, если потенциальная энергия имеет в положении равновесия максимум, который может быть уста-

новлен из рассмотрения членов наинизшего порядка, действительно имеющихся в разложении потенциальной энергии в ряд (1*).

Обозначим производные второго порядка потенциальной энергии, вычисленные в положении равновесия, через

$$c_{kj}=\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k\,\partial q_j}\right)_0. \qquad (2^*)$$

Коэффициенты c_{kj} — постоянные числа. Теперь выражение для потенциальной энергии (1*) примет вид

$$\Pi=\frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2+\ldots+c_{nn}q_n^2+2c_{12}q_1q_2+\ldots+2c_{n-1,\,n}q_{n-1}q_n\right)+\ldots, \qquad (3^*)$$

где точками обозначены члены высшего порядка относительно $q_1, \ldots$ $\ldots, q_n$.

Если квадратичная форма

$$\Pi=\frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2+\ldots+c_{nn}q_n^2+2c_{12}q_1q_2+\ldots+2c_{n-1,\,n}q_{n-1}q_n\right) \qquad (4^*)$$

определенно положительна (положительна при всех значениях $q_1, \ldots$ $\ldots, q_n$, не равных нулю одновременно), то и полная потенциальная энергия П, определяемая формулой (3*), будет при достаточно малых значениях $q_1, \ldots, q_n$ определенно положительной. Это означает, что потенциальная энергия будет иметь в положении равновесия минимум. Согласно теореме Лагранжа — Дирихле в этом случае положение равновесия будет устойчиво.

Составим из коэффициентов c_{kj} матрицу

$$\left\|\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{matrix}\right\|. \qquad (5^*)$$

Согласно равенству (2*)

$$c_{kj}=c_{jk},$$

т. е. матрица (5*) симметрична. Вычислим главные диагональные миноры матрицы (5*):

$$\Delta_1=a_{11},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n=\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (6^*)$$

В высшей алгебре доказывается следующий критерий Сильвестра: если все главные диагональные миноры $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ матрицы (5*) положительны

$$\Delta_1>0,\quad \Delta_2>0,\quad \ldots,\quad \Delta_n>0, \qquad (7^*)$$

то квадратичная форма (4*) определенно положительна. Если хотя бы

один из главных диагональных миноров отрицателен, то квадратичная форма (4*) может принимать отрицательные значения.

Из теоремы Лагранжа — Дирихле следует, что *при* выполнении условия Сильвестра (7*) положение равновесия консервативной системы будет устойчиво. Если же хотя бы одно неравенство (7*) имеет противоположный смысл, то на основании первой теоремы Ляпунова положение равновесия будет неустойчиво.

Для системы с одной степенью свободы критерий устойчивости принимает совсем простой вид:

$$c_{11}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_0\begin{cases} >0 & \text{устойчивое равновесие,} \\ <0 & \text{неустойчивое равновесие.}\end{cases} \qquad (8^*)$$

Этот критерий указывает, что равновесие является устойчивым или неустойчивым, если при бесконечно малом перемещении системы



Рис. 18.1. *а*) Равновесие шарика устойчиво; *б*) равновесие шарика неустойчиво; *в*) равновесие шарика безразличное.

из положения равновесия потенциальная энергия соответственно увеличивается или уменьшается.

Для наглядности приводим рис. 18.1 для потенциальной энергии силы тяжести.

П р и р е ш е н и и з а д а ч н а у с т о й ч и в о с т ь р а в н о в е с и я с и с т е м ы с о д н о й с т е п е н ь ю с в о б о д ы, н а х о д я щ е й с я п о д д е й с т в и е м п о т е н ц и а л ь н ы х с и л, р е к о м е н д у е т с я с л е д у ю щ и й п о р я д о к д е й с т в и й:

1) выделить тело или систему тел, равновесие которых подлежит рассмотрению, и выбрать обобщенную координату, задание которой определяет положение системы;

2) составить выражение потенциальной энергии системы;

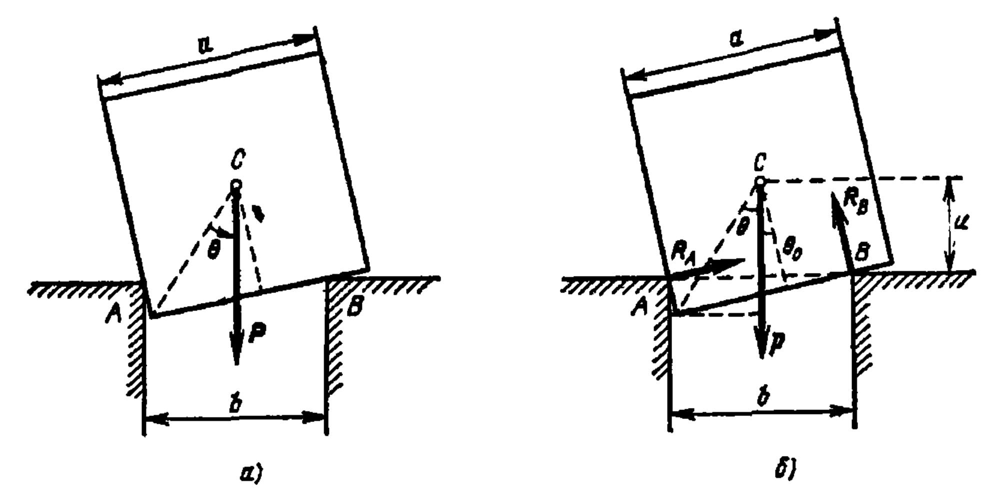
3) вычислив производную от потенциальной энергии системы по обобщенной координате и приравняв ее нулю, найти возможные положения равновесия системы;

4) вычислив значения второй производной от потенциальной энергии по обобщенной координате для каждого из возможных положений равновесия, найти знаки этой производной и по ним судить об устойчивости.

Задача 18.1. Однородный призматический брус веса P квадратного сечения со стороной, равной a, опирается своими боковыми

гранями на параллельные ребра двух опор, лежащие в одной горизонтальной плоскости на расстоянии b одно от другого, причем $b<a\sqrt{2}$ (рис. *а*).

Предполагая грани бруса гладкими, найти возможные положения равновесия и опорные реакции, соответствующие этим положениям. Определить условия устойчивости положений равновесия.



К задаче 18.1.

Решение. Рассмотрим равновесие призматического бруса, находящегося в консервативном силовом поле тяжести. Отбрасываем мысленно опоры и заменяем их действие реакциями R_A и R_B (рис. *б*). За обобщенную координату, определяющую положение бруса, принимаем угол θ, образованный диагональю вертикального поперечного сечения бруса с вертикалью.

Находим высоту u центра тяжести над прямой AB (рис. *б*):

$$u=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta-b\sin\theta_0\cos\theta_0,$$

или

$$u=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{b}{2}\sin 2\theta_0.$$

Но углы θ и θ_0 связаны зависимостью

$$2\theta_0=\frac{\pi}{2}-2\theta$$

и, следовательно,

$$u=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{b}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right),$$

или

$$u=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{b}{2}\cos 2\theta. \qquad (1)$$

Потенциальная энергия силы тяжести равна

$$\Pi = P \cdot u;$$

учитывая (1), имеем

$$\Pi = P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{b}{2}\cos 2\theta\right).$$

Находим производную от Π по θ и приравниваем ее нулю:

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{d\Pi}{d\theta} = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}} + 2b\cos\theta\right)\sin\theta = 0.$$

Из этого уравнения следует, что возможны два положения равновесия. Первое положение равновесия будет при $\sin\theta = 0$, или $\theta = 0$.

Второе положение равновесия будет при

$$-\frac{a}{\sqrt{2}} + 2b\cos\theta = 0,$$

или

$$\cos\theta = \frac{a}{2\sqrt{2}b}.$$

Это положение равновесия возможно, если

$$\frac{a}{2} \leqslant b\sqrt{2}. \tag{2}$$

Найдем теперь вторую производную:

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta + 2b\cos 2\theta. \tag{3}$$

Для решения вопроса об устойчивости равновесия следует найти знак этой производной для каждого из возможных положений равновесия. В первом положении $\theta = \theta_1 = 0$. Подставив это значение в уравнение (3), имеем

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{d^2\Pi}{d\theta^2}\bigg|_{\theta=0} = -\frac{a}{\sqrt{2}} + 2b.$$

Следовательно, по теореме Лагранжа — Дирихле это положение равновесия устойчиво, если

$$b > \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

В противном случае положение равновесия неустойчиво.

Во втором положении равновесия

$$\theta = \theta_2 = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{a}{b}\right).$$

Подставив это значение угла в уравнение (3), находим

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{d^2\Pi}{d\theta^2}\bigg|_{\theta=\theta_2}=\frac{1}{b}\left(\frac{a^2}{4}-2b^2\right).$$

Но, согласно (2),

$$\frac{a^2}{4}-2b^2<0.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2}\bigg|_{\theta_2}<0,$$

т. е. положение равновесия $\theta=\theta_2$ по теореме Ляпунова неустойчиво. Исключение составляет случай, когда $\theta=0$ и

$$\frac{a^2}{4}-2b^2=0,$$

что соответствует первому положению равновесия, рассмотренному ранее.

Возможные положения равновесия твердого тела могут быть определены и другим путем. Составим три уравнения равновесия для произвольного положения бруса (рис. *б*), определяемого углом θ.

Первое уравнение — равенство нулю суммы проекций всех сил на горизонтальную ось:

$$R_A\cos\theta_0-R_B\sin\theta_0=0. \tag{4}$$

Второе уравнение — равенство нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$R_A\sin\theta_0+R_B\cos\theta_0-P=0. \tag{5}$$

Третье уравнение — равенство нулю суммы моментов сил относительно точки A:

$$R_B\cdot b\cos\theta_0-P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta+b\sin^2\theta_0\right)=0. \tag{6}$$

Из уравнений (4) и (5) находим

$$R_B=P\cos\theta_0.$$

Подставив это значение в уравнение (6), получим

$$Pb\cos^2\theta_0-P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta+b\sin^2\theta_0\right)=0,$$

или

$$b\cos 2\theta_0-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta=0,$$

$$b\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta=0,$$

$$b\sin 2\theta-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta=0$$

и окончательно

$$\sin\theta\left(2b\cos\theta-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=0,$$

откуда находятся значения угла θ, соответствующие двум возможным положениям равновесия:

1) $\sin\theta = 0$ и, следовательно, $\theta = \theta_1 = 0$;

2) $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{a}{b}$ и, следовательно, $\theta = \theta_2 = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{a}{b}\right)$.

Первое решение соответствует симметричному положению бруса, при котором его грани наклонены под углом 45° к горизонту.

Второе решение возможно, если $a < 2b\sqrt{2}$. При $a = 2b\sqrt{2}$ находим $\cos\theta_2 = 1$, т. е. $\sin\theta_2 = 0$, и мы возвращаемся к первому случаю.

Находим значения реакций в первом возможном положении равновесия:

$$R_A = R_B = \frac{\sqrt{2}}{2}P;$$

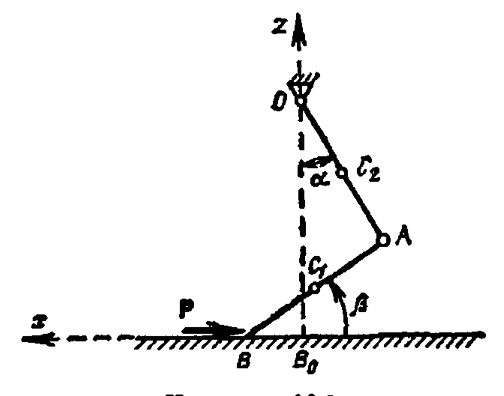
во втором положении равновесия:

$$R_A = \frac{\sqrt{2}}{4b}\sqrt{4b^2 - a\sqrt{8b^2 - a^2}}\,P,$$

$$R_B = \frac{1}{4b}\left(a + \sqrt{8b^2 - a^2}\right)P.$$

Сопоставляя оба способа решения, видим, что первый способ позволяет прямым путем определить возможные положения равновесия системы и характер устойчивости этих положений равновесия. Однако этот способ не приводит к нахождению реакций опор. Второй способ позволяет непосредственно определить возможные положения равновесия системы и соответствующие им реакции опор, но не оценивает устойчивости равновесия системы и характер устойчивости этих положений равновесия.

Конечно, после определения реакций и положений равновесия по этому способу для ответа на вопрос об устойчивости равновесия надо вернуться к теореме Лагранжа — Дирихле.



К задаче 18.2.

Задача 18.2. Два стержня длины l и веса Q каждый соединены шарнирно в точке A. Конец одного из стержней шарнирно укреплен в точке O, а конец второго B опирается на гладкий горизонтальный пол. В точке B приложена горизонтальная, постоянная по модулю сила P. В положении равновесия стержень OA образует угол α с вертикалью, а стержень AB — угол β с горизонталью. Определить устойчивость равновесия системы.

Решение. Рассмотрим равновесие системы, состоящей из стержней OA и AB. Выберем угол β за обобщенную координату, определяющую положение системы.

Начало координат выбираем в точке B_0 на пересечении вертикали, проходящей через точку O, с горизонтальной плоскостью. Ось x направим влево, ось z — вверх.

На систему действуют три активные силы $Q_1 = Q_2$ и P. Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = Q(z_1 + z_2) + Px, \tag{1}$$

где z_1, z_2 и x — соответствующие координаты точек C_1, C_2 и B. Выразим z_1, z_2 и x через обобщенную координату β. Имеем

$$z_1 = \frac{l}{2}\sin\beta, \quad z_2 = l\left(\sin\beta + \frac{1}{2}\cos\alpha\right), \quad x = l(\cos\beta - \sin\alpha).$$

Из рисунка найдем связь между углами α и β:

$$l(\cos\alpha + \sin\beta) = h,$$

где h — расстояние между точками O и B_0.

Из последнего равенства находим

$$\cos\alpha = \frac{h}{l} - \sin\beta, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial\beta} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}. \tag{2}$$

Теперь выражение для потенциальной энергии можно привести к виду $\left(\text{несущественная постоянная } \frac{Q}{2h} l \text{ отброшена}\right)$

$$\Pi = Ql\sin\beta + Pl(\cos\beta - \sin\alpha). \tag{3}$$

Отсюда

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\beta} = Ql\cos\beta - Pl\left(\sin\beta + \cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\right)$$

или, учитывая значение $\partial\alpha/\partial\beta$ из (2),

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\beta} = Ql\cos\beta - Pl(\sin\beta + \cos\beta\operatorname{ctg}\alpha). \tag{4}$$

Приравнивая $\partial\Pi/\partial\beta$ нулю, найдем условие равновесия системы

$$Q = (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha)P. \tag{5}$$

Дифференцируя (4) по β и учитывая, что $\frac{\partial x}{\partial\beta} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$, получим

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\beta^2} = -Ql\sin\beta - Pl\left(\cos\beta - \sin\beta\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\cos^2\beta}{\sin^3\alpha}\right).$$

Исключая с помощью (5) из этого выражения значение Q, найдем

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\beta^2} = Pl\frac{\cos^3\beta - \sin^3\alpha}{\cos\beta\sin^3\alpha}. \tag{6}$$

Согласно (8*) равновесие устойчиво, если $\partial^2\Pi/\partial\beta^2>0$, что равносильно

$$\sin\alpha<\cos\beta,$$

или

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)<\cos\beta.$$

Это приводит к условию

$$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}. \qquad (7)$$

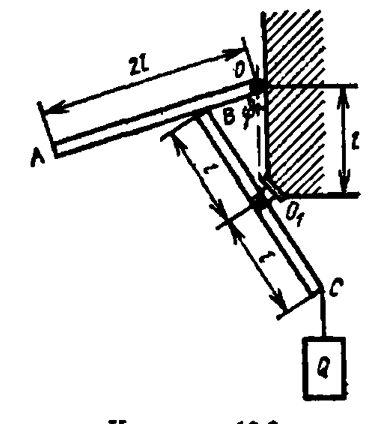
Если условие (7) удовлетворяется, то равновесие системы устойчиво. Это условие эквивалентно расположению точки B левее точки B_0.

Действительно, замечая, что при совпадении точки B с точкой B_0

$$\frac{\pi}{2}-\alpha=\beta,$$

находим, что равновесие устойчиво, если точка B располагается левее B_0, и неустойчиво, если точка B — правее B_0.

Задача 18.3. Однородный стержень OA веса P и длины $2l$ закреплен своим концом в шарнире O, а в точке B опирается на стержень BC, который укреплен своей серединой в шарнире O_1. Стержень BC веса P и длины $2l$ нагружен вертикальной силой $Q=2P$, приложенной в точке C. Расстояние $OO_1=l$. Определить возможные положения и устойчивость равновесия системы.



К задаче 18.3.

Решение. Составим потенциальную энергию системы, состоящей из стержней OA и BC. За обобщенную координату выбираем угол φ, образованный стержнем OA с вертикалью. Потенциальная энергия системы выразится формулой

$$\Pi=-Pl\cos\varphi-Q\,[l+l\cos(180^\circ-2\varphi)]$$

или

$$\Pi=-Pl\cos\varphi-Q\,(l-l\cos 2\varphi).$$

Для определения возможных положений равновесия находим производную от потенциальной энергии по обобщенной координате:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}=Pl\sin\varphi-2Ql\sin 2\varphi$$

и приравниваем ее нулю:

$$Pl\sin\varphi-2Ql\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi=0.$$

Заметив, что $Q=2P$, находим из последнего уравнения

$$\sin\varphi(1-8\cos\varphi)=0.$$

Следовательно, равновесие возможно, если $\sin\varphi=0$ или $\cos\varphi=1/8$, т. е. при двух значениях угла:

1) $\varphi_1=0$ и 2) $\varphi_2=\arccos\frac{1}{8}=82^\circ48'$.

Для определения устойчивости каждого из этих положений находим вторую производную от потенциальной энергии по обобщенной координате

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}=Pl\cos\varphi-8Pl\cos 2\varphi,$$

или

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}=Pl(\cos\varphi-8\cos^2\varphi+8\sin^2\varphi).$$

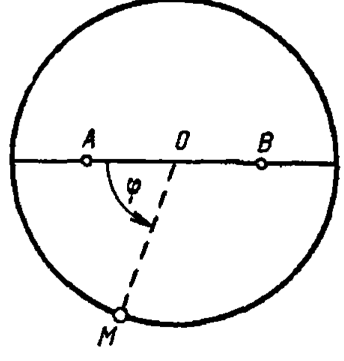
Далее находим величину этой производной в первом положении равновесия, подставив значение $\varphi=0$:

$$\left.\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=0}=-7Pl<0.$$

Согласно (8*) первое положение равновесия неустойчиво. Во втором положении равновесия при $\varphi=\arccos\frac{1}{8}$ мы получаем

$$\left.\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi_2}=Pl\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{63}{8}\right)=Pl\frac{63}{8}>0.$$

Второе положение равновесия устойчиво.



К задаче 18.4.

Задача 18.4. Материальная точка M веса P может перемещаться в вертикальной плоскости по гладкой окружности радиуса r. Точка притягивается к двум центрам A и B, расположенным на горизонтальном диаметре, симметрично относительно центра окружности, с силами, прямо пропорциональными расстояниям: $F_A=\alpha\cdot\overline{MA}$, $F_B=\beta\cdot\overline{MB}$, где α, β — постоянные коэффициенты. Расстояния $OA=OB=a$. При каком угле φ точка M находится в равновесии? Исследовать устойчивость равновесия точки.

Решение. На точку M действуют три активные силы: сила тяжести $\boldsymbol{P}$, направленная по вертикали вниз, две силы притяжения, направленные соответственно по $\overline{MA}$ и $\overline{MB}$.

Возможное перемещение точки M направлено по касательной к окружности и равно по модулю

$$\delta s=r\,\delta\varphi.$$

Составим элементарную работу всех сил на возможном перемещении.

Реакция гладкой окружности нормальна к возможному перемещению. Следовательно, ее работа равна нулю. Работа силы тяжести равна

$$\delta A_1 = P\cos\varphi\, r\,\delta\varphi.$$

Для вычислении работы сил притяжения замечаем, что

$$\overline{MA} = \overline{MO} + \overline{OA}, \quad \overline{MB} = \overline{MO} + \overline{OB} = \overline{MO} - \overline{OA}$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{F}_A = \alpha(\overline{MO} + \overline{OA}), \quad \boldsymbol{F}_B = \beta(\overline{MO} - \overline{OA}).$$

Так как вектор $\overline{MO}$ нормален к возможному перемещению, то

$$\boldsymbol{F}_A \cdot \delta\boldsymbol{s} = -\alpha\, ar\,\delta\varphi \sin\varphi,$$
$$\boldsymbol{F}_B \cdot \delta\boldsymbol{s} = \beta\, ar\,\delta\varphi \sin\varphi.$$

Таким образом, элементарная работа всех сил на возможном перемещении равна

$$\delta A = r\,[P\cos\varphi + (\beta - \alpha)\,a\sin\varphi]\,\delta\varphi. \tag{1}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = -r\,[P\cos\varphi + (\beta - \alpha)\,a\sin\varphi]. \tag{2}$$

Приравняв это выражение нулю, находим положение равновесия точки:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{P}{(\alpha - \beta)\,a}. \tag{3}$$

Далее

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = -r\,[-P\sin\varphi + (\beta - \alpha)\,a\cos\varphi]$$

или, с учетом равенства (3),

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = \frac{ra\,(\alpha - \beta)}{\cos\varphi}. \tag{4}$$

Здесь возможны четыре случая:

1) если $\alpha > \beta$ и угол $\varphi < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} > 0$;

2) если $\alpha < \beta$ и угол $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, то $\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} > 0$.

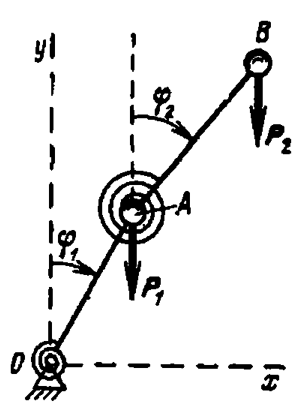
В этих случаях положение равновесия устойчиво, точка M находится на нижней половине окружности, в первом или втором квадрантах.

3) Если $\alpha > \beta$ и $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$, то $\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} < 0$;

4) если $\alpha < \beta$ и $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$, то $\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} < 0$.

В двух последних случаях положение равновесия неустойчиво, точка M находится на верхней половине окружности, в третьем или четвертом квадрантах.

Задача 18.5. Двойной маятник состоит из стержней длин $OA = l_1$ и $AB = l_2$, соединенных шарнирно друг с другом и прикрепленных шарнирно в точке O к фундаменту. Силы тяжести приложены $\boldsymbol{P}_1$ в точке A и сила $\boldsymbol{P}_2$ в точке B. В шарнирах O и A к стержням прикреплены спиральные пружины, которые находятся в недеформированном состоянии при вертикальном положении маятников.



К задаче 18.5.

Пренебрегая трением в шарнирах, определить жесткости спиральных пружин c_1 и c_2, при которых вертикальное положение равновесия является устойчивым.

Решение. Система имеет две степени свободы. Углы φ_1 и φ_2, определяющие отклонения стержней маятника от вертикали, примем за обобщенные координаты.

Направив ось y вверх, а ось x вправо, составим выражение потенциальной энергии системы как суммы потенциальной энергии сил тяжести и потенциальной энергии спиральных пружин. Если принять ось x за нулевой уровень потенциальной энергии сил тяжести маятников, то последняя выразится формулой

$$\Pi_1 = P_1 y_1 + P_2 y_2,$$

где координаты y_1, y_2 определяются через обобщенные координаты формулами

$$y_1 = l_1 \cos\varphi_1, \qquad y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2.$$

Итак,

$$\Pi_1 = P_1 l_1 \cos\varphi_1 + P_2 (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2) = \\ = (P_1 + P_2) l_1 \cos\varphi_1 + P_2 l_2 \cos\varphi_2.$$

Потенциальная энергия спиральных пружин равна

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2,$$

где угол закручивания второй пружины равен $\varphi_2 - \varphi_1$. Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$$

или

$$\Pi = (P_1 + P_2) l_1 \cos\varphi_1 + P_2 l_2 \cos\varphi_2 + \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2. \quad (1)$$

Согласно теореме Сильвестра, для того чтобы система с двумя степенями свободы была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры матрицы квадратичной формы (1) были положительны:

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \quad (2)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (3)$$

Здесь учтено, что $c_{12}=c_{21}$. Замечаем, что так как $c_{11}>0$, то из (3) следует $c_{22}>0$.

Переходим к вычислению обобщенных коэффициентов жесткости по формулам

$$c_{11}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_1^2}\right)_0,\qquad c_{12}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_1\,\partial\varphi_2}\right)_0,\qquad c_{22}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_2^2}\right)_0.$$

Внеся в эти формулы значение потенциальной энергии (1), находим сначала

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1}=-(P_1+P_2)\,l_1\sin\varphi_1+c_1\varphi_1-c_2(\varphi_2-\varphi_1),$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_2}=-P_2l_2\sin\varphi_2+c_2(\varphi_2-\varphi_1)$$

и далее

$$c_{11}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_1^2}\right)_0=[-(P_1+P_2)\,l_1\cos\varphi_1+c_1+c_2]_0=-(P_1+P_2)\,l_1+c_1+c_2 \tag{4}$$

$$c_{22}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_2^2}\right)_0=(-P_2l_2\cos\varphi_2+c_2)_0=-P_2l_2+c_2, \tag{5}$$

$$c_{12}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_1\,\partial\varphi_2}\right)_0=-c_2. \tag{6}$$

Согласно условиям (2), (3) и $c_{22}>0$, являющемуся следствием из них, верхнее равновесное положение маятников будет устойчивым, если

$$-P_2l_2+c_2>0, \tag{7}$$

$$[-(P_1+P_2)\,l_1+c_1+c_2]\,(-P_2l_2+c_2)-(-c_2)^2>0. \tag{8}$$

Из (7) имеем

$$c_2>P_2l_2. \tag{9}$$

Разделив равенство (8) на $(c_2-P_2l_2)$, находим

$$-(P_1+P_2)\,l_1+c_1+c_2>\frac{c_2^2}{c_2-P_2l_2},$$

откуда

$$c_1>(P_1+P_2)\,l_1+\frac{P_2l_2c_2}{c_2-P_2l_2}. \tag{10}$$

Итак, если жесткости спиральных пружин c_1 и c_2 удовлетворяют неравенствам (9) и (10), то верхнее вертикальное положение маятников устойчиво.

§ 2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы

1°. *Свободные колебания системы без учета сил сопротивления.* Механическая система называется системой с одной степенью свободы, если ее положение в пространстве может быть однозначно определено заданием одной величины q, называемой

обобщенной координатой. Движение системы в пространстве при этом описывается зависимостью обобщенной координаты от времени.

Принимая положение устойчивого равновесия за начало отсчета обобщенной координаты и за нулевой уровень потенциальной энергии, рассмотрим малые движения системы около этого положения равновесия. Отклонение системы от положения равновесия при таком выборе начала отсчета будет определяться значением обобщенной координаты.

Полагая при составлении дифференциальных уравнений малых движений обобщенные координаты (отсчитываемые от положения равновесия) и обобщенные скорости малыми величинами, ограничимся в дифференциальных уравнениях движения линейными членами. Этот прием, заключающийся в отбрасывании в нелинейных дифференциальных уравнениях членов, содержащих квадрат и более высокие степени обобщенных координат и скоростей, называется линеаризацией уравнений. Такая линеаризация, естественно, в известной мере искажает действительную картину движений, однако чем меньше отклонения системы от положения устойчивого равновесия, тем точнее будут описывать линеаризованные уравнения движение системы. Линеаризация дифференциальных уравнений позволяет получить замкнутое решение для таких систем, для которых нахождение интегралов точной, нелинейной системы уравнений в конечном виде, как правило, невозможно.

Удобным способом составления дифференциальных уравнений малых колебаний системы является использование уравнений Лагранжа. Эти уравнения для системы с одной степенью свободы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \tag{1*}$$

где T — кинетическая энергия системы, выраженная через обобщенную координату q и обобщенную скорость $\dot{q}$; Q — обобщенная сила.

Кинетическая энергия системы, подчиненной стационарным связям, выражается через обобщенные координаты и скорости формулой

$$T = \frac{1}{2} A(q)\,\dot{q}^2, \tag{2*}$$

где $A(q)$ является положительной функцией обобщенной координаты q. Далее для линеаризации выражения кинетической энергии разлагаем $A(q)$ в ряд Маклорена

$$A(q) = A(0) + A'(0)\,q + \frac{A''(0)}{2!}q^2 + \ldots \tag{3*}$$

Внеся это значение в формулу (2*), находим

$$T = \frac{1}{2}A(0)\,\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\left[A'(0)\,q + \frac{A''(0)}{2}q^2 + \ldots\right]\dot{q}^2. \tag{4*}$$

Тогда, полагая q и $\dot{q}$ малыми величинами, приближенно принимаем

$$T=\frac{1}{2}A(0)\dot{q}^2=\frac{1}{2}a\dot{q}^2, \qquad (5^*)$$

где для краткости постоянная $A(0)$ обозначена a.

Эта постоянная всегда положительна. Ее называют инерционным коэффициентом. Для линейных обобщенных координат инерционный коэффициент a имеет размерность массы, для угловых координат — размерность момента инерции твердого тела.

Потенциальная энергия системы является функцией обобщенной координаты

$$\Pi=\Pi(q). \qquad (6^*)$$

Разложим эту функцию в ряд Маклорена около положения устойчивого равновесия

$$\Pi(q)=\Pi(0)+\Pi'(0)q+\frac{1}{2}\Pi''(0)q^2+\frac{\Pi'''(0)}{3!}q^3+\ldots \qquad (7^*)$$

В этом выражении

$$\Pi(0)=0, \qquad (8^*)$$

так как положение равновесия выбрано за нулевой уровень потенциальной энергии. Обобщенная сила в положении равновесия также равна нулю, следовательно,

$$Q=\left(-\frac{\partial\Pi}{\partial q}\right)_{q=0}=0, \qquad (9^*)$$

и поэтому ряд (7*) начинается с третьего слагаемого. Отбросив члены более высокого порядка и обозначив для краткости $\Pi''(0)=c$, получим

$$\Pi(q)=\frac{1}{2}cq^2, \qquad (10^*)$$

где постоянная c называется квазиупругим коэффициентом. В случае устойчивого равновесия $c>0$. Внеся значения кинетической (5) и потенциальной (10*) энергий в уравнение Лагранжа (1*), получаем дифференциальное уравнение малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы

$$a\ddot{q}+cq=0. \qquad (11^*)$$

Это уравнение имеет структуру, аналогичную дифференциальному уравнению свободных колебаний материальной точки, возникающих под действием линейной восстанавливающей силы. Общий интеграл уравнения (11*) имеет вид

$$q=A\sin(kt+\alpha), \qquad (12^*)$$

где для краткости обозначено $k^2 = \frac{c}{a}$. Здесь A — амплитуда колебаний, α — начальная фаза, $kt+\alpha$ — фаза колебаний, k — круговая частота колебаний (ее часто называют просто частотой колебаний).

Амплитуда и начальная фаза колебаний определяются по начальным условиям. Обозначив начальные значения обобщенной координаты и ее производной при $t=0$ через $q=q_0$, $\dot{q}=\dot{q}_0$, получим

$$A=\sqrt{q_0^2+\frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}, \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{kq_0}{\dot{q}_0}. \tag{13*}$$

Период колебаний

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}. \tag{14}$$

Свободные, или, иначе, собственные колебания системы, определяемые уравнением (12*), являются гармоническими колебаниями. Их частота и период не зависят от начальных данных — это свойство называется изохронностью малых колебаний.

Следует заметить, что дифференциальное уравнение свободных колебаний (11*) может быть, конечно, составлено и без применения уравнений Лагранжа.

При решении задач на свободные колебания системы с одной степенью свободы рекомендуется следующий порядок действий.

Первый способ — применение уравнений Лагранжа:

1) выбираем обобщенную координату q;

2) составляем выражение кинетической энергии T;

3) находим потенциальную энергию П (только в случае, если система является консервативной) или вычисляем значение обобщенной силы;

4) подставив T и П (или выражение обобщенной силы) в уравнение Лагранжа, получаем дифференциальное уравнение малых колебаний;

5) проинтегрировав это уравнение и определив произвольные постоянные интегрирования, находим уравнение движения системы;

6) определяем период колебаний и другие искомые величины.

Второй способ — применение основного уравнения динамики или одной из общих теорем динамики системы:

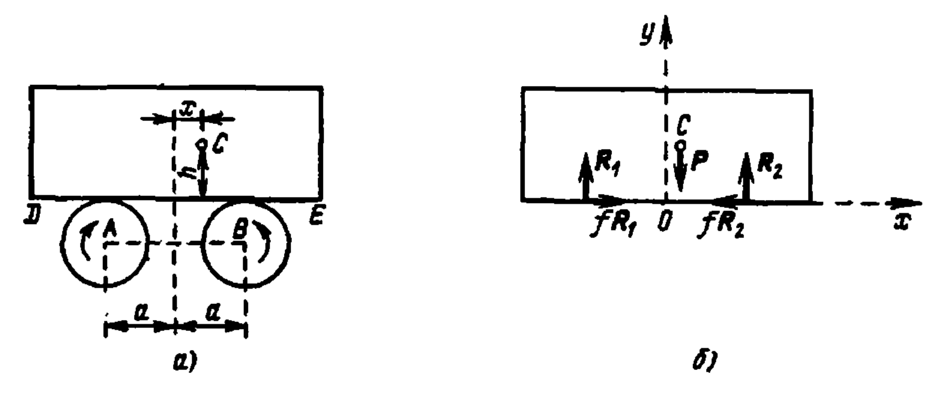
1) исходя из условий задачи, выбираем путь составления дифференциального уравнения — основное уравнение динамики, теорему о движении центра инерции, теорему об изменении кинетической энергии, теорему об изменении главного момента количеств движения;

2) применив избранную теорему, составляем дифференциальное уравнение малых колебаний системы;

3) проинтегрировав это дифференциальное уравнение, определяем по начальным данным произвольные постоянные интегрирования;

4) находим далее период колебаний и остальные искомые величины.

Задача 18.6. В приборе, предназначенном для определения коэффициента трения скольжения между сухими поверхностями (рис. *а*), прямоугольный металлический блок опирается горизонтальной плоскостью DE на два цилиндра, вращающихся в противоположные стороны вокруг неподвижных осей A и B. Центр тяжести блока находится



К задаче 18.6.

на высоте h от плоскости DE. Расстояние $AB=2a$. Центр тяжести блока в начальный момент сместили из среднего положения, вследствие чего блок стал совершать гармонические колебания периода T. Полагая коэффициент трения скольжения между блоком и обоими цилиндрами одинаковым, найти коэффициент трения скольжения.

Решение. Отбросим мысленно цилиндры и заменим их действие нормальными реакциями R_1, R_2 и силами трения fR_1, fR_2 (рис. *б*). В центре тяжести приложена сила тяжести блока P. Составим дифференциальные уравнения плоского движения блока, учтя при этом, что блок не перемещается вдоль оси y и не поворачивается вокруг центра инерции:

$$M\ddot{x}_C=-(fR_2-fR_1), \tag{1}$$

$$M\ddot{y}_C=R_1+R_2-P=0, \tag{2}$$

$$I_{zC}\ddot{\varphi}=R_2(a-x)-R_1(a+x)+fR_1h-fR_2h=0. \tag{3}$$

Из третьего уравнения находим с учетом (2)

$$(R_2-R_1)(a-fh)=x(R_2+R_1)=xP,$$

откуда

$$R_2-R_1=\frac{Px}{a-fh}.$$

Внеся это значение в уравнение (1), находим дифференциальное уравнение движения

$$\frac{P}{g}\ddot{x}=-f\frac{P}{a-fh}x,$$

или

$$\ddot{x}+\frac{gf}{a-fh}x=0.$$

Это — дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний, где квадрат частоты k равен

$$k^2=\frac{gf}{a-fh}.$$

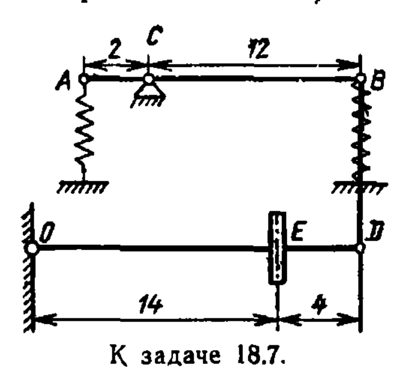
Период этих колебаний определяется формулой

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{a-fh}{gf}},$$

откуда искомый коэффициент трения скольжения равен

$$f=\frac{4\pi^2a}{gT^2+4\pi^2h}.$$

Задача 18.7. Рама балансировочной машины состоит из рычага AB, который может поворачиваться вокруг неподвижной точки C, совпадающей с его центром тяжести, тяги BD и вала OD с насаженным на него диском E. Вал OD закреплен шарнирно своим концом O. Концы рычага A и B соединены вертикальными пружинами с неподвижным фундаментом. Вес рычага AB равен 12 *кГ*; его радиус инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести C, равен 3 *дм*. Вал OD веса $Q=2$ *кГ* имеет постоянное поперечное сечение. Вес диска E равен $N=4{,}5$ *кГ*. Коэффициент жесткости каждой из пружин равен $c_1=32$ *кГ/дм*. Размеры: $AC=2$ *дм*, $BC=12$ *дм*, $OE=14$ *дм*, $DE=4$ *дм*.



К задаче 18.7.

Пренебрегая весом тяги BD, определить частоту собственных колебаний системы. Массу диска считать сосредоточенной в точке E.

Решение. Для нахождения частоты собственных колебаний системы применим уравнение Лагранжа. Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота рычага AB. Обозначим этот угол φ. Кинетическая энергия системы равна

$$T=I_{AB}\frac{\dot{\varphi}^2}{2}+I_{OD}\frac{\dot{\varphi}_1^2}{2}, \tag{1}$$

где I_{AB} — момент инерции рычага AB относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести C; I_{OD} — момент инерции вала OD вместе с насаженным на него диском относительно горизонтальной

оси, проходящей через неподвижный центр O; φ_1 — угол поворота вала OD.

При малых движениях вертикальные перемещения точек B и D равны. Следовательно, $BC\cdot\varphi = OD\cdot\varphi_1$, откуда

$$\varphi_1 = \frac{BC}{OD}\varphi. \qquad (2)$$

Продифференцировав (2) по времени и подставив значение φ_1 в (1), выражаем кинетическую энергию через обобщенную скорость

$$T = \left[I_{AB} + I_{OD}\left(\frac{BC}{OD}\right)^2\right]\frac{\dot\varphi^2}{2}. \qquad (3)$$

Переходим к вычислению обобщенной силы. Пусть горизонтальное положение рычагов является положением статического равновесия. Обозначим угол поворота рычага AB, соответствующий переходу от ненапряженного состояния пружин к положению равновесия, через $\varphi_{ст}$. Даем углу φ бесконечно малое приращение $\delta\varphi$ из положения равновесия, направленное против хода часовой стрелки, и записываем элементарную работу всех сил

$$\delta A = -c_1(AC)^2(\varphi + \varphi_{ст})\,\delta\varphi - c_1(BC)^2(\varphi+\varphi_{ст})\,\delta\varphi - \\ - N\cdot OE\,\delta\varphi_1 - Q\frac{OD}{2}\,\delta\varphi_1$$

или

$$\delta A = -c_1(AC)^2\varphi\cdot\delta\varphi - c_1(BC)^2\varphi\cdot\delta\varphi - \\ - \left[c_1(AC)^2\varphi_{ст} + c_1(BC)^2\varphi_{ст} + N\cdot OE\cdot k + Q\frac{OD}{2}k\right]\delta\varphi, \qquad (4)$$

где, согласно (2), $k = BC/OD$. Здесь элементарная работа силы упругости, к примеру пружины A, подсчитана по формуле

$$\delta A_1 = -F\,\delta x = -c_2(x + x_{ст})\,\delta x = \\ = -c_1AC(\varphi+\varphi_{ст})\,AC\,\delta\varphi = -c_1(AC)^2(\varphi+\varphi_{ст})\,\delta\varphi.$$

В силу уравнения равновесия квадратная скобка в (4) равна нулю и, следовательно,

$$\delta A = Q_\varphi\cdot\delta\varphi = -c_1\varphi\,[(AC)^2 + (BC)^2]\,\delta\varphi,$$

откуда обобщенная сила равна

$$Q_\varphi = -c_1\varphi\,[(AC)^2 + (BC)^2]. \qquad (5)$$

Для составления уравнения Лагранжа подставляем в

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_\varphi$$

значения кинетической энергии (3) и обобщенной силы из (5). Получаем

$$\left[I_{AB} + I_{OD}\left(\frac{BC}{OD}\right)^2\right]\ddot\varphi = -c_1[(AC)^2 + (BC)^2]\,\varphi. \qquad (6)$$

Найдем коэффициенты этого уравнения, выразив их в *кГ*, *дм* и *сек*:

$$I_{AB}=\frac{12}{g}\cdot 3^2=\frac{12\cdot 9}{98}, \qquad I_{OD}=\frac{Q\,(OD)^2}{g\cdot 3}+\frac{N}{g}(OE)^2=\frac{2\cdot 18^2}{98\cdot 3}+\frac{4,5}{98}\cdot 14^2.$$

Тогда

$$\left[I_{AB}+I_{OD}\left(\frac{BC}{OD}\right)^2\right]=\frac{1}{98}\left[12\cdot 9+\left(\frac{2\cdot 18^2}{3}+4,5\cdot 14^2\right)\frac{12^2}{18^2}\right]=\frac{149\cdot 12}{294},$$

$$c_1[(AC)^2+(BC)^2]=(4+12^2)\cdot 32=148\cdot 32.$$

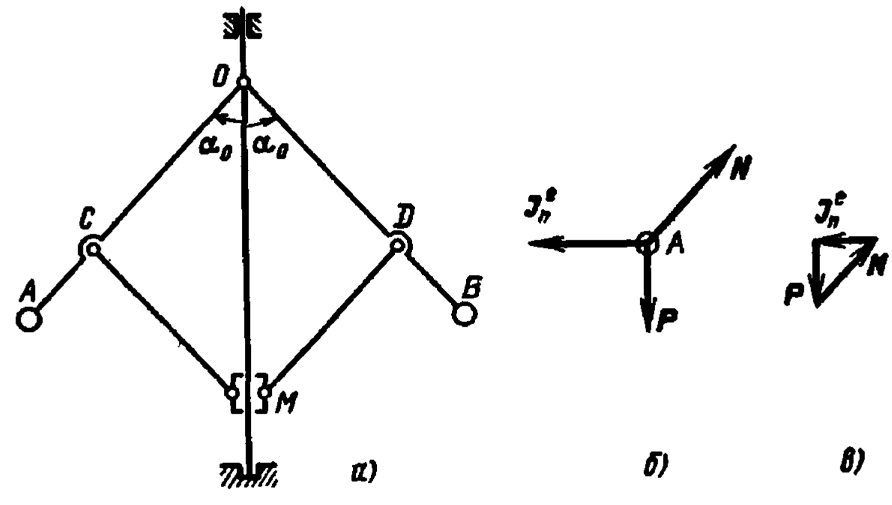
Внеся численные значения коэффициентов в уравнение (6), находим

$$\ddot{\varphi}+782\varphi=0.$$

Тогда собственная частота системы будет равна

$$k=\sqrt{782}\approx 28\ 1/сек.$$

Задача 18.8. Центробежный регулятор вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Шары регулятора A и B веса P каждый укреплены на концах стержней OA и OB, шарнирно соединенных в точке O. Муфта M может перемещаться вдоль



К задаче 18.8.

вертикальной оси. Муфта шарнирно соединена со стержнями MC и MD, которые в свою очередь соединены шарнирами C и D со стержнями OA и OB. Длины стержней $OA=OB=l$, кроме того, $OC=OD=MC=MD$. Стержни в положении динамического равновесия образуют с вертикалью углы α_0. В некоторый момент регулятор был выведен из равновесного положения и предоставлен самому себе. При этом будем считать, что угловая скорость регулятора ω вокруг вертикальной оси осталась неизменной (регулятор не соединен с машиной).

Найти период его малых колебаний около равновесного положения. Массой стержней и муфты пренебречь. Шары A и B принять за материальные точки.

Решение. Разобьем решение на два этапа. Сначала определим методом кинетостатики положение динамического равновесия системы. На втором этапе, воспользовавшись уравнениями Лагранжа в обобщенных координатах, составим дифференциальное уравнение малых колебаний системы и найдем частоту и период этих колебаний.

Первый этап. Применим к шару A в положении динамического равновесия метод кинетостатики. На шар A (рис. *б*) действует сила тяжести P, реакция стержня N, направленная по стержню AO. К этим силам, согласно методу кинетостатики, следует прибавить силу инерции J_n.

Так как шары вращаются с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, то будет существовать только нормальная сила инерции, равная по модулю

$$J_n = ml \sin \alpha_0 \omega^2,$$

где m — масса шара.

Три силы J_n, P, N можно рассматривать как находящиеся в равновесии (рис. *б*). Строим силовой треугольник (рис. *в*), из которого находим

$$P \operatorname{tg} \alpha_0 = J_n = ml \sin \alpha_0 \omega^2.$$

Отсюда находится угол α_0, соответствующий положению динамического равновесия:

$$\cos \alpha_0 = \frac{g}{l\omega^2}. \tag{1}$$

Второй этап. Даем углу α_0, образованному стержнями с вертикалью, малое приращение $\delta\alpha \equiv \beta$. Тогда

$$\alpha = \alpha_0 + \beta, \tag{2}$$

а шары начнут совершать малые колебания около положения равновесия.

Регулятор представляет собой систему с двумя степенями свободы. Примем за обобщенные координаты угол α, определяющий отклонение стержней с шарами от вертикали, и угол φ — угол поворота регулятора вокруг вертикальной оси.

Составим первое уравнение Лагранжа для обобщенной координаты α. Рассматриваем движение шара как составное: переносное (вращение вокруг вертикальной оси) и относительное (вращение вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O); находим абсолютную скорость шара по теореме сложения скоростей

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r.$$

Модули переносной и относительной скорости равны

$$|\boldsymbol{v}_e| = l\sin\alpha\cdot\omega = l\sin\alpha\cdot\dot{\varphi}, \qquad |\boldsymbol{v}_r| = l\dot{\alpha}.$$

Заметив, что $\boldsymbol{v}_r$ *лежит в плоскости,* совпадающей с ромбом $OABM$, а $\boldsymbol{v}_e$ перпендикулярна к этой плоскости, имеем

$$v^2 = v_e^2 + v_r^2 = l^2(\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha + \dot{\alpha}^2).$$

Кинетическая энергия двух шаров равна

$$T = 2\frac{mv^2}{2} = \frac{P}{g}l^2(\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha + \dot{\alpha}^2). \tag{3}$$

Переходим к определению обобщенной силы. Вертикальная координата шара z равна

$$z = l\cos\alpha.$$

Ее вариация есть

$$\delta z = -l\sin\alpha\,\delta\alpha.$$

Элементарная работа силы тяжести $2P$, единственной активной силы, приложенной к системе, равна

$$\delta A = 2P\,\delta z = -2Pl\sin\alpha\,\delta\alpha,$$

и следовательно, обобщенная сила равна

$$Q_\alpha = -2Pl\sin\alpha. \tag{4}$$

Подставляем найденные значения кинетической энергии и обобщенной силы в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\alpha} = Q_\alpha, \tag{5}$$

имеем

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}} = 2\frac{P}{g}l^2\dot{\alpha}, \qquad \frac{\partial T}{\partial\alpha} = 2\frac{P}{g}l^2\dot{\varphi}^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Заменив, согласно (2),

$$\dot{\alpha} = \dot{\beta},$$

получим вместо (5)

$$2\frac{P}{g}l^2\ddot{\beta} - 2\frac{P}{g}l^2\dot{\varphi}^2\sin(\alpha_0+\beta)\cos(\alpha_0+\beta) = -2Pl\sin(\alpha_0+\beta) \tag{6}$$

или, разделив на коэффициент при старшей производной и заметив, что $\dot{\varphi} = \omega$, находим

$$\ddot{\beta} - \omega^2\sin(\alpha_0+\beta)\cos(\alpha_0+\beta) = -\frac{g}{l}\sin(\alpha_0+\beta). \tag{7}$$

Угол β, согласно условию, — малая величина. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha_0+\beta) &\approx \sin\alpha_0 + \beta\cos\alpha_0, \\ \cos(\alpha_0+\beta) &\approx \cos\alpha_0 - \beta\sin\alpha_0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где приближенно принято $\sin\beta \approx \beta$, $\cos\beta \approx 1$.

Внеся значения (8) и заменив $g/l = \omega^2 \cos\alpha_0$, согласно (1), в уравнении (7), получим

$$\ddot\beta - \omega^2(\sin\alpha_0 + \beta\cos\alpha_0)(\cos\alpha_0 - \beta\sin\alpha_0) + \\ + \omega^2\cos\alpha_0(\sin\alpha_0 + \beta\cos\alpha_0) = 0,$$

или

$$\ddot\beta + \omega^2\sin^2\alpha_0\beta + \omega^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0\beta^2 = 0.$$

Отбросив $\omega^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0\beta^2$ как величину второго порядка малости, находим окончательно дифференциальное уравнение свободных малых колебаний центробежного регулятора

$$\ddot\beta + \omega^2\sin^2\alpha_0\beta = 0. \qquad (9)$$

Частота свободных колебаний есть

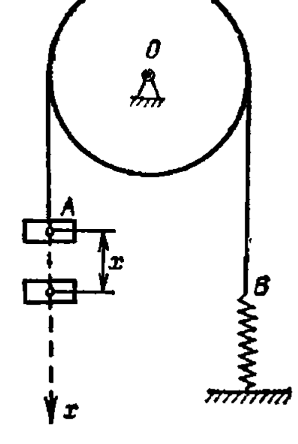
$$k = \omega\sin\alpha_0.$$

Период свободных малых колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sin\alpha_0}, \qquad (10)$$

Второе уравнение Лагранжа, соответствующее обобщенной координате φ, не потребовалось. Это объясняется тем, что в условии задачи изменение координаты φ задано. Ее производная, угловая скорость регулятора при вращении вокруг вертикальной оси постоянна.

Задача 18.9. Груз веса P подвешен к нерастяжимой нити AB, перекинутой через блок с неподвижной осью O. Вес блока F. Его масса распределена равномерно по поверхности круга радиуса r. Конец нити B прикреплен к вертикальной пружине, коэффициент жесткости которой равен c. Определить колебания груза, если в начальный момент груз находился в покое, его вес уравновешивался натяжением пружины и ему сообщили начальную скорость v_0, направленную по вертикали вниз. Трением между осью блока и подшипниками пренебречь. Весом нити пренебрегаем.



К задаче 18.9.

Решение. Воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. Выбираем ось x с началом в положении равновесия груза и направляем ее по вертикали вниз. Тогда координата x груза в произвольный момент времени полностью определяет положение системы и может быть принята за обобщенную координату.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии груза и кинетической энергии блока:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{I_z\omega_z^2}{2} = \frac{P}{2g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{Fr^2}{2g}\omega_z^2.$$

Напоминаем, что $I_z = Mr^2/2 = Fr^2/2g$.

Скорость груза равна по величине скорости точки на ободе блока

$$\dot{x} = r\cdot\omega_z.$$

Следовательно, окончательно выражение кинетической энергии системы через обобщенную скорость принимает вид

$$T = \frac{1}{2g}\left(P + \frac{F}{2}\right)\dot{x}^2.$$

Для определения обобщенной силы дадим системе возможное перемещение δx и составим элементарную работу задаваемых сил. Элементарная работа складывается из работы силы тяжести груза и работы упругой силы пружины

$$\delta A = P\cdot\delta x - c(x+\Delta)\delta x = (P - c\cdot\Delta - c\cdot x)\,\delta x = -cx\cdot\delta x,$$

ибо в положении равновесия $c\Delta = P$. Буквой Δ обозначено статическое удлинение пружины. Обобщенной силой является коэффициент *при возможном перемещении* δx в *выражении для элементарной работы*

$$Q = -cx. \tag{1}$$

Заметим, что в этой задаче обобщенная сила Q может быть легко вычислена и другим путем. Составим выражение потенциальной энергии системы, выбрав за нулевой уровень положение равновесия груза P. Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2}cx^2$$

и обобщенная сила равна

$$Q = -\frac{\partial\Pi}{\partial x} = -cx,$$

что совпадает с (1).

Составляем уравнение Лагранжа. Так как

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}} = \left(P + \frac{F}{2}\right)\frac{\dot{x}}{g}, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

то

$$\left(P + \frac{F}{2}\right)\frac{\ddot{x}}{g} = -cx,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{cg}{P + 0{,}5F}x = 0.$$

Решение этого однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$x = a \sin(kt + \beta), \tag{2}$$

где частота k находится из равенства

$$k^2 = \frac{cg}{P + 0{,}5F}.$$

Произвольные постоянные интегрирования a и β определяются из начальных условий:

$$\text{при } t = 0 \quad \text{имеем} \quad x_0 = 0, \ \dot{x}_0 = v_0.$$

Подставив эти значения в (2), находим

$$0 = a \sin\beta, \quad \text{или} \quad \beta = 0.$$

Далее из (2) имеем

$$\dot{x} = ak \cos kt,$$

и, следовательно, при $t = 0$

$$v_0 = ak \quad \text{или} \quad a = \frac{v_0}{k}.$$

Внеся значения произвольных постоянных в (2), получаем окончательно

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

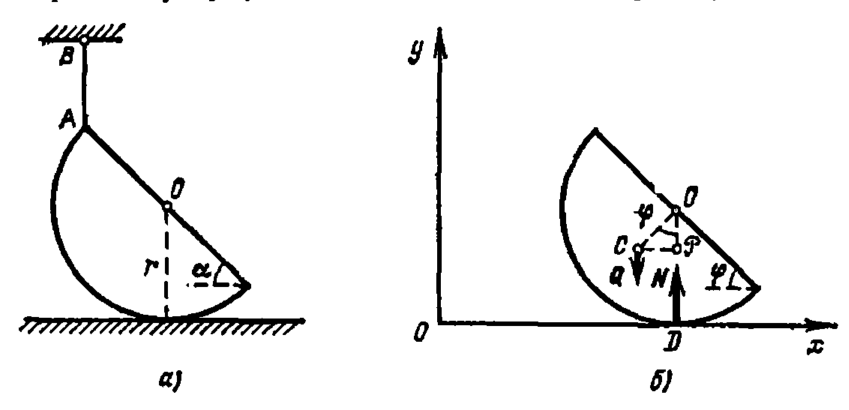
Период свободных колебаний груза равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{P + 0{,}5F}{cg}}.$$

Задача 18.10. Полушар веса Q и радиуса r удерживается в равновесии на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости нитью AB. При этом плоская часть поверхности полушара составляет угол α с горизонтом (рис. *а*). Определить после обрыва нити AB скорость центра O и ее максимальное значение, наибольшее давление полушара на горизонтальную плоскость. Найти также, полагая угол α малым, приведенную длину эквивалентного математического маятника.

Решение. После обрыва нити (рис. *б*) на полушар действуют две силы, вес Q и реакция гладкой плоскости N. Обе силы направлены по вертикали. Согласно теореме о движении центра инерции ускорение центра тяжести C будет также направлено вертикально. Так как начальная скорость точки C, так же как и остальных точек полушара, равнялась нулю, то центр инерции будет двигаться прямолинейно по вертикали. Центр полушара O находится от гладкой

плоскости на постоянном расстоянии r. Следовательно, точка O перемещается по горизонтальной прямой, параллельной опорной плоскости. Таким образом, скорость точки C направлена по вертикали, скорость точки O — по горизонтали. Восставив к скоростям этих двух точек перпендикуляры, находим мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$.



К задаче 18.10.

Применив теорему об изменении кинетической энергии к перемещению полушара из начального положения, определяемого углом α, в произвольное положение (угол φ), мы получим, обозначив OC через l,

$$\frac{1}{2} I_{\mathcal{P}} \dot{\varphi}^2 = mgl(\cos\varphi - \cos\alpha). \tag{1}$$

В левой части равенства стоит выражение кинетической энергии в конце перемещения (в начальный момент кинетическая энергия полушара равнялась нулю, так как он находился в покое). В правой части подсчитана работа силы тяжести при переходе полушара из начального положения в конечное. Работа реакции N равна нулю, так как эта реакция направлена перпендикулярно к перемещению точки D.

Момент инерции полушара относительно мгновенного центра скоростей $\mathcal{P}$ может быть выражен на основании теоремы Штейнера следующим образом:

$$I_{\mathcal{P}} = I_C + ml^2 \sin^2\varphi. \tag{2}$$

Таким образом, $I_{\mathcal{P}}$ является известной функцией угла φ. Определим I_C — момент инерции полушара относительно горизонтальной оси, проходящей через центр инерции и перпендикулярной к плоскости чертежа. Момент инерции однородного шара $2I_0$ относительно любой центральной оси равен

$$2I_0 = \frac{2}{5} Mr^2 = \frac{2}{5}(2m)r^2,$$

где $M = 2m$ — масса однородного шара.

Тогда момент инерции однородного полушара относительно горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости чертежа и проходящей через точку O, будет

$$I_0 = \frac{2}{5}mr^2.$$

Расстояние центра инерции полушара от точки O равно $l = 3r/8$. Воспользовавшись теоремой Штейнера, находим

$$I_C = I_0 - ml^2 = \frac{2}{5}mr^2 - \frac{9}{64}mr^2 = \frac{83}{320}mr^2. \tag{3}$$

Внеся это значение в формулу (2), находим

$$I_P = \frac{83}{320}mr^2 + ml^2\sin^2\varphi = ml^2\left(\frac{83}{45} + \sin^2\varphi\right). \tag{4}$$

Обозначив для краткости $83/45 = s^2$, из (1) получим

$$\dot\varphi^2 = \frac{2g(\cos\varphi - \cos\alpha)}{l(s^2 + \sin^2\varphi)}. \tag{5}$$

Скорость точки O — центра полушара — равна по величине

$$v_O = \overline{OP}\cdot\omega_M = l\cos\varphi\cdot\dot\varphi = \frac{3}{8}r\cos\varphi\cdot\dot\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3gr}\cos\varphi\sqrt{\frac{\cos\varphi - \cos\alpha}{s^2 + \sin^2\varphi}}.$$

Скорость точки O будет максимальной при $\varphi = 0$:

$$v_{0\,max} = \frac{1}{2}\sqrt{3gr}\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{s^2}} = \sqrt{\frac{135}{166}gr}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Для определения давления полушара на горизонтальную плоскость составим дифференциальное уравнение движения центра инерции в проекции на вертикальную ось y:

$$m\ddot y_C = N - Q. \tag{6}$$

С другой стороны, ордината центра инерции равна

$$y_C = r - l\cos\varphi.$$

Вычислив вторую производную от y_C, найдем

$$\ddot y_C = l(\dot\varphi^2\cos\varphi + \ddot\varphi\sin\varphi). \tag{7}$$

Воспользовавшись (5), находим вторую производную от угла φ по времени

$$\ddot\varphi = -\frac{g}{l}\sin\varphi\frac{s^2 + 1 + \cos^2\varphi - 2\cos\varphi\cos\alpha}{(s^2 + \sin^2\varphi)^2}.$$

Внеся в уравнение (7) значения первой и второй производных от

угла φ и подставив значение y_C в (6), после несложных преобразований найдем

$$N=\frac{Q}{(s^2+\sin^2\varphi)^2}(s^4+2s^2-s^2\cdot\sin^2\varphi-2s^2\cos\varphi\cdot\cos\alpha).$$

Учтя далее равенства (3) и (4), получаем окончательно

$$N=Q\frac{I_C}{I_{\mathscr{P}}^2}[I_C+ml^2(1+\cos^2\varphi-2\cos\varphi\cos\alpha)].$$

Наибольшее давление полушара на плоскость будет при $\varphi=0$

$$N_{\max}=Q\left(1+\frac{4ml^2}{I_C}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=Q\left(1+\frac{180}{83}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Дифференциальное уравнение колебаний полушара находится из (1) дифференцированием по времени

$$I_{\mathscr{P}}\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}\dot{\varphi}\frac{dI_{\mathscr{P}}}{dt}=-mgl\sin\varphi,$$

или

$$I_{\mathscr{P}}\ddot{\varphi}+ml^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2=-mgl\sin\varphi. \qquad (8)$$

Для перехода от составленного уравнения к уравнениям малых движений подсчитаем все члены с точностью до величин первого порядка малости включительно. Получим

$$I_C\ddot{\varphi}+mgl\varphi=0.$$

Приведенная длина эквивалентного математического маятника

$$l_{\text{прив}}=\frac{83}{120}r.$$

Переходим ко второму способу составления дифференциального уравнения малых колебаний при помощи уравнений Лагранжа. Выбираем угол φ за обобщенную координату системы. Тогда кинетическая энергия системы может быть представлена формулой

$$T=\frac{1}{2}I_{\mathscr{P}}\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}(I_C+ml^2\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2.$$

Для составления уравнений Лагранжа вычисляем

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=(I_C+ml^2\sin^2\varphi)\dot{\varphi},$$

и далее

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=(I_C+ml^2\sin^2\dot{\varphi})\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2\cdot ml^2\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Производная от кинетической энергии по обобщенной координате будет

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=ml^2\cdot\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Для нахождения обобщенной силы даем системе возможное перемещение $\delta\varphi$ и вычисляем работу всех сил на этом перемещении

$$Q\,\delta\varphi = mgl\,[\cos(\varphi+\delta\varphi)-\cos\varphi] \approx -mgl\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Ввиду малости $\delta\varphi$ принято $\sin\delta\varphi \approx \delta\varphi$, $\cos\delta\varphi \approx 1$. Внеся полученные значения в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

находим

$$(I_C + ml^2\sin^2\varphi)\,\ddot{\varphi} + ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi = -mgl\sin\varphi,$$

что соответствует уравнению (8), выведенному ранее другим путем.

2°. **Свободные колебания системы с учетом сил сопротивления.** Согласно полученным решениям свободные колебания, раз возникнув, длятся неограниченное время, и амплитуда этих колебаний не меняется. Между тем из опыта известно, что свободные колебания постепенно затухают, амплитуда их уменьшается и через некоторый промежуток времени колебания прекращаются, система возвращается в положение устойчивого равновесия.

Это несоответствие теории и опыта объясняется тем, что в дифференциальных уравнениях движения не учитывались силы сопротивления движению: сопротивление воздуха, трение, которые всегда действуют на систему.

Рассмотрим влияние вязкого трения на свободные колебания системы с одной степенью свободы. Будем полагать, что сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости, что соответствует малым скоростям. Только в этом случае движение системы будет описываться линейными дифференциальными уравнениями. Если же сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости (что верно при больших скоростях) или действует сила сухого трения, меняющая скачкообразно свое направление, то дифференциальное уравнение, описывающее движение системы, нелинейно. При сопротивлении, пропорциональном первой степени скорости, на отдельные точки системы действуют силы

$$F_i = -\beta_i \dot{r}_i,$$

где $\dot{r}_i$ — скорость i-й точки, β_i — положительный коэффициент пропорциональности, численно равный модулю силы сопротивления при скорости, равной единице.

Обобщенная сила сопротивления в этом случае может быть вычислена по формуле

$$Q = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}},$$

где

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i\,|\dot{r}_i|^2}{2}.$$

Функция Ф была впервые введена Рэлеем и названа в его честь диссипативной функцией Рэлея или функцией рассеяния *).

Диссипативная функция Ф равна половине скорости изменения полной механической энергии, которую имела бы система при отсутствии сил сопротивления.

Функция Рэлея, представленная через обобщенную скорость системы, имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2,$$

где $\beta > 0$.

Тогда уравнение Лагранжа второго рода примет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}, \qquad (15^*)$$

где

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}cq^2, \qquad \Phi = \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2.$$

Подставив эти значения в уравнение Лагранжа, получим дифференциальное уравнение движения системы

$$a\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = 0,$$

или

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0, \qquad (16^*)$$

где введены для краткости обозначения

$$2n = \frac{\beta}{a}, \quad \frac{c}{a} = k^2.$$

Общий интеграл уравнения (16*) будет

а) При малом сопротивлении, когда $n < k$,

$$q = Ae^{-nt}\sin(k_1t + \alpha), \qquad (17^*)$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ — круговая частота колебаний; α — начальная фаза колебаний.

Амплитуда колебаний уменьшается по закону геометрической прогрессии. Если $n \ll k$, то $k_1 \approx k$, и можно определять круговую частоту колебаний без учета сил сопротивления, как это часто делается в инженерных расчетах. Период затухающих колебаний определяется формулой

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \qquad (18^*)$$

Период свободных колебаний без учета сил сопротивления $T = 2\pi/k$

*) W. Rayleigh, Theory of sound, 1878. (Русский перевод, 2 изд. Рэлей, Теория звука, т. 1, 2, Гостехиздат, 1955.)

меньше периода T_1. Будем называть фактором затухания отношение последующей амплитуды к предыдущей

$$f = \frac{A_{i+1}}{A_i} = e^{-\frac{nT_1}{2}}.$$

Логарифмический декремент затухающих колебаний равен $nT_1/2$.

б) При большом сопротивлении, когда $n \geqslant k$, движение системы будет описываться уравнениями

$$q = e^{-nt}\left(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}\right) \qquad (n > k),$$
$$q = (C_1 + C_2 t)e^{-nt} \qquad (n = k).$$

Движение апериодическое — при неограниченном возрастании времени система возвращается в положение равновесия без колебаний.

При решении задач на свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления рекомендуется следующий порядок действий.

Первый способ — применение уравнений Лагранжа:

1) выбираем обобщенную координату q;

2) составляем выражение кинетической энергии T;

3) вычисляем обобщенную силу;

4) внеся кинетическую энергию и обобщенную силу в уравнение Лагранжа, находим дифференциальное уравнение малых колебаний системы;

5) проинтегрировав это уравнение и определив произвольные постоянные интегрирования, получаем уравнение движения системы;

6) определяем период колебаний, частоту и другие искомые величины.

Второй способ — применение основного уравнения динамики или общих теорем динамики системы:

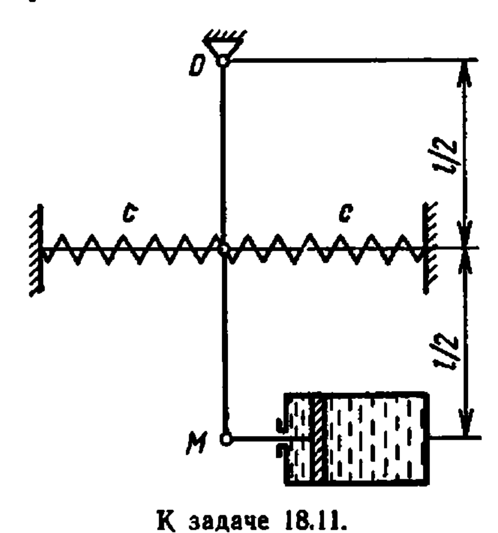
1) исходя из условий задачи, выбираем для составления дифференциального уравнения: основное уравнение динамики, теорему о движении центра инерции, теорему об изменении главного момента количеств движения;

2) применив избранную теорему, составляем дифференциальное уравнение малых колебаний системы;

3) далее, выполняем пп. 5) и 6), указанные в первом способе.

Задача 18.11. На конце жесткого стержня массы m и длины l прикреплена точечная масса M. Посредине стержень зажат двумя горизонтальными пружинами одинаковой жесткости c. На конце стержня установлен линейный вязкий демпфер, сила сопротивления которого пропорциональна скорости ($F = -\beta v$).

Составить дифференциальное уравнение малых колебаний системы. Определить границы апериодического движения. Найти период малых колебаний и наибольшее отклонение стержня при начальных условиях: $t=0$, $\varphi=0$, $\dot\varphi=\dot\varphi_0$.



К задаче 18.11.

Решение. Первый способ. Для составления уравнений Лагранжа выбираем в качестве обобщенной координаты угол φ отклонения стержня от равновесного положения, т. е. от вертикали. Составляем далее выражение кинетической энергии системы T как сумму кинетической энергии стержня и кинетической энергии массы M:

$$T=\frac{I_z\omega^2}{2}+\frac{Mv^2}{2}=\frac{ml^2}{6}\dot\varphi^2+\frac{Ml^2}{2}\dot\varphi^2, \tag{1}$$

где $I_z=ml^2/3$ — момент инерции стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O; $v=l\omega=l\dot\varphi$ — скорость конца стержня.

Для нахождения обобщенной силы составляем элементарную работу каждой силы:

1) Элементарная работа сил упругости пружин равна

$$\delta A_1=-2cx\cdot dx=-2c\frac{l}{2}\varphi\cdot\frac{l}{2}d\varphi=-\frac{cl^2}{2}\varphi\cdot d\varphi,$$

где x — перемещение середины стержня.

2) Элементарная работа силы сопротивления

$$\delta A_2=-\beta v\cdot dx_1=-\beta l\dot\varphi\cdot l\,d\varphi=-\beta l^2\dot\varphi\cdot d\varphi,$$

где dx_1 — перемещение конца стержня.

Диссипативная функция Рэлея в этом случае равна

$$\Phi=\frac{1}{2}\beta l^2\dot\varphi^2$$

и обобщенная сила сопротивления равна

$$Q_\beta=-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot\varphi}=-\beta l^2\dot\varphi,$$

что совпадает с коэффициентом при $d\varphi$ в выражении δA_2.

3) Элементарная работа силы тяжести стержня

$$\delta A_3=-mg\frac{l}{2}\sin\varphi\cdot d\varphi\approx-mg\frac{l}{2}\varphi\cdot d\varphi,$$

где $-mg\frac{l}{2}\sin\varphi$ — момент силы тяжести стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через шарнир O.

4) Элементарная работа силы тяжести точечной массы

$$\delta A_4 = -Mgl\sin\varphi\cdot d\varphi \approx -Mgl\varphi\cdot d\varphi.$$

Полная элементарная работа всех сил равна сумме четырех элементарных работ

$$\delta A = \left(-\frac{cl^2}{2}\varphi - \beta l^2\dot{\varphi} - mg\frac{l}{2}\varphi - Mgl\varphi\right)d\varphi.$$

Обобщенная сила — коэффициент при $d\varphi$:

$$Q = -\frac{cl^2}{2}\varphi - \beta l^2\dot{\varphi} - mg\frac{l}{2}\varphi - Mgl\varphi. \tag{2}$$

Вносим значения кинетической энергии и обобщенной силы в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q.$$

Находим

$$\left(\frac{ml^2}{3} + Ml^2\right)\ddot{\varphi} = -\left(\frac{cl^2}{2} + mg\frac{l}{2} + Mgl\right)\varphi - \beta l^2\dot{\varphi}, \tag{3}$$

или дифференциальное уравнение малых колебаний системы можно кратко записать так:

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \tag{4}$$

где

$$2n = \frac{3\beta}{m+3M}, \qquad k^2 = \frac{3(cl+mg+2Mg)}{l(m+3M)}. \tag{5}$$

Движение системы будет колебательным, если $k > n$, или

$$\sqrt{\frac{3(cl+mg+2Mg)}{l(m+3M)}} > \frac{3\beta}{2m+6M}. \tag{6}$$

Если же $k \leqslant n$, то движение системы будет апериодическим. Если условие (6) соблюдено, то уравнение движения системы будет

$$\varphi = e^{-nt}\left(C_1\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t + C_2\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t\right). \tag{7}$$

Для нахождения произвольных постоянных интегрирования подставим в (7) начальные условия $t=0$, $\varphi=0$; тогда получим $C_1=0$. Для определения второй произвольной постоянной вычисляем производную от (7):

$$\dot{\varphi} = -ne^{-nt}C_2\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t + \sqrt{k^2-n^2}\,e^{-nt}C_2\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t.$$

Подставив в это уравнение второе начальное условие $t=0$, $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$, находим

$$\dot{\varphi}_0 = \sqrt{k^2-n^2}\cdot C_2,$$

или

$$C_2=\frac{\dot\varphi_0}{\sqrt{k^2-n^2}}.$$

Итак, уравнение движения системы (7) будет

$$\varphi=e^{-nt}\cdot\frac{\dot\varphi_0}{\sqrt{k^2-n^2}}\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t. \tag{8}$$

Для определения максимального отклонения стержня вычислим $\dot\varphi$:

$$\dot\varphi=\frac{\dot\varphi_0}{k_1}e^{-nt}\left[-n\sin k_1t+k_1\cos k_1t\right], \tag{9}$$

где $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$.

Приравняв $\dot\varphi$ нулю, найдем время t_1, при котором $\varphi=\varphi_{max}$ Имеем

$$\dot\varphi=\frac{\dot\varphi_0}{k_1}e^{-nt_1}\left[-n\sin k_1t_1+k_1\cos k_1t_1\right]=0.$$

Отсюда

$$-n\sin k_1t_1+k_1\cos k_1t_1=0,$$

или

$$\operatorname{tg} k_1t_1=\frac{k_1}{n},$$

и, следовательно,

$$\sin k_1t_1=\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2+n^2}}=\frac{k_1}{k},\qquad t_1=\frac{1}{k_1}\arcsin\frac{k_1}{k}.$$

Внеся эти значения в (8), найдем

$$\varphi_{max}=\frac{\dot\varphi_0}{k}e^{-\frac{n}{k_1}\operatorname{arctg}\frac{k_1}{k}}. \tag{10}$$

Период колебаний системы равен

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}. \tag{11}$$

В случае $n>k$ решение уравнения (4) будет

$$\varphi=e^{-nt}\left(C_1e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t}+C_2e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}\right). \tag{12}$$

Для определения произвольных постоянных интегрирования вычисляем производную от угла φ:

$$\dot\varphi=-ne^{-nt}\left(C_1e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t}+C_2e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}\right)+$$
$$+e^{-nt}\left(C_1\sqrt{n^2-k^2}\,e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t}-C_2\sqrt{n^2-k^2}\,e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}\right). \tag{13}$$

Подставив в (12) и (13) начальные условия $t=0$, $\varphi=0$, $\dot\varphi=\dot\varphi_0$, получаем два алгебраических уравнения для определения C_1 и C_2

$$0=C_1+C_2,$$
$$\dot\varphi_0=-n(C_1+C_2)+C_1\sqrt{n^2-k^2}-C_2\sqrt{n^2-k^2},$$

откуда находим

$$C_1 = -C_2 = \frac{\varphi_0}{\sqrt{n^2 - k^2}}.$$

Движение, определяемое уравнением (12), является апериодическим затухающим движением.

Второй способ. Дифференциальное уравнение малых колебаний системы можно получить, применив вместо уравнений Лагранжа дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$I_z\ddot{\varphi} = M_z^e.$$

Заметим, что момент инерции равен

$$I_z = \frac{ml^2}{3} + Ml^2,$$

а главный момент внешних сил

$$M_z^e = -Mgl\sin\varphi - mg\frac{l}{2}\sin\varphi - \beta l^2\dot{\varphi} - \frac{cl^2}{2}\sin\varphi.$$

Для малых колебаний положим приближенно

$$\sin\varphi \approx \varphi.$$

Мы получим дифференциальное уравнение движения

$$\ddot{\varphi}\left(\frac{ml^2}{3} + Ml^2\right) = -Mgl\varphi - mg\frac{l}{2}\varphi - \beta l^2\dot{\varphi} - c\frac{l^2}{2}\varphi,$$

которое естественно совпадает с (3). Дальнейшее решение не отличается от приведенного в первом способе.

§ 3. Свободные колебания системы с одной степенью свободы. Восстанавливающая сила и обобщенный коэффициент жесткости

В главе VIII второго тома этой книги было дано элементарное определение восстанавливающей силы и коэффициента жесткости. Вычисление коэффициента жесткости, определение восстанавливающей силы и составление дифференциальных уравнений движения в более сложных случаях рассматриваются в настоящем параграфе.

Если точка или твердое тело находится под действием нескольких упругих сил, то для определения обобщенного коэффициента мысленно сообщают точке или твердому телу перемещение (линейное или угловое).

Если восстанавливающая сила (или момент) линейно зависит от перемещения q, то коэффициент при q в выражении для восстанавливающей силы (или момента) называется обобщенным коэффициентом

жесткости. При этом приращение восстанавливающей силы и перемещение вычисляются в одном и том же направлении. Так, например, пусть масса m находится в равновесии под действием нескольких пружин различной жесткости (рис. 18.2).

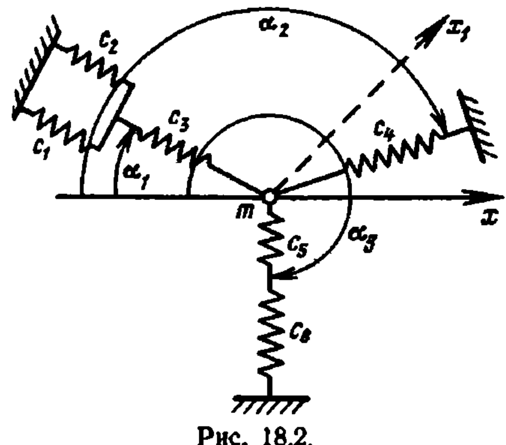


Рис. 18.2.

Для того чтобы вычислить обобщенный коэффициент жесткости в направлении x, следует мысленно дать перемещение точке m в направлении x и вычислить сумму проекций всех упругих сил на направление x.

Коэффициент при перемещении равен приведенному или обобщенному коэффициенту жесткости. Аналогично можно определить эквивалентный коэффициент жесткости в направлении x_1 (рис. 18.2).

При этом следует различать определение приведенного коэффициента жесткости в двух случаях:

а) при малых перемещениях,

б) при конечных перемещениях.

1°. **Вычисление коэффициента жесткости при малых перемещениях.** При малых перемещениях обобщенный коэффициент жесткости определяется по формуле

$$c_x = \sum_{i=1}^{n} c_i \cos^2 \alpha_i \tag{1*}$$

для n пружин, присоединенных к телу и направленных соответственно под углом α_i к перемещению; здесь c_i — коэффициент жесткости i пружины и равновесное положение точки имеет место при α_i.

Эта формула верна при малом перемещении точки из положения равновесия, если в положении равновесия нет предварительного натяга пружин.

При последовательном соединении n пружин, действующих в одном направлении, обобщенный коэффициент жесткости находится по формуле

$$c = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} 1/c_i}, \tag{2*}$$

причем эта формула верна и для малых и для конечных перемещений. После того как обобщенный коэффициент жесткости найден, можно составить дифференциальное уравнение движения, определить частоту и период свободных колебаний.

При решении задач на вычисление обобщенного коэффициента жесткости при малых перемещениях составление дифференциальных уравнений движения, определение частоты и периода колебаний следует придерживаться следующей последовательности действий:

1) определить положение равновесия точки, находящейся под действием упругих сил;

2) дать точке малое перемещение в том направлении, в котором требуется определить коэффициент жесткости;

3) вычислить проекции упругих сил, возникающих вследствие перемещения точки, на направление перемещения;

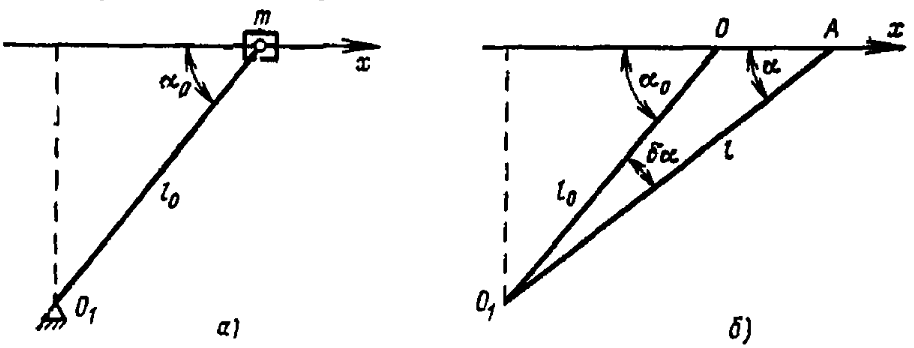
4) найти обобщенный коэффициент жесткости, разделив полученную сумму проекций упругих сил на перемещение точки;

5) упростить полученный результат, отбросив величины выше первого порядка малости;

6) составить дифференциальное уравнение движения системы;

7) определить частоту и период колебаний.

Задача 18.12. К точке массы m прикреплена пружина жесткости c, второй конец которой закреплен в точке O_1. При угле $\alpha = \alpha_0$



К задаче 18.12.

пружина длины l_0 недеформирована. Определить обобщенный коэффициент жесткости пружины при малых перемещениях точки по оси x. Найти частоту малых колебаний точки, если вся система находится в горизонтальной плоскости.

Решение. Выберем положение равновесия точки за начало координат O. Дадим точке малое перемещение $OA = x$. Тогда пружина будет образовывать с осью x угол α, а ее длина станет l. Модуль силы упругости найдется по формуле

$$F = c\,(l - l_0).$$

Эта сила направлена от A к O_1 (рис. б). Проекция этой силы на направление перемещения равна

$$F_x = -c\,(l - l_0)\cos\alpha. \qquad (1)$$

Перемещение OA определится равенством

$$OA = x = l\cos\alpha - l_0\cos\alpha_0. \qquad (2)$$

Обобщенный коэффициент жесткости в направлении x будет

$$c_x = \frac{|F_x|}{x} = \frac{c(l-l_0)\cos\alpha}{x}. \qquad (3)$$

С другой стороны, из рис. *б* следует

$$x\cos\alpha + l_0\cos\delta\alpha = l. \qquad (4)$$

Но $\delta\alpha$ — малая величина первого порядка малости, следовательно, можно приближенно принять

$$\cos\delta\alpha \approx 1, \qquad \cos\alpha = \cos(\alpha_0 - \delta\alpha) \approx \cos\alpha_0,$$

откуда

$$l - l_0 = x\cos\alpha_0. \qquad (5)$$

Внеся это значение в равенство (3), находим

$$c_x = \frac{cx\cos^2\alpha_0}{x} = c\cos^2\alpha_0. \qquad (6)$$

Формула (1*) представляет собой обобщение полученного результата (6) на случай любого числа упругих связей, присоединенных к точке под разными углами. Составляем дифференциальное уравнение малых колебаний точки

$$m\ddot{x} = -c\cos^2\alpha_0\cdot x,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{c\cos^2\alpha_0}{m}x = 0.$$

Частота колебаний равна

$$k = \cos\alpha_0\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi/\cos\alpha_0\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Задача 18.13. Груз массы m прикреплен к пружинам согласно схеме, представленной на рис. 18.2.

Определить обобщенный коэффициент жесткости при малом перемещении груза в направлении оси x. Составить дифференциальное уравнение движения, определить частоту и период колебаний.

Решение. Находим коэффициент жесткости пружины, эквивалентной трем пружинам, действующим под углом α_1 к оси x. Две пружины с коэффициентами c_1 и c_2, соединенными параллельно, эквивалентны одной пружине с коэффициентом жесткости (1*) $c_1 + c_2$. Следовательно, под углом α_1 действуют две пружины, соединенные

последовательно, с коэффициентами жесткости (c_1+c_2) и c_3. Коэффициент жесткости приведенной пружины равен (2*)

$$\frac{1}{c_{\alpha_1}}=\frac{1}{c_1+c_2}+\frac{1}{c_3},$$

откуда

$$c_{\alpha_1}=\frac{c_3(c_1+c_2)}{c_1+c_2+c_3}. \qquad (1)$$

Далее определяем коэффициент жесткости приведенной пружины, действующей под углом α_3:

$$\frac{1}{c_{\alpha_3}}=\frac{1}{c_5}+\frac{1}{c_6},$$

откуда

$$c_{\alpha_3}=\frac{c_5\cdot c_6}{c_5+c_6}. \qquad (2)$$

Пользуясь далее формулой (1*), находим коэффициент жесткости приведенной пружины при малом перемещении в направлении оси x

$$c_x=c_{\alpha_1}\cos^2\alpha_1+c_{\alpha_2}\cos^2\alpha_2+c_{\alpha_3}\cos^2\alpha_3.$$

Внося в это равенство найденные значения (1) и (2), а также учитывая, что $c_{\alpha_2}=c_4$, окончательно получаем

$$c_x=\frac{c_3(c_1+c_2)}{c_1+c_2+c_3}\cos^2\alpha_1+c_4\cos^2\alpha_2+\frac{c_5c_6}{c_5+c_6}\cos^2\alpha_3.$$

Здесь $\alpha_3=270°$ и $\cos\alpha_3=0$.

Дифференциальное уравнение малых колебаний точки будет

$$m\ddot{x}=-c_xx,$$

откуда частота колебаний

$$k=\sqrt{\frac{c_x}{m}},$$

а период колебаний

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c_x}}.$$

Задача 18.14. Точка массы m находится под действием n радиально расположенных пружин, лежащих в одной плоскости и образующих соответственно углы α_i с осью x и имеющих коэффициенты жесткости c_i.

При каких соотношениях между c_i и α_i обобщенный коэффициент жесткости в любом радиальном направлении будет одинаков при малых перемещениях точки.

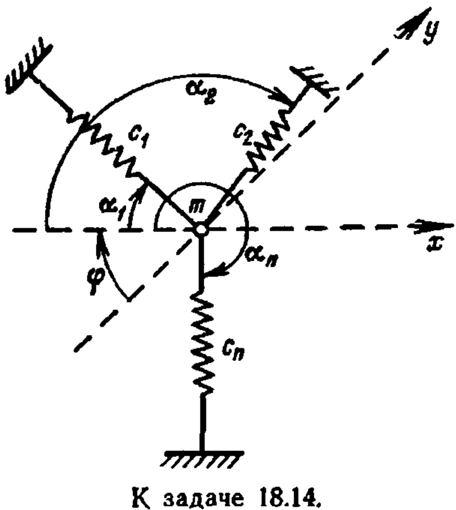
Решение. Выберем произвольное направление y, образующее угол φ с осью x, и найдем приведенный коэффициент жесткости при малом перемещении точки вдоль оси y

$$c_\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \cos^2(\alpha_i + \varphi). \qquad (1)$$

Преобразуем это равенство

$$c_\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i (\cos^2\alpha_i \cos^2\varphi + \sin^2\alpha_i \sin^2\varphi) - 2\sum_{i=1}^{n} c_i \cos\alpha_i \sin\alpha_i \cos\varphi \sin\varphi. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что приведенный коэффициент жесткости не будет зависеть от величины угла φ, если



К задаче 18.14.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cos^2\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \sin^2\alpha_i$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cos\alpha_i \sin\alpha_i = 0.$$

Эти два условия могут быть записаны и так:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cos 2\alpha_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i \sin 2\alpha_i = 0.$$

Пользуясь этими условиями, можно, в частности, легко показать, что три, четыре, шесть и т. д. радиальных пружин одинаковой жесткости, расположенных симметрично, образуют при малых перемещениях однородное упругое поле.

2°. **Вычисление коэффициента жесткости восстанавливающей силы при конечных перемещениях.**

Для определения восстанавливающей силы при конечных перемещениях рекомендуется следующий порядок действий:

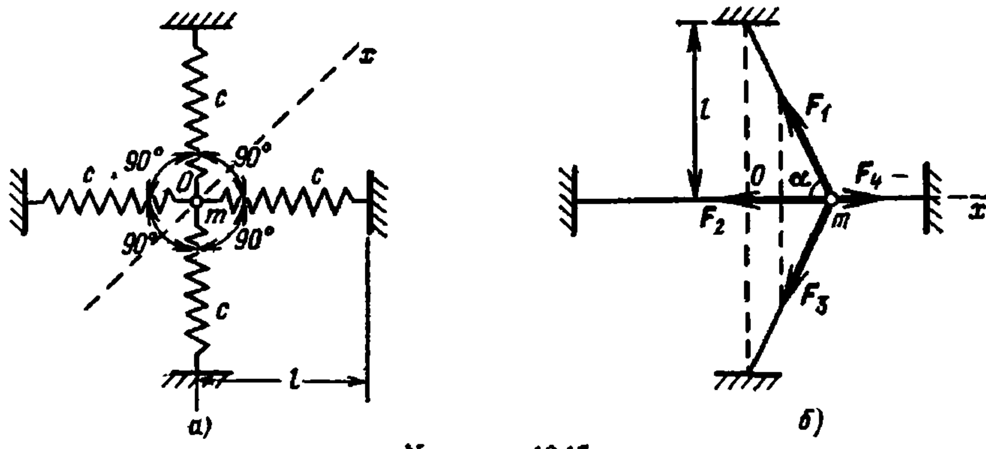
1) определяем положение равновесия точки, закрепленной с помощью пружин;

2) даем точке конечное перемещение в направлении, в котором требуется найти обобщенный коэффициент жесткости;

3) вычисляем сумму проекций упругих сил на направление перемещения, которая и является искомой восстанавливающей силой;

4) вычисляя производную от восстанавливающей силы по перемещению, находим обобщенный коэффициент жесткости.

Задача 18.15. Составить дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки массы m (рис. *а*) в направлении оси x. Точка прикреплена к четырем пружинам одинаковой жесткости. Коэффициент жесткости каждой пружины c, длина в равновесном состоянии l, предварительный натяг Δ, длина нерастянутой пружины l_0.



К задаче 18.15.

Решение. Дадим точке конечное перемещение Om, равное x. На точку будут действовать четыре упругие силы. Первая сила по модулю равна (рис. *б*)

$$F_1 = c(\delta l + \Delta),$$

где δl — удлинение пружины вследствие перемещения точки. Оно равно

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l.$$

Проекция силы F_1 на ось x будет

$$F_{1x} = -c\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l + \Delta\right)\cos\alpha,$$

где

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}.$$

Тогда вследствие симметрии

$$F_{1x} = F_{3x} = -cx\left(1 - \frac{l - \Delta}{\sqrt{l^2 + x^2}}\right).$$

Проекции сил F_2 и F_4 на ось x, совпадающую с ними, будут

$$F_{2x} = -c(x - \Delta), \qquad F_{4x} = -c(x + \Delta).$$

Следовательно, на точку вдоль оси x действует сила

$$R_x = \sum_{k=1}^{4} F_{kx} = -2cx\left(1 - \frac{l - \Delta}{\sqrt{l^2 + x^2}}\right) - 2cx = -2cx\left(2 - \frac{l - \Delta}{\sqrt{l^2 + x^2}}\right).$$

Дифференциальное уравнение колебаний точки будет

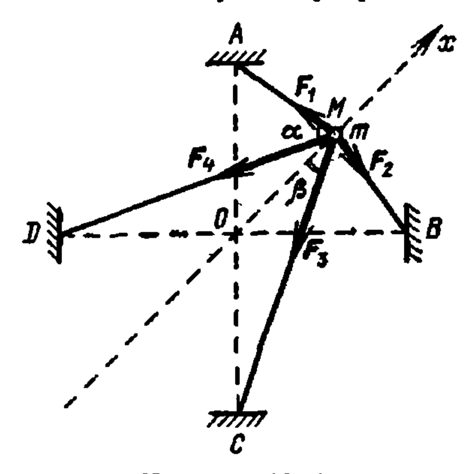
$$m\ddot{x} = -2cx\left(2 - \frac{l-\Delta}{\sqrt{l^2+x^2}}\right).$$

Некоторое представление о напряженном состоянии системы в данном направлении можно составить по производной от силы по перемещению, которую иногда называют коэффициентом жесткости в данном положении. Конечно, в данном случае восстанавливающая сила не равна cx. Найдем обобщенный коэффициент жесткости в направлении оси x

$$c_x = \frac{dR_x}{dx} = -2c\left[2 - \frac{l-\Delta}{\sqrt{l^2+x^2}} + \frac{(l-\Delta)x^2}{(l^2+x^2)\sqrt{l^2+x^2}}\right].$$

В этом случае обобщенный коэффициент жесткости является функцией перемещения.

Задача 18.16. В условиях предыдущей задачи определить восстанавливающую силу при конечных перемещениях точки вдоль оси x. Ось x делит угол между соседними пружинами пополам.



К задаче 18.16.

Решение. Даем точке смещение $OM = x$ (см. рисунок) вдоль оси и определяем силы, действующие на точку, считая все пружины растянутыми. Тогда модуль упругой силы

$$F_1 = F_2 = c(\Delta l_1 + \Delta),$$

где Δl_1 — удлинение соответствующей пружины, вызванное смещением точки OM, равно

$$\Delta l_1 = AM - AO = \sqrt{l^2 + x^2 - \sqrt{2}\,lx} - l.$$

Из треугольника OAM, пользуясь теоремой косинусов, находим

$$l^2 = l^2 + x^2 - \sqrt{2}\,lx + x^2 - 2\sqrt{l^2 + x^2 - \sqrt{2}\,lx}\cdot x\cdot\cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{2x - \sqrt{2}\,l}{2\sqrt{l^2+x^2-\sqrt{2}\,lx}}.$$

Тогда

$$F_{1x} = F_{2x} = -c\left(\sqrt{l^2+x^2-\sqrt{2}\,lx} - l + \Delta\right)\frac{2x-\sqrt{2}\,l}{2\sqrt{l^2+x^2-\sqrt{2}\,lx}}.$$

Аналогично из треугольника COM находим

$$CM = \sqrt{l^2 + x^2 + \sqrt{2}\,lx}.$$

Применив теорему косинусов для определения стороны $OC=l$, получим

$$\cos\beta=\frac{2x+\sqrt{2}\,l}{2\sqrt{l^2+x^2+\sqrt{2}\,lx}},$$

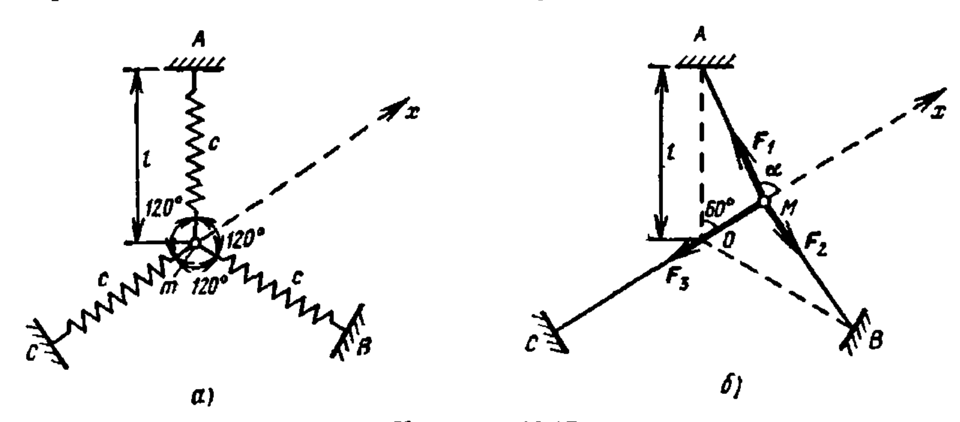
и тогда

$$F_{3x}=F_{4x}=-c\left(\sqrt{l^2+x^2+\sqrt{2}\,lx}-l+\Delta\right)\frac{2x+\sqrt{2}\,l}{2\sqrt{l^2+x^2+\sqrt{2}\,lx}}.$$

Таким образом, искомая восстанавливающая сила при смещении точки вдоль оси x будет

$$\sum_{k=1}^{4}F_{kx}=-2c\left\{2x-(l-\Delta)\left[\frac{2x+\sqrt{2}\,l}{2\sqrt{l^2+x^2+\sqrt{2}\,lx}}+\frac{2x-\sqrt{2}\,l}{2\sqrt{l^2+x^2-\sqrt{2}\,lx}}\right]\right\}.$$

Задача 18.17. Найти дифференциальное уравнение колебаний материальной точки массы m в направлении оси x, составляющей



К задаче 18.17.

угол 60° с OA. Точка прикреплена к трем радиальным симметричным пружинам одинаковой жесткости c, расположенным в одной плоскости (рис. *а*). В равновесном состоянии длина каждой пружины

$$l=l_0+\Delta,$$

где l_0 — длина свободной пружины, Δ — ее предварительный натяг.

Решение. Дадим точке конечное перемещение $OM=x$ (рис. *б*). Тогда, считая все пружины растянутыми, найдем модули сил F_1, F_2, F_3. Имеем

$$F_1=F_2=c\,(\delta l+\Delta),$$

где δl — удлинение первой или второй пружины, вызванное перемещением точки из O в M. Это удлинение равно

$$\delta l=AM-l=\sqrt{l^2+x^2-lx}-l.$$

Применив теорему косинусов к стороне OA треугольника OAM, находим

$$l^2 = AM^2 + OM^2 + 2AM\cdot OM\cdot\cos\alpha =$$
$$= l^2 + x^2 - lx + x^2 + 2x\sqrt{l^2 + x^2 - lx}\cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{l-2x}{2\sqrt{l^2+x^2-lx}}.$$

Проекция силы F_1 или F_2 на ось x будет

$$F_{1x} = F_{2x} = c\left(\sqrt{l^2+x^2-lx} - l + \Delta\right)\frac{l-2x}{2\sqrt{l^2+x^2-lx}}.$$

Проекция силы F_3 на ось x равна

$$F_{3x} = -c(x+\Delta).$$

Тогда дифференциальное уравнение колебаний вдоль оси x будет

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{3} F_{kx} \equiv R_x$$

или окончательно

$$m\ddot{x} = -c\left\{3x - (l-\Delta)\left[1 - \frac{l-2x}{\sqrt{l^2+x^2-lx}}\right]\right\}.$$

Находим далее обобщенный коэффициент жесткости, вычислив производную от R_x по координате x:

$$c_x = \frac{dR_x}{dx} = -3c\left[1 - \frac{l^2(l-\Delta)}{2(l^2+x^2-lx)^{1,5}}\right].$$

Задача 18.18. Исследовать неоднородность упругого поля системы из задачи 18.17 при конечных и при малых перемещениях точки в произвольном направлении в плоскости расположения пружин.

Решение. Рассмотрим упругое поле системы в случае конечных перемещений. Дадим точке m конечное перемещение $Om = x$ в произвольном направлении Ox. Тогда на точку m будет действовать восстанавливающая сила F_x, направленная к положению равновесия, точке O (рис. a). Для нахождения этой силы поступим следующим образом. Найдем реакции каждой из трех пружин F_1, F_2, F_3 и спроектируем эти силы на направление оси x. Это и будет искомая сила F_x. Обозначим угол, образованный осью Ox с начальным направлением пружины OA, через α, а углы между направлениями пружин и осью Ox после смещения — соответственно β, γ, ψ (рис. a).

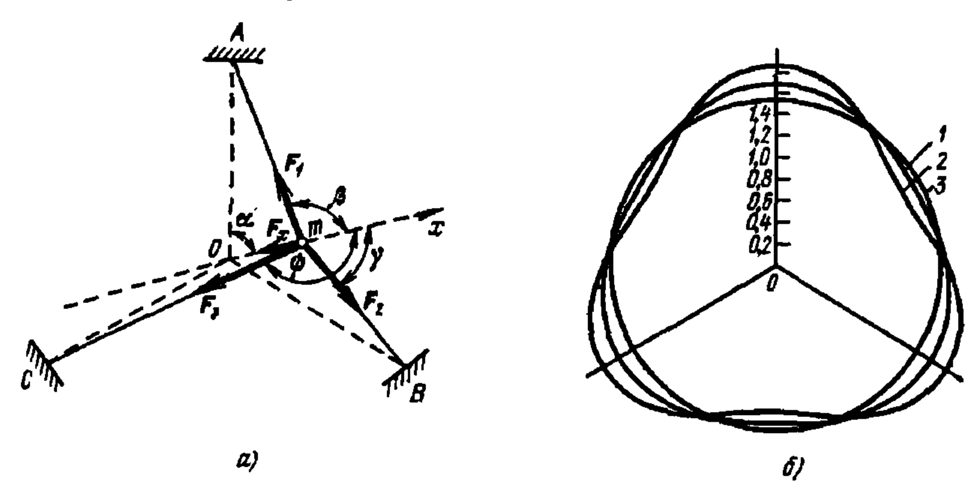
Реакция первой пружины равна по модулю

$$F_1 = c(\delta l_1 + \Delta),$$

где δl_1 — удлинение пружины, вызванное смещением точки m, равное

$$\delta l_1 = Am - l = \sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha} - l.$$

Для того чтобы спроектировать силу F_1 на ось x, найдем угол β.



К задаче 18.18.

Из треугольника OAm по теореме косинусов находим сторону OA:

$$(OA)^2 = (Om)^2 + (Am)^2 - 2Om\cdot Am\cdot\cos(180^\circ - \beta)$$

или

$$l^2 = x^2 + l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha + 2x\sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha}\cdot\cos\beta.$$

Отсюда мы получаем

$$\cos\beta = \frac{l\cos\alpha - x}{\sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha}}.$$

Таким образом, проекция силы F_1 на ось x равна

$$F_{1x} = F_1\cos\beta = c\left(\sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha} - l + \Delta\right)\frac{l\cos\alpha - x}{\sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha}}. \quad (1)$$

Реакция второй пружины равна по модулю

$$F_2 = c\,(\delta l_2 + \Delta),$$

где δl_2 — удлинение пружины, вызванное смещением точки m, равное

$$\delta l_2 = Bm - l = \sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos(120^\circ - \alpha)} - l.$$

Находим далее угол γ. По теореме косинусов из треугольника OBm находим

$$l^2 = x^2 + l^2 + x^2 - 2lx\cos(120^\circ - \alpha) + \\ + 2x\sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos(120^\circ - \alpha)}\cdot\cos\gamma,$$

откуда

$$\cos\gamma = \frac{l\cos(120^\circ - \alpha) - x}{\sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos(120^\circ - \alpha)}}.$$

Проекция силы F_2 на ось x равна

$$F_{2x}=c\left[\sqrt{l^2+x^2-2lx\cos(120^\circ-\alpha)}-l+\Delta\right]\times \times\frac{l\cos(120^\circ-\alpha)-x}{\sqrt{l^2+x^2-2lx\cos(120^\circ-\alpha)}}. \quad (2)$$

Аналогично находим для третьей силы

$$F_3=c(\delta l_3+\Delta),$$

где

$$\delta l_3=\sqrt{l^2+x^2-2lx\cos(120^\circ+\alpha)}-l.$$

Воспользовавшись теоремой косинусов, получаем

$$\cos\psi=\frac{l\cos(120+\alpha)-x}{\sqrt{l^2+x^2-2lx\cos(120^\circ+\alpha)}}$$

и

$$F_{3x}=F_3\cos\psi=c\left[\sqrt{l^2+x^2-2lx\cos(120^\circ+\alpha)}-l+\Delta\right]\times \times\frac{l\cos(120^\circ+\alpha)-x}{\sqrt{l^2+x^2-2lx\cos(120^\circ+\alpha)}}. \quad (3)$$

Воспользовавшись (1), (2), (3), находим восстанавливающую силу, стремящуюся вернуть точку в положение равновесия

$$F_x=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}=c\left\{3x+(l-\Delta)\left[\frac{l\cos\alpha-x}{\sqrt{l^2+x^2-2lx\cos\alpha}}+\right.\right. \left.\left.+\frac{l\cos(120^\circ-\alpha)-x}{\sqrt{l^2+x^2-2lx\cos(120^\circ-\alpha)}}+\frac{l\cos(120^\circ+\alpha)-x}{\sqrt{l^2+x^2-2lx\cos(120^\circ+\alpha)}}\right]\right\}.$$

Выражение для приведенного коэффициента жесткости упругого поля в любой точке плоскости может быть найдено дифференцированием F_x по переменной x:

$$c_n=\frac{\partial F}{\partial x}=c\left\{3-l^2(l-\Delta)\left[\frac{\sin^2\alpha}{[l^2+x^2-2lx\cos\alpha]^{3/2}}+\right.\right. \left.\left.+\frac{\sin^2(120^\circ-\alpha)}{[l^2+x^2-2lx\cos(120^\circ-\alpha)]^{3/2}}+\frac{\sin^2(120^\circ+\alpha)}{[l^2+x^2-2lx\cos(120^\circ+\alpha)]^{3/2}}\right]\right\}. \quad (4)$$

Имея систему с заданными величинами l и Δ, подставив в полученную формулу определенное значение x, можно, придавая углу α значения от 0 до 2π, получить кривую зависимости $c_n(\alpha)$. Заметим, что коэффициент жесткости каждой пружины c не скажется на форме кривой, поскольку c является общим множителем для всего выражения. На рис. *б* в полярной системе координат (c, α) показаны две такие кривые при одинаковых l и x, но при различных первоначальных натягах Δ. Кривая *1* при $l=2$, $x=0{,}1$, $\Delta=0{,}1$. Кривая *2* при $l=2$, $x=0{,}1$, $\Delta=0{,}2$.

Рассмотрим теперь упругое поле системы в случае малых перемещений и при отсутствии начального натяга. Система состоит из

трех «параллельно» соединенных пружин. Для определения приведенного коэффициента жесткости воспользуемся формулой

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \cos^2 \alpha_i, \qquad (1^*)$$

где c_n — коэффициент жесткости упругого поля в направлении оси x, c_i — коэффициент жесткости i-й пружины, α_i — угол между этой пружиной и осью x. Для рассматриваемой системы

$$c_n = c\,[\cos^2 \alpha + \cos^2 (120^\circ - \alpha) + \cos^2 (120^\circ + \alpha)] = {}^3/_2\, c. \qquad (5)$$

Таким образом, при малых отклонениях приведенный коэффициент жесткости поля не зависит от угла α, т. е. в окрестности положения равновесия упругое поле однородно. На рис. *б* показана окружность (кривая *3*), изображающая зависимость $c(\alpha)$ при малых отклонениях. При наличии первоначального натяга можно найти приведенный коэффициент жесткости в точке равновесия O, положив в формуле (4) перемещение $x = 0$. Тогда найдем

$$c_{эк} = \frac{3}{2} c \left(1 + \frac{\Delta}{l}\right). \qquad (6)$$

Сопоставляя (5) и (6), замечаем, что первоначальный натяг влияет на коэффициент жесткости упругого поля при малых перемещениях.

При использованных для построения кривых на рис. *б* данных ($l = 2$, $\Delta = 0{,}1$) из (6) находим

$$c_{эк} = 1{,}1 \cdot \frac{3}{2} c.$$

Это окружность, радиус которой на 0,1 больше радиуса окружности *3* на рис. *б*.

Неоднородность упругого поля опор вращающегося вала может привести к особому виду опасных колебаний, называемых параметрическим резонансом *).

§ 4. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

Если на систему, которая может совершать малые колебания около положения устойчивого равновесия, действует возмущающая сила, являющаяся известной функцией времени, то возникают сложные колебания. Эти колебания являются результатом наложения вынужденных и свободных колебаний. Дифференциальные уравнения движения системы могут быть составлены применением уравнений Лагранжа второго рода или с помощью общих теорем динамики.

---

*) А. С. Кельзон, К. К. Малиновский, В. И. Яковлев, Влияние неоднородности упругого поля опор на параметрические колебания жесткого вала, Доклады Академии наук СССР, т. 193, № 6, 1970.

1°. Вынужденные колебания без учета сил сопротивления. Обозначим обобщенную возмущающую силу $Q(t)$. Тогда уравнение Лагранжа второго рода будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}+Q(t), \qquad (1^*)$$

где q — обобщенная координата системы, T — кинетическая энергия системы, Π — потенциальная энергия системы.

Полагая отклонения системы от положения устойчивого равновесия малыми, можно представить кинетическую и потенциальную энергии в виде

$$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2, \qquad \Pi=\frac{1}{2}cq^2, \qquad (2^*)$$

где a, c — положительные постоянные коэффициенты: a — инерционный, c — квазиупругий коэффициенты. Внеся значения (2*) в уравнение Лагранжа (1*), получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a\ddot{q}+cq=Q(t), \qquad (3^*)$$

или

$$\ddot{q}+k^2q=\frac{1}{a}Q(t), \qquad (4^*)$$

где введено, как и ранее, обозначение $c/a=k^2$.

Решение дифференциального уравнения (4*) в случае, когда возмущающая сила $Q(t)$ является синусоидальной функцией или может быть представлена рядом Фурье, дано во втором томе (гл. VIII, § 4, п. 4°. Вынужденные колебания материальной точки). При произвольной зависимости возмущающей силы от времени решение уравнения (4*) дается формулой

$$q=q_0\cos kt+\frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt+\frac{1}{ak}\int_0^t Q(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau, \qquad (5^*)$$

где q_0 и $\dot{q}_0$ — значения обобщенной координаты и обобщенной скорости системы в начальный момент времени.

Сумма первых двух членов правой части (5*) определяет свободные колебания системы, возникающие из-за сообщения системе, находившейся в равновесии, начального отклонения и начальной скорости:

$$q_1=q_0\cos kt+\frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt. \qquad (6^*)$$

Второе слагаемое правой части (5*) определяет вынужденные колебания системы, возникающие под действием возмущающей силы $Q(t)$, приложенной к системе, находящейся в начальный момент в равновесии:

$$q_2=\frac{1}{ak}\int_0^t Q(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau. \qquad (7^*)$$

Если возмущающее воздействие приложено к системе в виде единичного импульса $S=1$, прилагаемого в начальный момент к покоящейся системе, то ее последующее движение дается формулой

$$q=\psi_1(t)=\frac{1}{ak}\sin kt; \qquad (8^*)$$

эта функция называется *реакцией системы на единичный импульс.*

Если к покоящейся системе приложить в момент $t=0$ постоянную силу $Q=1$, то движение системы определяется уравнением

$$\Psi_0(t)=\int_0^t \Psi_1(\tau)\,d\tau=\frac{1}{ak^2}(1-\cos kt). \qquad (9^*)$$

Эта функция $\Psi(t)$ называется *реакцией системы на единичное возмущение или переходной проводимостью.*

При решении задач на вынужденные колебания системы с одной степенью свободы рекомендуется следующий порядок действий:

1) выбрать обобщенную координату, определяющую положение системы;

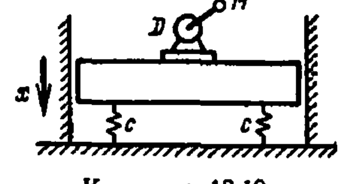
2) составить выражение потенциальной и кинетической энергии системы, выразив их через обобщенную координату и обобщенную скорость;

3) внеся выражения потенциальной и кинетической энергии в уравнения Лагранжа второго рода, получить дифференциальное уравнение малых колебаний системы;

4) сопоставив собственную частоту с частотой возмущающей силы, определить, будет резонанс или нет;

5) проинтегрировав дифференциальное уравнение колебаний, найти уравнение движения системы.

Задача 18.19. На прямоугольной плите веса P_1, установленной на четырех симметричных пружинах жесткости c каждая, находится двигатель веса P_2. Двигатель имеет кривошип радиуса r, который вращается с постоянной угловой скоростью ω. На конце кривошипа, массой которого пренебрегаем, прикреплен груз M веса P_3.



К задаче 18.19.

Полагая, что движение начинается из положения статического равновесия и начальная скорость плиты равна нулю, найти уравнение движения плиты и собственную частоту колебаний системы.

Решение. Система имеет одну степень свободы, и ее положение определяется одной обобщенной координатой x, смещением по вертикали вниз от положения статического равновесия. Такое заключение можно сделать, так как угол поворота кривошипа является заданной функцией времени и не может поэтому рассматриваться как вторая

обобщенная координата, требующая своего определения. Для составления уравнений Лагранжа второго рода, найдем потенциальную и кинетическую энергии системы. Обобщенная потенциальная энергия *) системы запишется в виде

$$\Pi(x,\ t)=\frac{1}{2}c_1(x+f_{\text{ст}})^2-(P_1+P_2+P_3)x+P_3r(1-\cos\omega t)+\text{const},$$

где $c_1=4c$ — суммарная жесткость четырех пружин, $f_{\text{ст}}$ — статическая деформация пружин, которая может быть определена из условия минимума потенциальной энергии в положении статического равновесия:

$$\left.\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ \omega t=0}}=c_1f_{\text{ст}}-(P_1+P_2+P_3)=0,$$

откуда

$$f_{\text{ст}}=\frac{P_1+P_2+P_3}{4c}.$$

Тогда окончательное выражение потенциальной энергии системы примет вид

$$\Pi=2c\left(x+\frac{P_1+P_2+P_3}{4c}\right)^2-(P_1+P_2+P_3)x+\\+P_3r(1-\cos\omega t)+\text{const}. \quad (1)$$

Кинетическая энергия системы складывается из двух слагаемых:

$$T=T_1+T_2,$$

где T_1 — кинетическая энергия плиты и двигателя, движущегося вместе с плитой как одно тело, T_2 — кинетическая энергия груза, закрепленного на кривошипе. Имеем

$$T_1=\frac{1}{2}\frac{P_1+P_2}{g}\dot{x}^2. \quad (2)$$

Кинетическую энергию груза найдем, рассматривая его абсолютную скорость как геометрическую сумму скорости полюса D и скорости во вращательном движении по отношению к полюсу D. Тогда

$$T_2=\frac{1}{2}\frac{P_3}{g}v^2=\frac{1}{2}\frac{P_3}{g}(v_r+v_e)(v_r+v_e).$$

Переносная и относительная скорости по модулю равны

$$v_e=\dot{x},\qquad v_r=\omega r.$$

Следовательно,

$$T_2=\frac{1}{2}\frac{P_3}{g}\omega^2r^2+\frac{1}{2}\frac{P_3}{g}\dot{x}^2+\frac{P_3}{g}\dot{x}\omega r\cos(90^\circ+\omega t), \quad (3)$$

где $(90^\circ+\omega t)$ — угол между векторами v_e и v_r.

---

*) А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961, стр. 195.

Просуммировав (2) и (3), найдем окончательное выражение кинетической энергии

$$T=\frac{1}{2g}(P_1+P_2+P_3)\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{P_3}{g}\omega^2r^2-\frac{P_3}{g}\dot{x}\omega r\sin\omega t. \qquad (4)$$

Переходим к составлению уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{\partial\Pi}{\partial x}. \qquad (5)$$

Находим

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}=\frac{1}{g}(P_1+P_2+P_3)\dot{x}-\frac{P_3}{g}\omega r\sin\omega t,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right)=\frac{1}{g}(P_1+P_2+P_3)\ddot{x}-\frac{P_3}{g}\omega^2r\cos\omega t,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x}=4c\left(x+\frac{P_1+P_2+P_3}{4c}\right)-(P_1+P_2+P_3)=4cx.$$

Внеся эти значения в (5), получим

$$\frac{1}{g}(P_1+P_2+P_3)\ddot{x}+4cx=\frac{P_3}{g}\omega^2r\cos\omega t. \qquad (6)$$

Обозначая для краткости

$$\frac{4cg}{P_1+P_2+P_3}=k^2, \qquad \frac{P_3\omega^2r}{P_1+P_2+P_3}=h,$$

запишем уравнение (6) в виде

$$\ddot{x}+k^2x=h\cos\omega t, \qquad (7)$$

где $k=\sqrt{\dfrac{4cg}{P_1+P_2+P_3}}$ — собственная частота колебаний системы.

Решением уравнения (7) является функция $x=x_1+x_2$, где x_1 — общее решение соответствующего однородного уравнения $\ddot{x}+k^2x=0$ и x_2 — частное решение уравнения (7). Следовательно,

$$x=c_1\cos kt+c_2\sin kt+\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos\omega t. \qquad (8)$$

Для определения произвольных постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями движения: при $t=0$ имеем $x=0$, $\dot{x}=0$. Внеся эти значения переменных в (8), найдем

$$c_1=-\frac{h}{k^2-\omega^2}.$$

Продифференцировав (8), получим

$$\dot{x}=-kc_1\sin kt+kc_2\cos kt-\frac{h\omega}{k^2-\omega^2}\sin\omega t. \qquad (9)$$

Внеся в это уравнение второе начальное условие, найдем $c_2=0$. Следовательно, уравнение колебаний плиты будет

$$x=-\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos kt+\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos\omega t. \quad (10)$$

Таким образом, движение плиты складывается из колебаний, имеющих частоту свободных колебаний (первое слагаемое правой части) и вынужденных (второе слагаемое правой части) колебаний.

Задача 18.20. Твердое тело массы m движется в прямолинейных горизонтальных гладких направляющих под действием силы притяжения к центру O, пропорциональной расстоянию от точки O до центра инерции тела (коэффициент пропорциональности c). К телу приложена сила

$$Q=Fe^{-at},$$

направленная вдоль направляющих. В начальный момент центр инерции совпадал с центром O и его скорость равнялась нулю.

Найти вынужденное движение тела.

Решение. Выберем ось x совпадающей с горизонтальными направляющими и примем центр O за начало координат. Для составления дифференциального уравнения движения применим теорему о движении центра инерции в проекции на ось x. Имеем

$$m\ddot{x}=-cx+Fe^{-at}. \quad (1)$$

где x — координата центра инерции тела. Запишем уравнение (1) в виде

$$\ddot{x}+k^2x=He^{-at}, \quad (2)$$

где для краткости обозначено

$$\frac{c}{m}=k^2, \qquad \frac{F}{m}=H. \quad (3)$$

Дальнейшее решение проведем двумя способами.

1-й способ. Приложим к твердому телу вместо заданной возмущающей силы $Q=Fe^{-at}$ единичный мгновенный импульс $S=1$ в момент времени $t=0$. Под действием этого импульса тело получит начальную скорость

$$\dot{x}_0=\frac{S}{m}=\frac{1}{m},$$

но не получит начального отклонения. Таким образом, движение тела при $t>0$ найдется интегрированием уравнения

$$\ddot{x}+k^2x=0$$

при начальных условиях $t=0$, $x_0=0$, $\dot{x}_0=1/m$.

Решением является реакция системы на единичный импульс (8*)

$$x = \psi_1(t) = \frac{1}{mk}\sin kt. \tag{4}$$

Если единичный импульс прикладывается не в начальный момент, а при $t=\tau$, то вместо (4) движение тела будет описываться уравнением

$$x = \psi(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t<\tau_0, \\ \frac{1}{mk}\sin k(t-\tau) & \text{при } t>\tau. \end{cases} \tag{5}$$

Представим действие произвольной силы $Q(t)$ за время от 0 до t как последовательное приложение бесконечно малых импульсов

$$dS = Q(\tau)\cdot d\tau. \tag{6}$$

Согласно (5) движение, вызываемое элементарным импульсом dS, определится произведением

$$Q(\tau)\cdot\psi_1(t-\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Результирующее движение определится как наложение движений, вызываемых каждым элементарным импульсом. Следовательно, движение тела описывается определенным интегралом

$$x = \int_0^t Q(\tau)\cdot\psi_1(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{mk}\int_0^t Q(\tau)\cdot\sin k(t-\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

До сих пор вывод сделан для произвольной возмущающей силы $Q(t)$ и результат (8) естественно совпадает с формулой (7*). Внеся в (8) значение $Q(t)=Fe^{-at}$, находим

$$x = \frac{F}{mk}\int_0^t e^{-a\tau}\sin(k\tau - kt)\,d\tau$$

или окончательно

$$x = \frac{F}{m(a^2+k^2)}\left(e^{-at} + \frac{a}{k}\sin kt - \cos kt\right).$$

Это и есть уравнение колебаний тела при нулевых начальных условиях движения.

2-й способ. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + k^2x = He^{-at} \tag{2}$$

ищем как сумму решений

$$x = x_1 + x_2.$$

Здесь x_1 — общее решение однородного уравнения

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0,$$

равное

$$x_1 = A\cos kt + B\sin kt. \qquad (9)$$

Второе слагаемое есть частное решение полного уравнения (2), ищем его в виде

$$x_2 = De^{-at}. \qquad (10)$$

Вычислив от x_2 вторую производную по времени и подставив выражения для x_2 и $\ddot{x}_2$ в уравнение (2), находим

$$D = \frac{H}{a^2+k^2} = \frac{F}{m(a^2+k^2)}. \qquad (11)$$

Таким образом, интегралом уравнения (2) является

$$x = A\cos kt + B\sin kt + \frac{F}{m(a^2+k^2)}e^{-at}. \qquad (12)$$

Для нахождения произвольных постоянных интегрирования A и B воспользуемся начальными условиями $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ при $t = 0$. Внеся в (12) первое начальное условие, находим

$$0 = A + \frac{F}{m(a^2+k^2)},$$

или

$$A = -\frac{F}{m(a^2+k^2)}. \qquad (13)$$

Для определения второй произвольной постоянной продифференцируем (12) по времени:

$$\dot{x} = -Ak\sin kt + Bk\cos kt - a\frac{F}{m(a^2+k^2)}e^{-at}. \qquad (14)$$

Подставив в (14) второе начальное условие, получим

$$0 = B_k - \frac{aF}{m(a^2+k^2)},$$

откуда

$$B = \frac{aF}{mk(a^2+k^2)}. \qquad (15)$$

Внеся значения произвольных постоянных в решение (12), находим окончательно

$$x = \frac{F}{m(a^2+k^2)}\left(e^{-at} + \frac{a}{k}\sin kt - \cos kt\right), \qquad (16)$$

что совпадает с решением, полученным первым способом. Заметим, что определять произвольные постоянные интегрирования из уравне-

ния (9) нельзя, так как движение тела описывается уравнением (12), а не (9).

2°. Влияние вязкого трения на вынужденные колебания системы с одной степенью свободы. Уравнения Лагранжа второго рода в этом случае имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}+Q(t), \tag{10*}$$

где $T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2$ — кинетическая энергия системы, $\Pi=\frac{1}{2}cq^2$ — потенциальная энергия системы. $\Phi=\frac{1}{2}\beta\dot{q}^2$ — диссипативная функция, $Q(t)$ — возмущающая сила, являющаяся заданной функцией времени. Внеся эти значения в уравнение (10*), находим

$$a\ddot{q}+\beta\dot{q}+cq=Q(t),$$

или

$$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=\frac{1}{a}Q(t), \tag{11*}$$

где обозначено $c/a=k^2$, $\beta/a=2n$.

Решение дифференциального уравнения (11*) в случае, когда возмущающая сила $Q(t)$ является синусоидальной функцией или может быть представлена рядом Фурье, дано во втором томе (гл. VIII, § 4, п. 4°).

При произвольной зависимости возмущающей силы от времени решение уравнения (11*) дается формулой

$$q=e^{-nt}\left(q_0\cos k_1t+\frac{nq_0+\dot{q}_0}{k_1}\sin k_1t\right)+$$
$$+\frac{1}{ak_1}\int_0^t Q(\tau)e^{-n(t-\tau)}\sin k_1(t-\tau)\,d\tau, \tag{12*}$$

где q_0 и $\dot{q}_0$ — начальные значения обобщенной координаты и обобщенной скорости, $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$ — собственная частота системы.

Первое слагаемое правой части определяет свободные колебания системы, возникающие из-за сообщения системе начального отклонения от положения равновесия и начальной скорости

$$q_1=e^{-nt}\left(q_0\cos k_1t+\frac{nq_0+\dot{q}_0}{k_1}\sin k_1t\right). \tag{13*}$$

Второе слагаемое правой части (12*) описывает вынужденные движения системы, возникающие под действием возмущающей силы $Q(t)$, приложенной к системе, находящейся в начальный момент в равновесии

$$q_0=\frac{1}{ak_1}\int_0^t Q(\tau)e^{-n(t-\tau)}\sin k_1(t-\tau)\,d\tau. \tag{14*}$$

Если возмущающее воздействие приложено к системе в виде единичного импульса $S=1$, прилагаемого в начальный момент к покоящейся системе, то ее последующее движение происходит согласно уравнению

$$q=\psi_1(t)=\frac{e^{-nt}}{ak_1}\sin k_1 t. \qquad (15^*)$$

Функцию (15*) называют *реакцией системы на единичный импульс.*

Если к покоящейся системе приложить в начальный момент постоянную единичную силу $Q=1$, то движение системы будет происходить согласно уравнению

$$q=\psi_0(t)=\int_0^t \psi_1(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\left[1-\frac{e^{-nt}}{k_1}(k_1\cos k_1 t+n\sin k_1 t)\right]. \qquad (16^*)$$

Функцию (16*) называют реакцией системы на единичное возмущение или переходной проводимостью.

При решении задач на вынужденные колебания системы с учетом сил вязкого сопротивления рекомендуется следующий порядок действий:

1) выбрать обобщенную координату, определяющую отклонение системы от положения равновесия;

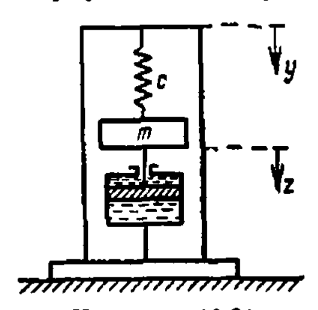
2) составить выражения потенциальной и кинетической энергии системы и диссипативной функции, выразив их через обобщенную координату и обобщенную скорость;

3) пользуясь уравнениями Лагранжа второго рода, составить дифференциальные уравнения малых колебаний системы,

4) проинтегрировав дифференциальное уравнение колебаний, найти уравнение движения системы.

Задача 18.21. Прибор для измерения вертикальных колебаний корпуса, на котором он установлен, состоит из массы m, прикрепленной к концу пружины, коэффициент жесткости которой c. Масса m соединена с жидкостным демпфером, создающим силу сопротивления, пропорциональную относительной скорости массы (коэффициент пропорциональности β). Верхнему концу пружины сообщают колебания согласно уравнению

$$y=H\cos pt.$$



К задаче 18.21.

Частота свободных колебаний массы m равна ω, а коэффициент демпфирования β составляет $1/\sqrt{2}$ от критического значения (когда затухающие колебания превращаются в апериодическое движение). Определить амплитуду установившихся вынужденных относительных колебаний массы по отношению к раме, регистрируемую прибором на барабане.

Решение. Составим дифференциальное уравнение движения груза при одновременном колебании груза и рамы, к которой прикреплена пружина.

Обозначив через z координату смещения массы относительно корпуса прибора и пользуясь методами динамики относительного движения, мы найдем

$$m\ddot{z} = -cz - \beta\dot{z} - m\ddot{y}. \quad (1)$$

Здесь $\ddot{y}$ — ускорение точки подвеса, $-m\ddot{y}$ — переносная сила инерции. После упрощений мы получим

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + k^2 z = -\frac{d^2y}{dt^2}, \quad (2)$$

где обозначено $\beta/m = 2n$, $c/m = k^2$.

Из условия задачи следует, что

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = Hp^2 \cos pt.$$

Внеся это значение в уравнение (2), находим

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + k^2 z = Hp^2 \cos pt. \quad (3)$$

Частное решение, определяющее вынужденные колебания массы, будет

$$z = \frac{Hp^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} \cos pt. \quad (4)$$

Согласно условию значение $\beta = 2n \cdot m$ равно $1/\sqrt{2}$ значения критического демпфирования, при котором $\beta = 2\sqrt{mc}$ или $k = n$. Следовательно, в рассматриваемой задаче $n = k/\sqrt{2}$. Подставив это значение в (4), находим

$$z = \frac{Hp^2}{\sqrt{k^4 + p^4}} \cos pt.$$

Амплитуда этих колебаний равна

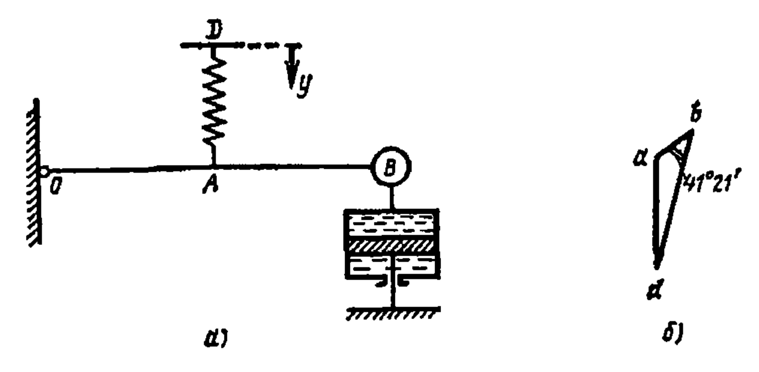
$$\frac{Hp^2}{\sqrt{k^4 + p^4}}.$$

Задача 18.22. Система состоит из стержня OB с насаженным на него шаром B; стержень закреплен шарнирно в точке O (рис. *а*). Момент инерции колеблющейся системы относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O перпендикулярно к рисунку, равен $I = 26{,}83$ *кГ·см·сек*^{2}. К стержню прикреплена в точке A пружина, коэффициент жесткости которой равен $c = 120$ *кГ/см*. Второй конец пружины D совершает заданные вертикальные колебания согласно уравнению

$$y = 0{,}05 \cos 6\pi t \text{ см}.$$

К точке B приложена сила вязкого сопротивления, пропорциональная скорости, коэффициент пропорциональности $\beta = 0{,}2$ *кГ·сек/см*.

Определить уравнение вынужденных колебаний шара B, максимальное растяжение пружины и наибольшую силу, приложенную к точке D, если $OA = 10$ *см*, $AB = 14$ *см*.



К задаче 18.22.

Решение. Для составления уравнения Лагранжа второго рода выбираем в качестве обобщенной координаты угол поворота стержня OB, обозначим его через φ и будем отсчитывать от положения статического равновесия. Тогда потенциальная энергия системы, равная

$$\Pi = \frac{c(x-y)^2}{2}$$

(где x — перемещение точки A), выразится через обобщенную координату так:

$$\Pi = \frac{c(10\varphi - 0{,}05\cos 6\pi t)^2}{2}. \tag{1}$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}. \tag{2}$$

Диссипативная функция Рэлея имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta(OB^2)\dot{\varphi}^2. \tag{3}$$

Подставим значения этих функций в уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} + Q(t). \tag{4}$$

Последовательно находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = I\dot\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c\,(10\varphi - 0{,}05\cos 6\pi t)\cdot 10,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot\varphi} = \beta\cdot(OB)^2\dot\varphi,$$
$$Q(t) = 0.$$

Внеся эти значения в (4), получим

$$I\ddot\varphi + \beta\,(OB^2)\,\dot\varphi + 100c\varphi = 0{,}5c\cos 6\pi t, \qquad (5)$$

или

$$26{,}83\ddot\varphi + 0{,}2\cdot 24^2\dot\varphi + 12\,000\varphi = 60\cos 6\pi t.$$

Разделив обе части уравнения на коэффициент при старшей производной, найдем

$$\ddot\varphi + 4{,}3\dot\varphi + 447\varphi = 2{,}24\cos 18{,}85t.$$

Амплитуда вынужденных колебаний определится по формуле

$$\varphi = \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)+4n^2p^2}},$$

или

$$\varphi = \frac{2{,}24}{\sqrt{(447-18{,}85^2)^2+4{,}3^2\cdot 18{,}85^2}} = 0{,}018 \text{ рад}. \qquad (6)$$

Уравнение вынужденных колебаний центра шара B будет

$$x_B = 24\cdot 0{,}018\cos(18{,}85t - 0{,}7217), \qquad (7)$$

так как разность фаз равна

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2-p^2} = \operatorname{arctg}\frac{4{,}3\cdot 18{,}85}{447-18{,}85^2} = 0{,}7217. \qquad (8)$$

Найдем максимальное растяжение пружины (рис. *б*). Максимальное перемещение верхнего конца пружины D равно $ab = 0{,}05$ *см*. Максимальное перемещение нижнего конца пружины, точки c, равно $bd = 10\cdot 0{,}018 = 0{,}18$ *см*. Откладываем эти отрезки под углом 41°21′ (разность фаз). Замыкающая сторона треугольника ad равна максимальному удлинению пружины (рис. *б*). По теореме косинусов находим

$$ad = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}18^2 - 2\cdot 0{,}05\cdot 0{,}18\cdot\cos 41°21'} = 0{,}15 \text{ см}.$$

Наибольшая сила, приложенная к точке D, будет

$$Q = c\cdot ad = 120\cdot 0{,}15 = 18 \text{ кГ}.$$

§ 5. Свободные колебания системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим малые колебания механической системы с двумя степенями свободы, подчиненной голономным идеальным и стационарным связям. Обозначим обобщенные координаты, определяющие положение системы в пространстве, через q_1, q_2. Кинетическая энергия такой системы будет однородной квадратичной формой обобщенных скоростей

$$T=\frac{1}{2}\left[A_{11}\dot{q}_1^2+2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+A_{22}\dot{q}_2^2\right]. \tag{1*}$$

В этой формуле коэффициенты A_{11}, A_{12}, A_{22} являются функциями обобщенных координат. Положение устойчивого равновесия, около которого происходят малые движения системы, примем за начало отсчета обобщенных координат. Следовательно, в положении равновесия все обобщенные координаты равны нулю. Раскладываем каждый коэффициент в ряд Маклорена по степеням обобщенных координат:

$$A_{ik}(q_1, q_2)=A_{ik}(0)+\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_1}\right)_0 q_1+\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_2}\right)_0 q_2+\ldots \tag{2*}$$

Ограничиваясь в разложении первым слагаемым, так как обобщенные координаты и скорости считаются малыми величинами, и обозначая для краткости постоянные коэффициенты

$$A_{ik}(0)=a_{ik}, \tag{3*}$$

находим окончательное выражение для кинетической энергии системы

$$T=\frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+a_{22}\dot{q}_2^2\right). \tag{4*}$$

Величины a_{11}, a_{12}, a_{22} называются инерционными коэффициентами. Если система движется в потенциальном силовом поле, то потенциальная энергия системы может быть разложена по степеням обобщенных координат в ряд Маклорена

$$\Pi(q_1, q_2)=\Pi(0)+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 q_1+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_0 q_2+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2+2\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1\,\partial q_2}\right)_0 q_1 q_2+\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2\right]+\ldots \tag{5*}$$

Так как выбор начала отсчета потенциальной энергии произволен, то положим потенциальную энергию системы в положении равновесия равной нулю:

$$\Pi(0)=0. \tag{6*}$$

В положении равновесия в нуль обращаются все обобщенные силы:

$$Q_i=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}=0, \tag{7*}$$

и, следовательно, в разложении (5*) исчезают члены, содержащие обобщенные координаты в первой степени. Тогда потенциальная энергия системы, совершающей малые движения около положения устойчивого равновесия, будет однородной квадратичной формой обобщенных координат:

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2), \tag{8*}$$

где для краткости постоянные коэффициенты обозначены

$$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 = c_{ik}. \tag{9*}$$

Коэффициенты c_{11}, c_{12}, c_{22} называются квазиупругими коэффициентами.

Внося полученные значения кинетической и потенциальной энергий в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ 2), \tag{10*}$$

находим дифференциальные уравнения движения системы:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11*}$$

в которых $a_{21} = a_{12}$, $c_{12} = c_{21}$.

Частное решение уравнений (11*) ищем в виде

$$q_1 = B\sin(kt + \alpha), \qquad q_2 = D\sin(kt + \alpha), \tag{12*}$$

где B, D, α — неизвестные постоянные. Для их определения вносим значения (12*) обобщенных координат в систему уравнений (11*) и сокращаем на общий множитель $\sin(kt + \alpha)$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} B(c_{11} - k^2a_{11}) + D(c_{12} - k^2a_{12}) = 0, \\ B(c_{21} - k^2a_{21}) + D(c_{22} - k^2a_{22}) = 0. \end{aligned} \tag{13*}$$

Эта система линейных однородных алгебраических уравнений всегда имеет тривиальное решение $B = D = 0$, соответствующее равновесию системы. Система уравнений (13*) может иметь другие, отличные от нуля решения, если определитель системы будет равен нулю:

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - k^2a_{11}, & c_{12} - k^2a_{12} \\ c_{12} - k^2a_{12}, & c_{22} - k^2a_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{14*}$$

Из уравнений (13*) находится отношение амплитуд

$$\frac{B}{D} = -\frac{c_{12} - k^2a_{12}}{c_{11} - k^2a_{11}} = -\frac{c_{22} - k^2a_{22}}{c_{12} - k^2a_{12}}. \tag{15*}$$

Определитель (14*) выражает равенство отношений амплитуд, найденных независимо из первого и второго уравнений (13*). Следовательно, если условия (15*) выполняются, то уравнения (13*) являются

зависимыми и из них может быть определено только отношение амплитуд.

Раскрыв определитель (14*) или из (15*) находим уравнение частот, иначе называемое вековым уравнением:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)k^4-(a_{11}c_{22}+a_{22}c_{11}-2c_{12}a_{12})k^2+(c_{11}c_{22}-c_{12}^2)=0. \quad (16^*)$$

Исследуемые движения будут малыми и, следовательно, равновесие устойчиво, если корни этого уравнения положительны:

$$k_1^2>0, \quad k_2^2>0. \quad (17^*)$$

Если же k_1^2 или k_2^2 отрицательны или являются комплексными величинами, то решение (12*) будет включать гиперболические функции и движения около положения равновесия не будут малыми. Корни k_1^2 и k_2^2 будут положительными при удовлетворении неравенств

$$\begin{aligned} &a_{11}>0, \quad a_{22}>0, \quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0,\\ &c_{11}>0, \quad c_{22}>0, \quad c_{11}c_{22}-c_{12}^2>0. \end{aligned} \quad (18^*)$$

Могут встретиться два особых случая. Первый случай, когда одновременно

$$\left.\begin{aligned} \Delta\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right)&=-\left(c_{12}-\frac{c_{11}}{a_{11}}a_{12}\right)^2=0,\\ \Delta\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right)&=-\left(c_{12}-\frac{c_{22}}{a_{22}}a_{12}\right)^2=0. \end{aligned}\right\} \quad (19^*)$$

При этом обеим координатам соответствуют гармонические колебания одинаковой частоты:

$$k=\sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}=\sqrt{\frac{c_{12}}{a_{12}}}=\sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}. \quad (20^*)$$

Второй случай, когда

$$c_{11}c_{12}-c_{12}^2=0. \quad (21^*)$$

В этом случае один из корней уравнения частот обращается в нуль.

После того как найдены корни уравнения частот k_1 и k_2, определяются главные колебания системы. Первое главное колебание описывается уравнениями

$$q_1=B_1\sin(k_1t+\alpha_1), \qquad q_2=D_1\sin(k_1t+\alpha_1), \quad (22^*)$$

а второе главное колебание — формулами

$$q_1=B_2\sin(k_2t+\alpha_2), \qquad q_2=D_2\sin(k_2t+\alpha_2). \quad (23^*)$$

Общее решение в силу линейности уравнений является суммой частных решений

$$q_1=B_1\sin(k_1t+\alpha_1)+B_2\sin(k_2t+\alpha_2), \quad (24^*)$$

$$q_2=D_1\sin(k_1t+\alpha_1)+D_2\sin(k_2t+\alpha_2). \quad (25^*)$$

Подставив в (15*) значения k_1 и затем k_2, определяем отношения амплитуд:

$$\beta_1 = \frac{B_1}{D_1} = -\frac{c_{12}-k_1^2 a_{12}}{c_{11}-k_1^2 a_{11}}; \qquad \beta_2 = \frac{B_2}{D_2} = -\frac{c_{12}-k_2^2 a_{12}}{c_{11}-k_2^2 a_{11}}. \qquad (26^*)$$

Тогда

$$q_1 = \beta_1 D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + \beta_2 D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \qquad (27^*)$$

$$q_2 = D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \qquad (28^*)$$

Произвольные постоянные интегрирования D_1, D_2, α_1, α_2 после этого находятся по начальным условиям движения.

Наряду с уравнениями Лагранжа для составления дифференциальных уравнений малых колебаний системы с двумя степенями свободы могут быть применены общие теоремы динамики.

При решении задач на исследование малых колебаний консервативной системы с двумя степенями свободы рекомендуется следующий порядок действий.

Первый способ — использование уравнений Лагранжа:

1) выбираем обобщенные координаты q_1 и q_2;

2) составляем выражение кинетической энергии T;

3) определяем потенциальную энергию системы Π или вычисляем обобщенные силы;

4) внеся выражения T и Π (или обобщенные силы) в уравнения Лагранжа, получаем систему двух дифференциальных уравнений малых колебаний;

5) задавшись частным решением этой системы, подставляем частное решение в систему дифференциальных уравнений движения;

6) исключив из полученной системы алгебраических уравнений амплитуды колебаний, находим уравнение частот;

7) решив уравнение частот, определяем собственные частоты системы;

8) внеся найденные частоты в частное решение, получаем формулы, описывающие два главных колебания;

9) сложив уравнения главных колебаний для каждой обобщенной координаты, находим общее решение;

10) определяем четыре произвольные постоянные из начальных условий движения.

Второй способ — использование общих теорем динамики:

1) исходя из условий задачи, выбираем путь составления дифференциальных уравнений — основное уравнение динамики или какую-либо из общих теорем динамики;

2) применив избранную теорему, составляем дифференциальные уравнения малых колебаний системы;

3) задавшись частными решениями системы, вносим эти частные решения в систему дифференциальных уравнений;

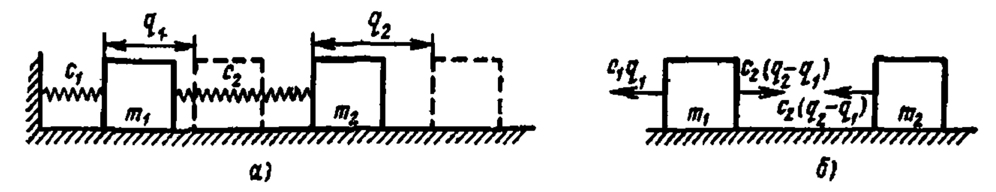
4) решив полученную систему уравнений, находим уравнение частот, из которого определяем собственные частоты системы;

5) внеся найденные частоты в частное решение, находим уравнения главных колебаний;

6) складывая уравнения главных колебаний для каждой обобщенной координаты, находим общее решение системы;

7) воспользовавшись начальными условиями движения, определяем произвольные постоянные интегрирования.

Задача 18.23. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежат два тела, массы которых m_1 и m_2. Первое тело прикреплено к стене пружиной, коэффициент жесткости которой равен c_1. Второе



К задаче 18.23.

тело присоединено к первому пружиной, коэффициент жесткости которой c_2 (рис. *а*). Определить уравнения движения системы, если в положении, когда обе пружины не растянуты, второму телу сообщили скорость v_0. Найти собственные частоты системы.

Решение. Система имеет две степени свободы. Ее положение может быть определено двумя обобщенными координатами. Первая обобщенная координата q_1 определяет перемещение первого тела от начального положения, вторая обобщенная координата q_2 измеряет перемещение второго тела от его начального положения (рис. *а*).

Применим уравнения Лагранжа для составления дифференциальных уравнений малых колебаний системы. Находим выражение кинетической энергии системы

$$T=\frac{m_1\dot{q}_1^2}{2}+\frac{m_2\dot{q}_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальных энергий двух пружин:

$$\Pi=\frac{c_1q_1^2}{2}+\frac{c_2(q_2-q_1)^2}{2}, \qquad (2)$$

так как q_1 является удлинением первой пружины, а (q_2-q_1) — удлинением второй пружины.

Переходим к составлению дифференциальных уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \qquad (3)$$

где $i=1$, 2, так как система имеет две степени свободы. Поскольку

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=m_1\dot{q}_1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)=m_1\ddot{q}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q_1}=0, \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}=c_1q_1-c_2(q_2-q_1), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

то первое дифференциальное уравнение движения системы принимает вид

$$m_1\ddot{q}_1=-c_1q_1+c_2(q_2-q_1). \tag{5}$$

Так как

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}=m_2\dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right)=m_2\ddot{q}_2, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2}=0, \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}=c_2(q_2-q_1), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

то второе дифференциальное уравнение движения запишется так:

$$m_2\ddot{q}_2=-c_2(q_2-q_1). \tag{7}$$

Таким образом, получена система двух дифференциальных уравнений движения (5) и (7).

С целью нахождения общего интеграла этой системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами будем искать частные решения в виде

$$q_1=B\sin(kt+\alpha), \qquad q_2=D\sin(kt+\alpha). \tag{8}$$

Для этого внесем значения (8) в уравнения (5) и (7). Сократив на общий множитель $\sin(kt+\alpha)$, находим

$$\left.\begin{aligned} Bk^2m_1-Bc_1+c_2(D-B)=0, \\ Dk^2m_2-c_2(D-B)=0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

В этих двух уравнениях три неизвестных B, D и k. Из них определяется отношение амплитуд; из первого уравнения находим

$$\frac{B}{D}=\frac{c_2}{c_1+c_2-m_1k^2}, \tag{10}$$

из второго уравнения

$$\frac{B}{D}=\frac{c_2-m_2k^2}{c_2}. \tag{11}$$

Приравняв правые части двух последних равенств, находим уравнение частот

$$\frac{c_1+c_2-m_1k^2}{c_2}=\frac{c_2}{c_2-m_2k^2}, \tag{12}$$

откуда получаем

$$k^4-\left(\frac{c_2}{m_2}+\frac{c_1+c_2}{m_1}\right)k^2+\frac{c_1c_2}{m_1m_2}=0. \tag{13}$$

Из этого биквадратного уравнения определяются собственные частоты системы

$$k_{1,2}=\sqrt{0,5\left(\frac{c_2}{m_2}+\frac{c_1+c_2}{m_1}\right)\mp\sqrt{0,25\left(\frac{c_2}{m_2}+\frac{c_1+c_2}{m_1}\right)^2-\frac{c_1c_2}{m_1m_2}}}. \tag{14}$$

Таким образом, существуют две вещественные частоты k_1 и k_2.

Ввиду линейности системы уравнений (5) и (7) общий интеграл может быть найден как сумма двух частных решений (8) с различными частотами, амплитудами и начальными фазами:

$$\left.\begin{aligned} q_1&=B_1\sin(k_1t+\alpha_1)+B_2\sin(k_2t+\alpha_2),\\ q_2&=D_1\sin(k_1t+\alpha_1)+D_2\sin(k_2t+\alpha_2),\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где

$$q_1=B_1\sin(k_1t+\alpha_1),\quad q_2=D_1\sin(k_1t+\alpha_1) \tag{16}$$

описывают первое главное колебание системы, а

$$q_1=B_2\sin(k_2t+\alpha_2),\quad q_2=D_2\sin(k_2t+\alpha_2) \tag{17}$$

— второе главное колебание.

С другой стороны, отношение амплитуд в первом главном колебании находится из (10) подстановкой $k=k_1$:

$$\frac{B_1}{D_1}=\frac{c_2}{c_1+c_2-m_1k_1^2}\equiv\beta_1. \tag{18}$$

Аналогично получаем для второго главного колебания

$$\frac{B_2}{D_2}=\frac{c_2}{c_1+c_2-m_1k_2^2}\equiv\beta_2, \tag{19}$$

где обозначения β_1, β_2 введены для краткости записи. Следовательно, общее решение (15) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} q_1&=\beta_1D_1\sin(k_1t+\alpha_1)+\beta_2D_2\sin(k_2t+\alpha_2),\\ q_2&=D_1\sin(k_1t+\alpha_1)+D_2\sin(k_2t+\alpha_2).\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Произвольные постоянные D_1, D_2, α_1, α_2 определяются по начальным условиям движения. Согласно условиям задачи при $t=0$

$$q_1=0,\ \dot q_1=0,\ q_2=0,\ \dot q_2=v_0. \tag{21}$$

Внеся эти значения переменных в уравнения (20), находим

$$\left.\begin{aligned} \beta_1D_1\sin\alpha_1+\beta_2D_2\sin\alpha_2&=0, & D_1\sin\alpha_1+D_2\sin\alpha_2&=0,\\ \beta_1D_1k_1\cos\alpha_1+\beta_2D_2k_2\cos\alpha_2&=0, & D_1k_1\cos\alpha_1+D_2k_2\cos\alpha_2&=v_0,\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

откуда определяются все произвольные постоянные интегрирования: $\alpha_1=\alpha_2=0$, т. е. начальные фазы обоих главных колебаний равны нулю, а амплитуды главных колебаний будут

$$D_1=\frac{v_0}{k_1(\beta_2-\beta_1)},\quad D_2=\frac{v_0}{k_2(\beta_1-\beta_2)}. \tag{23}$$

Движение системы, согласно (20), представляет наложение двух гармонических колебаний с разными частотами.

Для составления дифференциальных уравнений движения можно применить и другой способ, использовав основной закон динамики.

Рассмотрим произвольное положение системы, определяемое обобщенными координатами q_1, q_2 (рис. *б*).

Тогда, воспользовавшись уравнением динамики материальной точки и учитывая упругие силы пружин, составляем дифференциальные уравнения движения каждого груза:

$$m_1\ddot{q}_1 = c_2(q_2 - q_1) - c_1 q_1, \quad m_2\ddot{q}_2 = -c_2(q_2 - q_1). \tag{24}$$

Эти уравнения идентичны уравнениям (5) и (7), полученным при помощи уравнений Лагранжа.

Применение основного закона динамики ведет в данной задаче быстрее и проще к составлению дифференциальных уравнений движения, однако первый путь — использование уравнений Лагранжа в обобщенных координатах является более общим методом.

§ 6. Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы под действием синусоидальных возмущающих сил

Если на систему действуют внешние возмущающие силы в течение всего процесса колебаний, то возникают сложные колебания, являющиеся результатом наложения вынужденных и свободных колебаний системы. Дифференциальные уравнения движения системы могут быть составлены применением уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i(t), \tag{1*}$$

где q_i — обобщенные координаты системы, T — кинетическая энергия системы, Π — потенциальная энергия, $Q_i(t)$ — возмущающие силы. Если система имеет две степени свободы, то $i = 1, 2$.

Для случая двух степеней свободы подстановка T и Π в уравнения (1*) приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= H_1 \sin(pt + \delta), \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= H_2 \sin(pt + \delta), \end{aligned}\right\} \tag{2*}$$

где возмущающие силы $Q_i(t)$ взяты изменяющимися по синусоидальному закону (часто встречающийся случай, рассмотрением которого мы ограничимся ввиду значительного практического значения):

$$Q_1(t) = H_1 \sin(pt + \delta), \qquad Q_2(t) = H_2 \sin(pt + \delta). \tag{3*}$$

Общее решение системы (2*) дифференциальных уравнений складывается из общего решения однородной системы уравнений и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной

системы представляет ранее рассмотренные свободные колебания и находится согласно методам, приведенным в § 5 этой главы. Поэтому мы остановимся на определении частного решения этой системы, представляющего вынужденные колебания системы.

Частное решение ищем в виде

$$q_1 = D_1 \sin(pt+\delta), \quad q_2 = D_2 \sin(pt+\delta). \tag{4*}$$

Внеся эти значения в уравнения (2*), приходим к системе алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned}(c_{11}-p^2a_{11})D_1+(c_{12}-p^2a_{12})D_2=H_1,\\ (c_{21}-p^2a_{21})D_1+(c_{22}-p^2a_{22})D_2=H_2,\end{aligned}\right\} \tag{5*}$$

откуда определяются неизвестные D_1, D_2.

Определитель этой системы обращается в нуль,

$$(c_{11}-p^2a_{11})(c_{22}-p^2a_{22})-(c_{12}-p^2a_{12})^2=0, \tag{6*}$$

при резонансе, когда $p=k_1$ или $p=k_2$. В этом случае частное решение системы не может быть найдено в форме (4*).

Дифференциальные уравнения движения системы могут быть также составлены с помощью общих теорем динамики.

При решении задач на определение вынужденных колебаний рекомендуется следующая последовательность действий.

Первый способ — использование уравнений Лагранжа:

1) выбираем обобщенные координаты и составляем выражение кинетической энергии системы;

2) находим выражение потенциальной энергии или вычисляем обобщенные силы;

3) составляем дифференциальные уравнения движения системы, внеся значения кинетической и потенциальной энергий (или обобщенных сил) в уравнения Лагранжа;

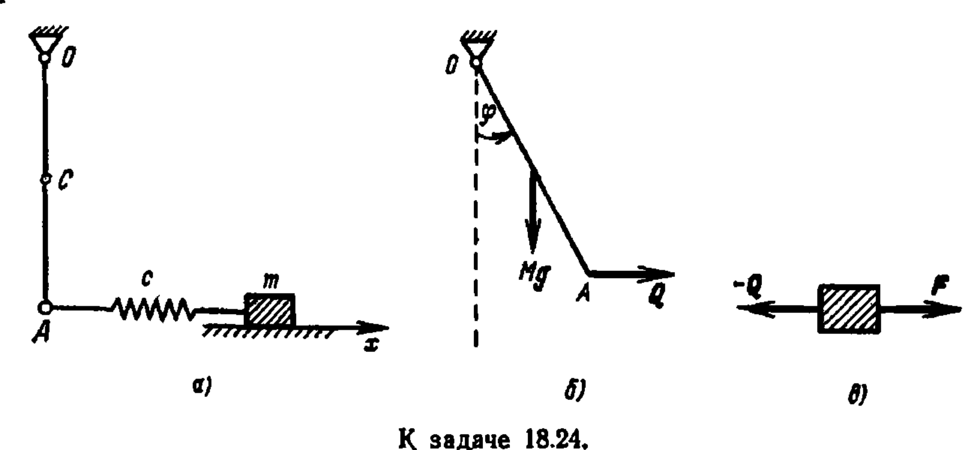
4) ищем частные решения дифференциальных уравнений движения системы и находим значения амплитуд обобщенных координат;

5) приравняв нулю знаменатель в выражениях амплитуд, находим значения частот возмущающей силы, при которых возникает резонанс.

Второй способ — применение общих теорем динамики: после выбора обобщенных координат системы непосредственно составляют дифференциальные уравнения движения, исходя из избранных теорем динамики. Дальнейший ход решения тот же, что и при первом способе.

Задача 18.24. В измерительном приборе блок массы m может перемещаться по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Он соединен пружиной, коэффициент жесткости которой равен c, с концом однородного стержня длиной $OA=l$ и массы M. Стержень

вторым концом закреплен шарнирно. Центр тяжести стержня находится на расстоянии $OC = a$ от шарнира. Определить вынужденные колебания блока, если на него действует горизонтальная сила $F = F_0 \sin \omega t$. При каких значениях ω в колебаниях блока наступит резонанс.



К задаче 18.24.

Решение. Система имеет две степени свободы. Ее положение можно определить двумя координатами: углом поворота стержня φ, который будем отсчитывать от вертикали, и координатой блока x, которую будем отсчитывать от равновесного положения блока при вертикальном положении стержня (очевидно, что при этом пружина не деформирована).

На блок действует реакция пружины и возмущающая сила. Дифференциальное уравнение прямолинейного движения блока будет (рис. в)

$$m\ddot{x} = -c(x - l \cdot \varphi) + F_0 \sin \omega t, \tag{1}$$

где $(x - l\varphi)$ — удлинение пружины при малых углах отклонения стержня. Для составления дифференциального уравнения вращения стержня (рис. б) заметим, что момент силы тяжести относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O, равен

$$-Mga \sin \varphi \approx -Mga\varphi.$$

Момент реакции пружины относительно той же оси равен

$$Ql \cos \varphi \approx c(x - l\varphi) l.$$

Здесь для малых углов поворота принято $\cos \varphi \approx 1$. Тогда дифференциальное уравнение малых колебаний стержня будет

$$I\ddot{\varphi} = -Mga\,\varphi + c(x - l\varphi) l. \tag{2}$$

Перепишем дифференциальные уравнения (1) и (2) в виде

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} + cx - cl\varphi &= F_0 \sin \omega t, \\ I\ddot{\varphi} + (Mga + cl^2)\varphi - clx &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Общее решение системы складывается из общего решения однородной системы уравнений и частного решения неоднородной системы. Так как, согласно условию, требуется определить вынужденные колебания блока, то будем искать только частное решение неоднородной системы, определяющее искомые колебания. Частное решение ищем, положив

$$x = A\sin\omega t, \qquad \varphi = B\sin\omega t. \tag{4}$$

Тогда

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin\omega t, \qquad \ddot{\varphi} = -B\omega^2\sin\omega t.$$

Подставив эти значения переменных и их вторых производных в систему (3), сократив затем на $\sin\omega t$, находим систему алгебраических уравнений для определения A и B

$$\left.\begin{aligned} (c - m\omega^2)A - clB = F_0, \\ -clA + (cl^2 + Mga - I\omega^2)B = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Отсюда определяем

$$A = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -cl \\ 0 & (cl^2 + Mga - I\omega^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (c - m\omega^2) & -cl \\ -cl & (cl^2 + Mga - I\omega^2) \end{vmatrix}}, \tag{6}$$

т. е. амплитуду вынужденных колебаний блока. Внеся это значение A в первое из уравнений (4), находим вынужденные колебания блока

$$x = \frac{F_0(cl^2 + Mga - I\omega^2)}{mI\omega^4 - (cI + mcl^2 + mMga)\omega^2 + cMga}\sin\omega t. \tag{7}$$

Координата x, определяющая колебания блока, неограниченно возрастает, когда знаменатель в правой части последнего равенства обратится в нуль:

$$mI\omega^4 - (cI + mcl^2 + mMga)\omega^2 + cMga = 0.$$

Отсюда находим резонансное значение ω:

$$\omega^2 = \frac{cI + mcl^2 + mMga \pm \sqrt{(cI + mcl^2 + mMga)^2 - 4cmMIga}}{2mI}. \tag{8}$$

Из четырех значений ω два отрицательных значения не имеют смысла. Таким образом, согласно (8), существуют два резонансных значения ω.

Задача 18.25. Груз P_1 (рис. *а*) подвешен к неподвижной точке A при помощи пружины, коэффициент жесткости которой c_1. К грузу P_1 приложена вертикальная возмущающая сила $Q = Q_0\sin\omega t$. Груз P_2, являющийся виброгасителем, подвешен к грузу P_1 при помощи пружины с коэффициентом жесткости c_2. Пренебрегая массами пружин, определить коэффициент жесткости c_2 и вес второго груза P_2, при

которых амплитуда вынужденных колебаний первого груза будет равна нулю.

Решение. Выберем положение равновесия грузов за начало отсчета (рис. *б*). Система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты принимаем отклонение первого груза от положения равновесия x_1 и смещение второго груза от своего положения равновесия x_2. Тогда к первому грузу будут приложены три силы: упругая сила верхней пружины

$$F_1 = -c_1x_1, \tag{1}$$

упругая сила нижней пружины

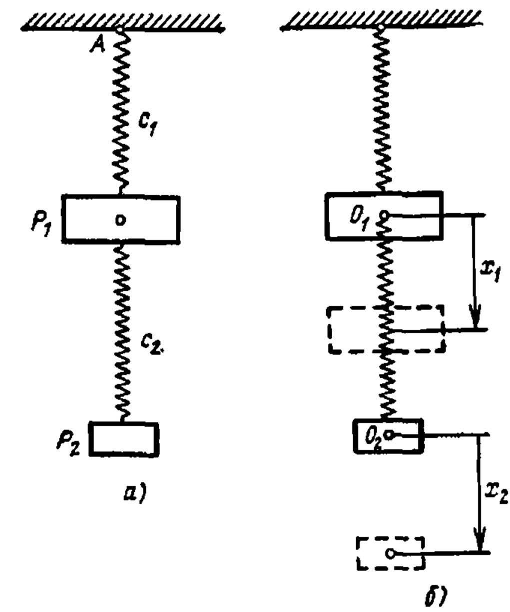
$$F_2 = c_2(x_2 - x_1), \tag{2}$$

возмущающая сила

$$Q = Q_0 \sin \omega t. \tag{3}$$

Ко второму грузу приложена одна сила: упругая сила нижней пружины

$$F_3 = -c_2(x_2 - x_1). \tag{4}$$



К задаче 18.25.

Составляем дифференциальные уравнения движения грузов

$$\frac{P_1}{g}\ddot{x}_1 = -c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1) + Q_0 \sin \omega t, \tag{5}$$

$$\frac{P_2}{g}\ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1). \tag{6}$$

Частное решение этой системы, определяющее вынужденные колебания грузов, ищем в виде

$$x_1 = D_1 \sin \omega t, \qquad x_2 = D_2 \sin \omega t. \tag{7}$$

Подставив значения переменных (7) в уравнения (5) и (6), находим

$$\left(c_1 + c_2 - \frac{P_1}{g}\omega^2\right)D_1 - c_2D_2 = 0, \qquad -c_2D_1 + \left(c_2 - \frac{P_2}{g}\omega^2\right)D_2 = 0. \tag{8}$$

Из этих уравнений определяются величины амплитуд вынужденных колебаний

$$D_1 = \frac{Q_0\left(c_2 - \frac{P_2}{g}\omega^2\right)}{\left(c_1 + c_2 - \frac{P_1}{g}\omega^2\right)\left(c_2 - \frac{P_2}{g}\omega^2\right) - c_2^2}, \tag{9}$$

$$D_2 = \frac{Q_0c_2}{\left(c_1 + c_2 - \frac{P_1}{g}\omega^2\right)\left(c_2 - \frac{P_2}{g}\omega^2\right) - c_2^2}. \tag{10}$$

Согласно уравнению (9) амплитуда вынужденных колебаний первого груза обращается в нуль, если выбрать коэффициент жесткости второй пружины c_2 и вес P_2 так, чтобы

$$c_2 - \frac{P_2}{g}\omega^2 = 0. \tag{11}$$

Таким образом, при заданной частоте возмущающей силы ω можно всегда подобрать коэффициент жесткости добавочной пружины и вес второго груза так, чтобы погасить вынужденные колебания первого груза. При этом следует остерегаться резонанса, который наступает при обращении в нуль знаменателя в (9) и (10):

$$\left(c_1 + c_2 - \frac{P_1}{g}\omega^2\right)\left(c_2 - \frac{P_2}{g}\omega^2\right) - c_2^2 = 0. \tag{12}$$

Значение угловой скорости ω, определяемой из равенства (11), не обращает в нуль знаменатель в (9) и (10) и, следовательно, не удовлетворяет (12). Однако не всегда удается точно поддерживать одно и то же значение ω. При случайном изменении угловой скорости и возможно возникновение опасных резонансных колебаний.

§ 7. Исследование колебаний энергетическим методом. Определение собственной частоты

Собственная частота системы является важным параметром, определяющим характер как свободных, так и вынужденных колебаний системы. В сложных системах, наряду с ранее рассмотренными способами, часто применяется энергетический метод определения собственной частоты системы. Во многих случаях энергетический метод проще и быстрее ведет к цели.

Для консервативной системы полная механическая энергия, равная сумме потенциальной и кинетической энергий, сохраняет неизменной свою величину

$$T + \Pi = \text{const}. \tag{1*}$$

Это закон сохранения механической энергии при движении системы в потенциальном силовом поле. Здесь T — кинетическая энергия, Π — потенциальная энергия системы.

Пользуясь законом (1*) для системы с одной степенью свободы, можно идти дальше двумя путями:

1) Вычислив от обеих частей равенства (1*) производную по времени, находим дифференциальное уравнение движения системы, из которого непосредственно определяется собственная частота системы.

2) Будем отсчитывать потенциальную энергию от положения равновесия системы.

Тогда из закона сохранения механической энергии следует: когда потенциальная энергия достигает максимального значения, кинети-

ческая энергия обращается в нуль, и наоборот, когда кинетическая энергия максимальна, то потенциальная равна нулю. Следовательно,

$$T_{max} = \Pi_{max}, \tag{2*}$$

так как каждая из величин выражает полную механическую энергию, остающуюся неизменной.

Полагая движение точки гармоническим колебательным движением

$$x = a \sin (kt + \beta),$$

можно представить максимальную кинетическую энергию в виде

$$T_{max} = \frac{mv^2_{max}}{2} = \frac{ma^2k^2}{2} = Bk^2. \tag{3*}$$

Обозначим максимальную потенциальную энергию

$$\Pi_{max} = Q. \tag{4*}$$

Тогда, согласно (2*),

$$k^2 = \frac{Q}{B}. \tag{5*}$$

Если же потенциальная и кинетическая энергия всей системы складываются из энергий ее отдельных частей, то формула (5*) преобразуется к виду

$$k^2 = \frac{\Sigma Q_i}{\Sigma B_i}. \tag{6*}$$

В этом случае метод носит название метода Рэлея и может быть обобщен на системы с распределенными массами.

Выбрав произвольно, но с соблюдением граничных условий, форму колебаний — функцию, описывающую отклонения масс системы в момент, когда потенциальная энергия достигает максимума, и полагая, что колебания всех точек системы происходят с одной и той же частотой и находятся в одной и той же фазе, получим основную формулу Рэлея для балки с распределенной массой

$$k^2 = \frac{\int_0^a EI (f'')^2 \, dx}{\int_0^a mf^2 \, dx}, \tag{7*}$$

где $f(x)$ — форма колебаний, EI — жесткость балки на изгиб. Рэлей показал*), что эта формула дает точное значение собственной частоты, если выбранная форма колебаний в точности совпадает с действительной формой.

*) Рэлей, Теория звука, тт. 1 и 2, изд. 2, Гостехиздат, Москва, 1955.

Однако в большинстве случаев действительная форма колебаний неизвестна и, выбирая форму, удовлетворяющую граничным условиям, находим по формуле (7*) близкое к истинному значение собственной частоты, причем, как показал Рэлей, это значение всегда больше истинного.

При решении задач первым путем рекомендуется следующий порядок действий:

1) составляем выражение кинетической и потенциальной энергии в произвольном положении системы;

2) вычислив производную по времени от полной механической энергии системы, находим дифференциальное уравнение движения системы;

3) по коэффициентам дифференциального уравнения движения определяем собственную частоту системы;

4) проинтегрировав дифференциальное уравнение движения и определив произвольные постоянные по начальным данным, находим уравнение движения.

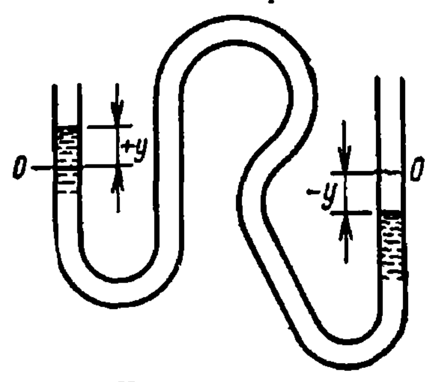
При решении задач вторым путем следует применять такую последовательность действий:

1) задаемся формой колебаний, возможно более близкой к истинной и, во всяком случае, удовлетворяющей граничным условиям задачи;

2) вычисляем максимальную кинетическую и максимальную потенциальную энергии;

3) приравнивая их друг другу, находим квадрат собственной частоты системы.

Задача 18.26. Жидкостный маятник состоит из изогнутой трубки постоянного поперечного сечения, в которой находится столб жидкости длиной l и удельным весом γ. В положении статического равновесия жидкость находится на уравне 0.



К задаче 18.26.

Определить собственную частоту и период свободных колебаний столба жидкости. Трением жидкости о стенки трубки пренебречь.

Решение. 1) Пусть столб жидкости в левой вертикальной трубке поднялся на высоту y над уровнем равновесного положения, а соответственно в правой вертикальной трубке этот столб опустился на y. Тогда на столб жидкости будет действовать восстанавливающая сила, равная весу столба жидкости высотой $2y$. Этот вес равен $2\gamma ay$, где площадь поперечного сечения трубки обозначена буквой a. Масса колеблющейся жидкости равна

$$m=\frac{\gamma al}{g}.$$

Составляем дифференциальное уравнение колебаний столба жидкости

$$m\ddot{y} = -2\gamma a y.$$

Знак минус указывает, что восстанавливающая сила всегда направлена в сторону, противоположную координате y.

Внеся в это равенство значение массы, находим

$$\ddot{y} + \frac{2g}{l} y = 0.$$

Период колебаний и собственная частота отсюда равны

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}, \quad k = \sqrt{\frac{2g}{l}}. \tag{1}$$

Таким образом, эквивалентный математический маятник имеет длину $l/2$. Удельный вес и площадь поперечного сечения трубки не влияют на собственную частоту и период колебаний столба жидкости.

2) Эта же задача может быть решена энергетическим методом (первый путь).

Находим кинетическую энергию системы

$$T_1 = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma a l}{g} \dot{y}^2. \tag{2}$$

Для вычисления потенциальной энергии вспомним, что она равна работе сил поля при перемещении из данного положения в нулевое

$$\Pi = -\int_y^0 cy\, dy = -\int_y^0 2\gamma a y\, dy = \gamma a y^2. \tag{3}$$

Здесь c — квазикоэффициент жесткости, равный $2\gamma a$.

Полная механическая энергия остается неизменной. Следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{\gamma a l}{g} \dot{y}^2 + \gamma a y^2 = \text{const}.$$

Вычислив от обеих частей уравнения производные по времени, находим дифференциальное уравнение движения жесткости

$$\ddot{y} + \frac{2g}{l} y = 0.$$

Собственная частота и период колебаний равны

$$k = \sqrt{\frac{2g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}},$$

что совпадает с результатом (1).

3) Эта задача легко решается также энергетическим методом (второй путь).

Задаемся формой колебаний

$$y = B\sin kt,$$

откуда

$$\dot{y} = Bk\cos kt.$$

Находим максимум кинетической энергии согласно (2):

$$T_{1\,max} = \frac{1}{2}\frac{\gamma a l}{g}B^2k^2,$$

и максимум потенциальной энергии в соответствии с (3):

$$\Pi_{max} = \gamma a B^2.$$

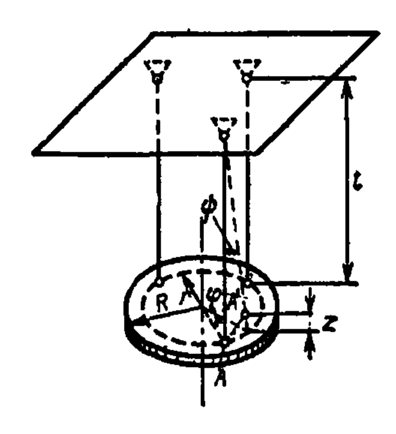
Внеся эти значения в формулу (2*),

$$T_{1\,max} = \Pi_{max},$$

получаем

$$k^2 = \frac{2g}{l}, \quad \text{или} \quad k = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

Задача 18.27. Трифилярный подвес состоит из диска радиуса R и массы m, подвешенного на трех симметричных нитях одинаковой длины l. Нити прикреплены на расстоянии r от центра диска. Определить собственную частоту малых колебаний диска, происходящих около вертикальной оси, проходящей через центр диска.



К задаче 18.27.

Решение. Обозначим малый угол поворота диска вокруг центральной вертикальной оси через φ и малый угол, на который при этом отклонилась от вертикали каждая нить через ψ. С точностью до малых величин первого порядка включительно находим

$$r\varphi = l\psi. \tag{1}$$

Составим выражение для потенциальной энергии диска. Обозначив вертикальное перемещение диска z, получаем

$$\Pi = mgz.$$

Но

$$z = l - l\cos\psi = l(1 - \cos\psi) = l2\sin^2\frac{\psi}{2} \approx l\frac{\psi^2}{2}. \tag{2}$$

Учтя (1) и (2), находим окончательно

$$\Pi = mg\frac{r^2}{2l}\varphi^2.$$

Кинетическую энергию диска будем искать как сумму кинетической энергии при поступательном вертикальном движении T_1 и кине-

тической энергии при вращении диска вокруг центральной вертикальной оси T_2. Тогда

$$T_1 = \frac{mv_z^2}{2} = \frac{m}{2}\frac{r^4}{l^2}\varphi^2\dot{\varphi}^2,$$

где, согласно (2) и (1),

$$v_z = \dot{z} = l\psi\dot{\psi} = \frac{r^2}{l}\varphi\dot{\varphi}.$$

Далее находим

$$T_2 = \frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2.$$

Сопоставив два слагаемых кинетической энергии системы, замечаем, что T_1 — величина четвертого порядка малости, которой можно пренебречь по сравнению с T_2 — величиной второго порядка малости. Потенциальная энергия — также величина второго порядка. Таким образом, полная механическая энергия системы равна

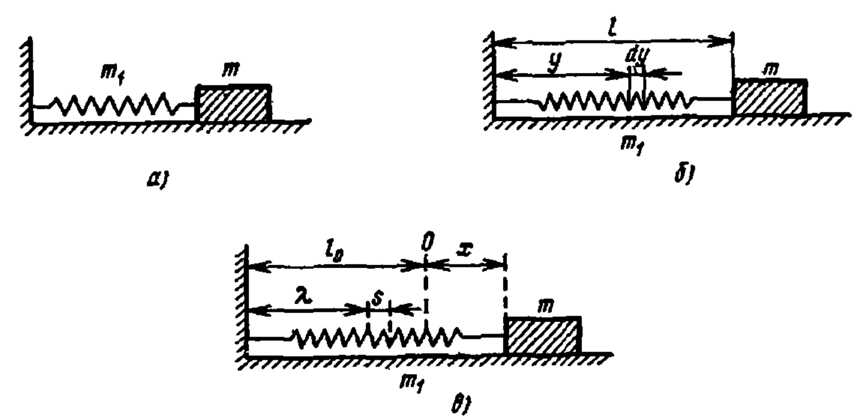
$$T_2 + \Pi = \frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 + mg\frac{r^2}{2l}\varphi^2 = \text{const}.$$

Продифференцировав это равенство по времени, находим дифференциальное уравнение малых колебаний трифилярного подвеса

$$\ddot{\varphi} + \frac{2gr^2}{lR^2}\varphi = 0.$$

Квадрат собственной частоты системы равен $k^2 = \frac{2gr^2}{lR^2}$.

Задача 18.28. Груз массы m прикреплен к пружине (рис. *а*), коэффициент жесткости которой c. Масса пружины m_1. Определить частоту свободных колебаний груза, учтя массу пружины.



К задаче 18.28.

Решение. Применим для решения этой задачи два пути: энергетический метод и его модификацию — метод Рэлея.

1) Энергетический метод. Рассмотрим систему в произвольном положении (рис. *б*). Пусть в этот момент длина пружины

равна l. Выделим элемент пружины длиной dy, находящийся на расстоянии y от точки закрепления. Скорость выделенного элемента пружины может быть задана различными формулами. Положим, что скорость элемента пружины v_l равна

$$v_l = \frac{y}{l} v, \tag{1}$$

где v — скорость груза, прикрепленного на конце пружины. Эта формула удовлетворяет граничным условиям: если $y=0$, то $v_l=0$, что соответствует точке закрепления; если $y=l$, то $v_l=v$, что соответствует скорости конца пружины, скорости груза. Однако, как будет показано далее, формула (1) не является единственной формой распределения скоростей по длине пружины.

Кинетическая энергия системы определится как сумма кинетических энергий груза и пружины

$$T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \int_0^l v_l^2\, dm = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{m_1}{l}\, dy\right) \cdot \left(\frac{y}{l} v\right)^2, \tag{2}$$

где $dm = (m_1/l)\, dy$ — масса элемента пружины. Вычислив интеграл, находим

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_1}{3}\right) v^2. \tag{3}$$

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = \frac{1}{2} cx^2, \tag{4}$$

где x — координата груза, отсчитываемая от положения статического равновесия.

Система, состоящая из груза и пружины, консервативна. Следовательно, полная механическая энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, остается неизменной:

$$T + \Pi = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_1}{3}\right) v^2 + \frac{1}{2} cx^2 = \text{const}. \tag{5}$$

Заметив, что скорость груза равна

$$v = \frac{dx}{dt}, \tag{6}$$

вычислим от обеих частей равенства (5) производную по времени:

$$\left(m + \frac{m_1}{3}\right) \frac{d^2x}{dt^2} + cx = 0. \tag{7}$$

Это и есть дифференциальное уравнение движения груза с учётом массы пружины. Частота свободных колебаний груза будет

$$k = \sqrt{\frac{3c}{3m + m_1}}. \tag{8}$$

Таким образом, для учета массы пружины достаточно к массе колеблющегося груза прибавить одну треть массы пружины.

2) Метод Рэлея. Рассмотрим ту же задачу методом Рэлея (рис. *в*). Груз m прикреплен к концу пружины массы m_1. Натуральная длина пружины l_0. В положении O груз находится в равновесии. Перемещение груза x отсчитывается от положения равновесия. Масса единицы длины пружины в нерастянутом положении равна m_1/l_0. Рассмотрим элемент пружины $d\lambda$, находящийся (при нерастянутой пружине) на расстоянии λ от места крепления пружины. Перемещение этого элемента из положения статического равновесия в процессе движения обозначим s. Будем полагать перемещения x и s малыми по сравнению с начальной длиной нерастянутой пружины l_0.

Тогда кинетическая энергия пружины T_1 выразится формулой

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{m_1}{l_0}\int_0^{l_0} \dot{s}^2\, d\lambda. \tag{9}$$

Для вычисления этого интеграла надо выразить s как функцию времени и положения, т. е. $s = f(t, \lambda)$. Зависимость перемещения s от времени возьмем согласно уравнению

$$s = a\sin(kt + \beta). \tag{10}$$

Тогда максимальное значение скорости элемента

$$\dot{s}_{max} = ks_{max} \tag{11}$$

и максимальная кинетическая энергия пружины получатся подстановкой (11) в (9)

$$T_{1\,max} = \frac{1}{2}\frac{m_1}{l_0}k^2\int_0^{l_0} s_{max}^2\, d\lambda = Ak^2. \tag{12}$$

Здесь для краткости буквой A обозначено отношение максимальной кинетической энергии пружины к квадрату собственной частоты системы. Для окончательного вычисления интеграла (12) зададимся зависимостью s_{max} от λ. Рассмотрим два случая:

а) $m \gg m_1$, б) $m \ll m_1$.

В случае а), когда масса груза больше массы пружины, будем полагать, что максимальное перемещение линейно зависит от λ. Обозначив через X максимальное перемещение груза, найдем

а)
$$s_{max} \approx X\frac{\lambda}{l_0} \quad \text{при} \quad m \gg m_1; \tag{13}$$

это уравнение, как легко видеть, удовлетворяет граничным условиям.

В случае б), когда масса пружины больше массы груза, примем синусоидальную зависимость максимального перемещения от λ. Тогда, с учетом граничных условий, запишем

б)
$$s_{max} \approx X\sin\frac{\pi\lambda}{2l_0} \quad \text{при} \quad m \ll m_1. \tag{14}$$

Внеся значения (13) и (14) в интеграл (12), находим в этих двух случаях максимальную кинетическую энергию пружины:

а)

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{m_1}{l_0}k^2\int_0^{l_0}\left(\frac{\lambda}{l_0}\right)^2 X^2\,d\lambda = \frac{1}{2}\frac{m_1}{3}k^2X^2, \tag{15}$$

б)

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{m_1}{l_0}k^2\int_0^{l_0} X^2\sin^2\frac{\pi\lambda}{2l_0}\,d\lambda = \frac{1}{2}\frac{m_1}{2}k^2X^2. \tag{16}$$

Итак, если масса груза больше массы пружины, то для получения максимальной кинетической энергии всей системы к массе груза надо прибавить одну треть массы пружины. Если же масса груза меньше массы пружины, то для получения максимальной кинетической энергии системы к массе груза следует прибавить половину массы пружины.

Таким образом, максимальная кинетическая энергия всей системы равна в каждом случае

а)

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}k^2X^2\left(m + \frac{1}{3}m_1\right), \tag{17}$$

б)

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}k^2X^2\left(m + \frac{1}{2}m_1\right). \tag{18}$$

Переходим к вычислению потенциальной энергии системы. Выбрав положение статического равновесия за начало отсчета, получим потенциальную энергию системы равной потенциальной энергии пружины. Для спиральной пружины постоянного радиуса потенциальная энергия может быть вычислена, как для растянутого или сжатого стержня. Потенциальная энергия растяжения или сжатия элемента длиной $d\lambda$ равна

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\sigma N\varepsilon\,d\lambda, \tag{19}$$

где σ — напряжение, ε — относительное удлинение, N — площадь поперечного сечения стержня.

Исключим из (19) напряжение при помощи закона Гука, согласно которому

$$\sigma = \varepsilon E, \tag{20}$$

где E — модуль упругости при растяжении или сжатии. Тогда формула (19) преобразуется к виду

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}NE\varepsilon^2\,d\lambda. \tag{21}$$

Абсолютное упругое удлинение Δ стержня под действием растягивающей силы F равно

$$\Delta = \frac{Fl_0}{NE}. \tag{22}$$

Отсюда коэффициент жесткости выражается формулой

$$c = \frac{F}{\Delta} = \frac{NE}{l_0}. \tag{23}$$

Исключив при помощи этого соотношения из (21) произведение NE, получим

$$\delta\Pi = \frac{1}{2} c l_0 \varepsilon^2 \, d\lambda. \tag{24}$$

Относительное удлинение рассматриваемого элемента пружины равно

$$\varepsilon = \frac{ds}{d\lambda}. \tag{25}$$

Внеся это значение в (24) и проинтегрировав по всей длине пружины, находим потенциальную энергию системы

$$\Pi = \frac{1}{2} c l_0 \int_0^{l_0} \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 d\lambda. \tag{26}$$

Для вычисления максимума потенциальной энергии примем, как и раньше, зависимость s от λ согласно (13) для случая a и согласно (14) для случая δ. Тогда мы в рассматриваемых случаях соответственно получим

а)

$$\Pi_{max} = \frac{1}{2} c l_0 \int_0^{l_0} \left(\frac{X}{l_0}\right)^2 d\lambda = \frac{1}{2} c X^2, \tag{27}$$

б)

$$\Pi_{max} = \frac{1}{2} c \frac{X^2}{l_0} \frac{\pi^2}{4} \int_0^{l_0} \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{l_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{8} c X^2. \tag{28}$$

Сопоставив полученные два выражения для максимальной потенциальной энергии пружины, замечаем, что в случае, когда масса пружины больше массы колеблющегося груза, максимальная потенциальная энергия системы больше в $\pi^2/8 = 1{,}234$ раза.

Для нахождения собственной частоты колебаний системы приравниваем (в каждом случае отдельно) максимальные значения кинетической и потенциальной энергий:

а)

$$\frac{1}{2} k^2 X^2 \left(m + \frac{1}{3} m_1\right) = \frac{1}{2} c X^2, \tag{29}$$

б)

$$\frac{1}{2} k^2 X^2 \left(m + \frac{1}{2} m_1\right) = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{8} c X^2. \tag{30}$$

Отсюда находим собственную частоту:

а)

$$k = \sqrt{\frac{c}{m + m_1/3}} \quad \text{при} \quad m \gg m_1, \tag{31}$$

б)

$$k = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{c}{2m + m_1}} \quad \text{при} \quad m \ll m_1. \tag{32}$$

Результат (31) совпадает с полученным ранее первым путем значением собственной частоты (8). Этого и следовало ожидать, так как в обоих случаях распределение перемещений и скоростей вдоль пружины принято линейным.

Значение собственной частоты колебаний в случае, когда масса груза меньше массы пружины (32), можно сравнить с известным точным значением собственной частоты колебаний пружины без груза. Положив в (32) значение $m=0$, имеем

$$k=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{c}{m_1}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{NE}{l_0 m_1}}, \qquad (33)$$

что совпадает с точным решением. Если положить $m=0$ в формуле (31) и сопоставить с (33), то ошибка в этом случае может достигать десяти процентов.

Заметим, что обе формулы (31) и (32) дают одинаковое значение собственной частоты при $m_1/m=2{,}63$. Следовательно, формулой (32) следует пользоваться при значениях $m_1/m>2{,}63$.

§ 8. Метод механического импеданса

Метод механического импеданса позволяет быстрее и проще, по сравнению с классическим методом (интегрирования дифференциальных уравнений движения), рассчитать установившееся движение *линейной* системы, подверженной гармоническому возмущающему воздействию. Он применим к линейным системам с одной и несколькими степенями свободы. Прежде чем излагать сущность метода, остановимся вкратце на векторном представлении гармонических величин.

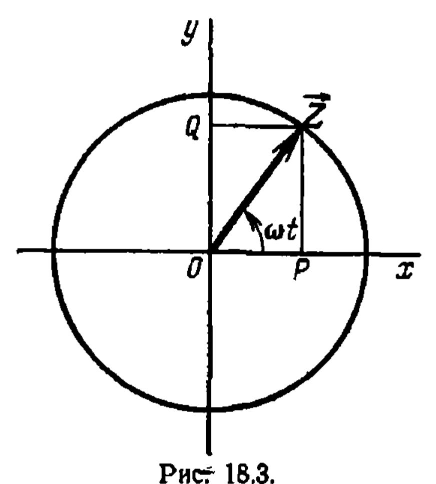


Рис. 18.3.

Рассмотрим на комплексной плоскости Oxy вектор $\vec{Z}$ постоянной длины Z, исходящий из начала координат и вращающийся вокруг него с постоянной угловой скоростью ω (рис. 18.3). Проекции вектора на действительную (ось x) и мнимую (ось y) оси в любой момент времени равны соответственно

$$OP=x(t)=Z\cos\omega t, \qquad (1^*)$$

$$OQ=y(t)=Z\sin\omega t \qquad (2^*)$$

и представляют собой гармонические функции с амплитудой Z и круговой частотой ω. Сам вектор $\vec{Z}$ может быть представлен в виде комплексного числа в тригонометрической или показательной форме:

$$\vec{Z}=Z(\cos\omega t+i\sin\omega t)=Ze^{i\omega t}. \qquad (3^*)$$

Переход от одной формы записи к другой основан на известной

формуле Эйлера

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Теперь функции (1*) и (2*), описывающие гармонические движения, можно представить как вещественную часть и мнимую часть (коэффициент при i функции (3)), т. е.

$$x(t) = \mathrm{Re}\,[Ze^{i\omega t}], \qquad (4^*)$$

$$y(t) = \mathrm{Im}\,[Ze^{i\omega t}]. \qquad (5^*)$$

При этом имеют место соотношения

$$\dot{x}(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}(Ze^{i\omega t})\right], \qquad (6^*)$$

$$\dot{y}(t) = \mathrm{Im}\left[\frac{d}{dt}(Ze^{i\omega t})\right], \qquad (7^*)$$

а также

$$\ddot{x} = \mathrm{Re}\left[\frac{d^2}{dt^2}(Ze^{i\omega t})\right], \qquad (8^*)$$

$$\ddot{y} = \mathrm{Im}\left[\frac{d^2}{dt^2}(Ze^{i\omega t})\right] \qquad (9^*)$$

и т. д.

Поскольку

$$\frac{d}{dt}(Ze^{i\omega t}) = i\omega Ze^{i\omega t} = i\omega\vec{Z},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(Ze^{i\omega t}) = (i\omega)^2 Ze^{i\omega t} = -\omega^2\vec{Z} \quad \text{и т. д.,}$$

то, очевидно, что каждому дифференцированию вектора $\vec{Z}$ соответствует умножение его длины на ω и поворот на 90° против хода часовой стрелки. На рис. 18.4 изображен вектор $\vec{Z}$, а также его первая и вторая производные ($\omega = 0{,}7$).

В более общем случае, когда вектор $\vec{Z}$ имеет вид

$$\vec{Z} = Ze^{i(\omega t - \gamma)}, \qquad (10^*)$$

удобно ввести понятие комплексной амплитуды $\mathbf{Z}$, имея в виду соотношение

$$Ze^{i(\omega t-\gamma)} = Ze^{-i\gamma}e^{i\omega t} = \mathbf{Z}e^{i\omega t}. \qquad (11^*)$$

Так как из (11*) следует, что

$$\mathbf{Z} = Ze^{-i\gamma} = Z(\cos\gamma - i\sin\gamma), \qquad (12^*)$$

Рис. 18.4.

то действительная амплитуда Z равна модулю комплексной амплитуды $\mathbf{Z}$, т. е.

$$Z = |\mathbf{Z}|. \qquad (13^*)$$

При решении задач часто приходится рассматривать несколько векторов, вращающихся вокруг начала координат с одной и той же

угловой скоростью ω. Естественно, что в этом случае представляет интерес только их взаимное расположение. Поэтому соответствующую векторную диаграмму строят в какой-то фиксированный момент времени, например при $t=0$. Положение вектора (10*) в момент $t=0$ совпадает с положением вектора, изображающего комплексную амплитуду (12*).

Из алгебры известно, что сложение и вычитание двух и более комплексных чисел равносильно сложению и вычитанию изображающих эти числа векторов. Поэтому при сложении вращающихся с одной и той же угловой скоростью векторов можно пользоваться правилом параллелограмма.

На этом, однако, аналогия между комплексными числами и векторами заканчивается. Так, умножение комплексных чисел и умножение векторов совершенно различные операции, а делению комплексных чисел в векторной алгебре не соответствует вообще никакая операция.

При решении линейных дифференциальных уравнений введение комплексных показательных функций вида $Ze^{i(\omega t-\gamma)}$ вместо действительных гармонических функций вида $Z\cos(\omega t-\gamma)$ или $Z\sin(\omega t-\gamma)$, как правило, значительно упрощает выкладки и оказывается весьма полезным. При этом используется следующая важная теорема.

Если линейное уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=F(t) \qquad (14^*)$$

имеет действительные коэффициенты a_i *) и $F=F_1+iF_2$, где F_1 и F_2 также действительны, то его решение будет комплексным: $x=x_1+ix_2$, причем x_1 и x_2 будут решениями уравнения (14*) с правой частью, равной соответственно F_1 и F_2.

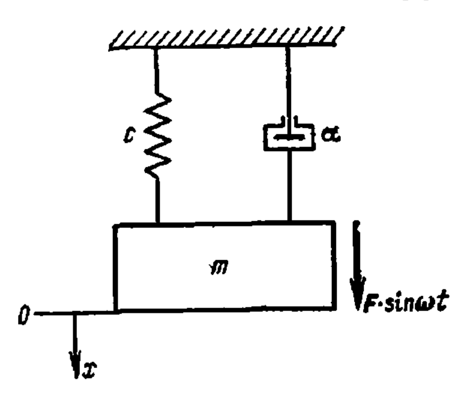


Рис. 18.5.

Метод механического импеданса основывается на этой теореме, а также на том обстоятельстве, что установившееся движение линейной системы, подвергающейся гармоническому возмущению частоты ω, описывается гармонической функцией той же самой частоты ω. Поэтому для определения этого движения достаточно найти соответствующую комплексную амплитуду.

Рассмотрим общий случай линейной системы с одной степенью свободы, подвергающейся синусоидальному возмущающему воздействию (рис. 18.5). Точка O обозначает положение статического равно-

*) Они могут быть постоянными или функциями t.

весия, от которого отсчитывается координата x массы m. Жесткость пружины обозначена буквой c, а постоянная демпфера (коэффициент пропорциональности) — буквой α. Движение рассматриваемой системы описывается уравнением

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+cx=F\sin\omega t. \qquad (15^*)$$

Введем комплексную возмущающую силу

$$\vec{F}=Fe^{i\omega t}. \qquad (16^*)$$

Очевидно, что действительная возмущающая сила

$$F\sin\omega t=\operatorname{Im}\vec{F}. \qquad (17^*)$$

Установившееся движение системы происходит с той же частотой ω, но отстает от возмущения на фазовый угол φ. Поэтому комплексную координату записываем в виде (10*)

$$\vec{X}=Xe^{i(\omega t-\varphi)}. \qquad (18^*)$$

Тогда на основании сформулированной выше теоремы действительное перемещение найдется как

$$x(t)=\operatorname{Im}\vec{X}=X\sin(\omega t-\varphi). \qquad (19^*)$$

Расчет установившегося движения системы сводится, таким образом, к определению комплексной амплитуды перемещения $\bar{X}=Xe^{-i\varphi}$, что равносильно нахождению величин

$$X=|\bar{X}| \quad \text{и} \quad \varphi=-\arg\bar{X}. \qquad (20^*)$$

Для этого следует комплексную функцию, стоящую в правой части равенства (18*), представить в виде $\bar{X}e^{i\omega t}$, найти ее первую и вторую производные по времени t ($\bar{X}$ от времени не зависит) и подставить эти величины в левую часть уравнения движения (15*) вместо x, $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ соответственно, а правую часть уравнения записать в виде $Fe^{i\omega t}$. Тогда после сокращения на $e^{i\omega t}$ находим

$$\bar{X}=Xe^{-i\varphi}=\frac{F}{c+i\alpha\omega-m\omega^2}. \qquad (21^*)$$

Зная комплексную амплитуду (21*), нетрудно написать формулы для действительной амплитуды X и фазового угла φ, используя формулы (20*). Имеем

$$X=\left|\frac{F}{(c-m\omega^2)+i\alpha\omega}\right|=\frac{F}{\sqrt{(c-m\omega^2)^2+(\alpha\omega)^2}} \qquad (22^*)$$

(модуль частного равен частному модулей) и

$$\varphi=-\arg\frac{F}{(c-m\omega^2)+i\alpha\omega}=\operatorname{arctg}\frac{\alpha\omega}{c-m\omega^2} \qquad (23^*)$$

$\left(\arg\frac{1}{Z} = -\arg Z\right.$, где Z — любое комплексное число$\left.\right)$. Подставив найденные значения X и φ в уравнение (19*), найдем установившееся движение системы.

При решении конкретных задач с числовыми данными нет смысла пользоваться готовыми формулами (22*) и (23*), которые пришлось бы в этом случае запомнить. Лучше, проделав все выкладки, найти комплексную амплитуду $\overline{X}$, а потом определить модуль и аргумент полученного числа.

Если возмущающая сила была бы задана в виде $F\cos\omega t$, то вместо (17*) мы имели бы

$$F\cos\omega t = \operatorname{Re}\vec{F}, \tag{17'*}$$

а вместо (19*)

$$x(t) = \operatorname{Re}\vec{X} = X\cos(\omega t - \varphi). \tag{19'*}$$

Все остальное остается без изменения.

Трехчлен $c + i\alpha\omega - m\omega^2$, стоящий в знаменателе выражения (21*), называется полным *импедансом* рассмотренной колебательной системы, а величины $(-m\omega^2)$, $i\alpha\omega$ и c — *импедансами* элементов массы, демпфирования и упругости. Таким образом, импеданс элемента упругости равен упругой постоянной этого элемента, импеданс элемента демпфирования равен коэффициенту затухания, умноженному на $i\omega$, а импеданс элемента массы равен массе, умноженной на $(-\omega^2)$. Полный механический импеданс (полное механическое сопротивление) системы равен сумме импедансов ее элементов.

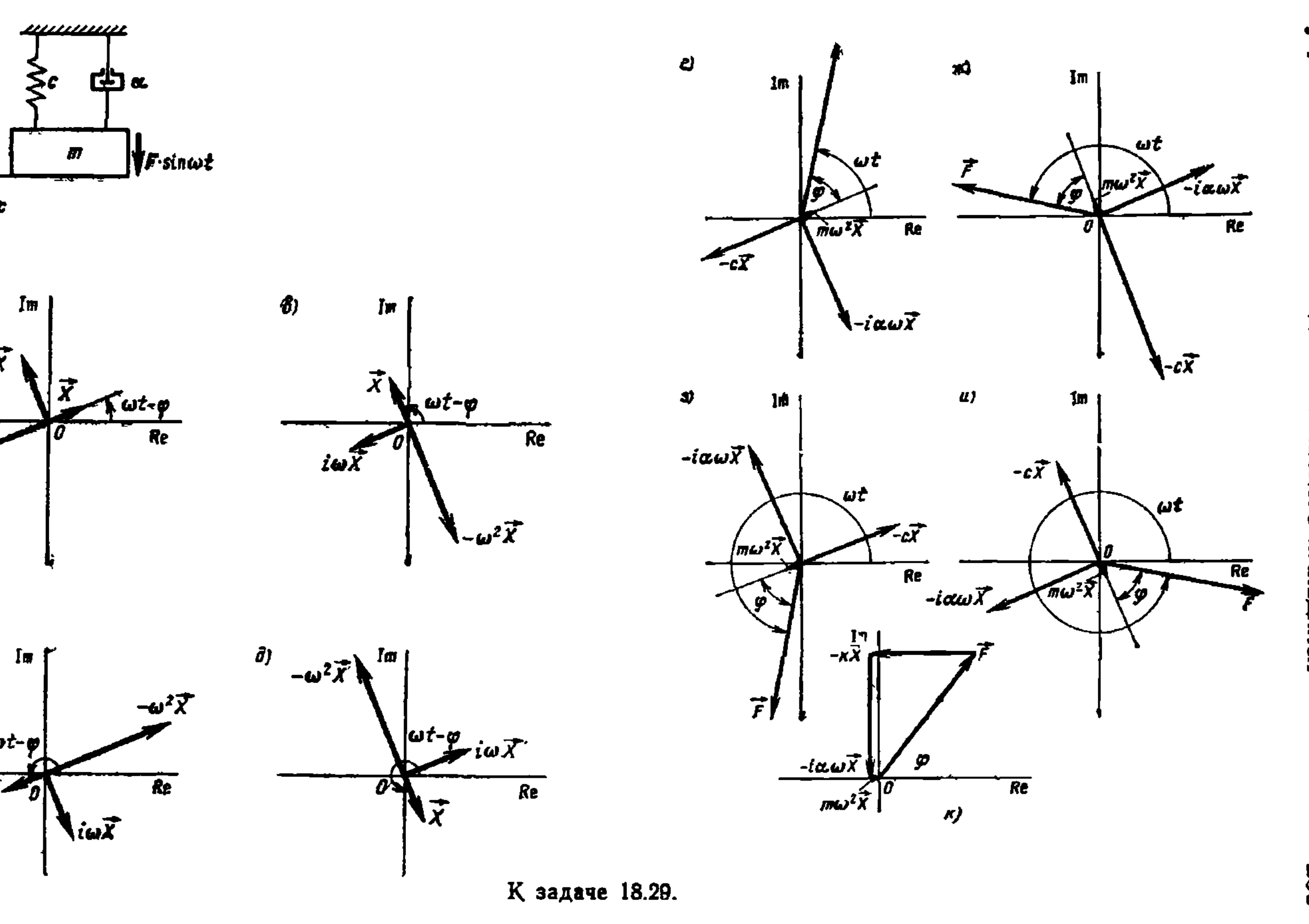
Заметим, что размерность механического импеданса определяется как сила, деленная на перемещение. В электротехнике используется аналогичное понятие электрического импеданса.

Задача 18.29. Уравнение движения системы, показанной на рис. *а*, имеет вид

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = F\sin\omega t. \tag{1}$$

Рассматривая на основании принципа Даламбера это уравнение как уравнение равновесия сил, представить эти силы в виде вращающихся векторов. Определить положение векторов, когда: 1) масса m движется вниз и находится ниже положения статического равновесия O; 2) масса m движется вверх, но находится ниже точки статического равновесия O; 3) масса m движется вверх и находится выше точки статического равновесия O; 4) масса m движется вниз, но находится выше точки статического равновесия O. Показать графически, что уравнение (1) удовлетворяется во всех этих случаях, приняв $m = 10$ *кг*; $\alpha = 300$ *н·сек/м*; $c = 500$ *н/м*; $F = 50$ *н*; $\omega = 2$ *рад/сек*.

Решение. При построении векторных диаграмм нам понадобятся величины амплитуды перемещения X и фазового угла φ. Для



К задаче 18.29.

их вычисления воспользуемся непосредственно формулами (22*) и (23*). Имеем

$$X=\frac{F}{\sqrt{(c-m\omega^2)^2+(\alpha\omega)^2}}=\frac{50}{\sqrt{(500-10\cdot 2^2)^2+(300\cdot 2)^2}}\approx 0{,}066\ м,$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\alpha\omega}{c-m\omega^2}=\operatorname{arctg}\frac{300\cdot 2}{500-10\cdot 2^2}\approx 0{,}916\ рад\approx 52°30'.$$

На рис. *б* представлены векторы перемещения $\vec{X}$, скорости $i\omega\vec{X}$ и ускорения $(-\omega^2\vec{X})$ для четырех состояний массы m, указанных в условии задачи. Действительно, в случае 1), например, перемещение и скорость массы положительны, так как они направлены вниз, а ускорение отрицательно, так как направлено вверх. Поскольку в данной задаче $x=\operatorname{Im}\vec{X}$, $\dot{x}=\operatorname{Im}[i\omega\vec{X}]$ и $\ddot{x}=\operatorname{Im}[-\omega^2\vec{X}]$, то рис. *б* полностью соответствует этому состоянию системы. Точно так же можно убедиться в соответствии рис. *в*, *г* и *д* состояниям 2), 3) и 4).

При построении силовых диаграмм надо учесть следующее. Упругая (восстанавливающая) сила cx пропорциональна перемещению x и всегда противоположна ему по знаку. Демпфирующая сила $\alpha\dot{x}$ пропорциональна скорости и направлена в противоположную сторону. Наконец, инерционная сила $m\ddot{x}$ пропорциональна ускорению и, опять-таки, противоположна ему по направлению. Поэтому векторы, соответствующие этим трем силам, будут равны $(-c\vec{X})$, $(-i\alpha\omega\vec{X})$ и $m\omega^2\vec{X}$. Нетрудно вычислить их длины:

$$|-c\vec{X}|=cX=500\cdot 0{,}066=33\ н,$$

$$|-i\alpha\omega\vec{X}|=\alpha\omega X=300\cdot 2\cdot 0{,}066=39{,}6\ н,$$

$$|m\omega^2\vec{X}|=m\omega^2X=10\cdot 2^2\cdot 0{,}066=2{,}64\ н.$$

Пользуясь этими данными и кинематическими диаграммами на рис. *б*, *в*, *г* и *д*, строим силовые диаграммы для всех четырех состояний системы: рис. *е*, *ж*, *з*, *и*.

Поскольку четыре силы, представленные на каждой диаграмме, находятся в равновесии, их векторная сумма равна нулю, т. е. они должны составлять замкнутый многоугольник. Такой многоугольник достаточно построить только один, ввиду того, что диаграммы на рис *е*, *ж*, *з*, *и* отличаются одна от другой только углом поворота относительно координатных осей. На рис. *к* построен силовой многоугольник для момента времени $t=\varphi/\omega$, так что $\omega t-\varphi=0$. В любой другой момент времени этот многоугольник будет повернут относительно начала координат на некоторый угол, как твердое целое. Из рисунка видно, что силовой многоугольник замкнутый, поэтому уравнение (1) удовлетворяется во всех указанных в условии задачи случаях.

Задача 18.30. Движение колебательной системы описывается уравнением

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+cx=F\cos(\omega t+\gamma). \qquad (1)$$

Определить установившееся движение системы методом механического импеданса.

Решение. Вместо действительной возмущающей силы $F\cos(\omega t+\gamma)$ введем комплексную

$$\vec{F}=Fe^{i(\omega t+\gamma)}.$$

Очевидно, что

$$F\cos(\omega t+\gamma)=\mathrm{Re}\,\vec{F}. \tag{2}$$

Комплексное перемещение запишем с учетом равенства частот и отставания по фазе в виде

$$\vec{X}=Xe^{i(\omega t+\gamma-\varphi)}=\overline{X}e^{i(\omega t+\gamma)},$$

где $\overline{X}=Xe^{-i\varphi}$ — комплексная амплитуда перемещения.

Комплексная скорость равна

$$\frac{d\vec{X}}{dt}=i\omega\overline{X}e^{i(\omega t+\gamma)},$$

а комплексное ускорение равно

$$\frac{d^2\vec{X}}{dt^2}=(i\omega)^2\,\overline{X}e^{i(\omega t+\gamma)}=-\omega^2\overline{X}e^{i(\omega t+\gamma)}.$$

Подставляя в уравнение (1), вместо действительных возмущающей силы, перемещения, скорости и ускорения, соответствующие комплексные величины, получим

$$(-m\omega^2+i\alpha\omega+c)\,\overline{X}e^{i(\omega t+\gamma)}=Fe^{i(\omega t+\gamma)}.$$

Сократив на $e^{i(\omega t+\gamma)}$, найдем

$$\overline{X}=Xe^{-i\varphi}=\frac{F}{c-m\omega^2+i\alpha\omega}.$$

Из последнего соотношения определяем амплитуду установившихся колебаний

$$X=|\overline{X}|=\frac{F}{\sqrt{(c-m\omega^2)^2+(\alpha\omega)^2}} \tag{3}$$

и отставание по фазе

$$\varphi=-\arg\overline{X}=\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha\omega}{c-m\omega^2} \tag{4}$$

(сравнить с формулами (22*) и (23*)).

Учтя соотношение (2), запишем уравнение установившегося движения системы в виде

$$x(t)=\mathrm{Re}\,\vec{X}=X\cos(\omega t+\gamma-\varphi),$$

где X и φ определяются равенствами (3) и (4).

Задача 18.31. Машина весом 225 *н* смонтирована на пружинах и демпферах, как показано на рисунке. Общая жесткость пружин равна 17 550 *н/м*. Общий коэффициент затухания 350 *н·сек/м*. Точка O соответствует положению статического равновесия.

К задаче 18.31.

Определить методом механического импеданса установившуюся реакцию системы, если к машине приложена возмущающая сила $88 \cos 35t$ *н*.

Решение. По условию задачи имеем

$$m = \frac{225}{9{,}81} = 23 \text{ кГ}, \quad \alpha = 350 \text{ нсек/м},$$

$$c = 17\,550 \text{ н/м}; \quad F = 88 \text{ н}, \quad \omega = 35 \text{ рад/сек}.$$

Подсчитываем полный механический импеданс системы:

$$c - m\omega^2 + i\alpha\omega = 17\,550 - 23\cdot 35^2 + i\cdot 350\cdot 35 = -10\,620 + i\,12\,250 =$$

$$= \sqrt{10\,620^2 + 12\,250^2}\cdot e^{-i\operatorname{arctg}\frac{12\,250}{10\,620}} = 16\,200 e^{-0{,}855i}.$$

Согласно уравнению (21*) комплексная амплитуда перемещения равна

$$\overline{X} = \frac{F}{c - m\omega^2 + i\alpha\omega} = \frac{88}{16\,200 e^{-0{,}855i}} = 0{,}00543 e^{0{,}855i} = Xe^{-i\varphi}.$$

Отсюда сразу следует, что действительная амплитуда колебаний равна

$$X = 0{,}00543 \text{ м} = 5{,}43 \text{ мм},$$

а фазовый угол равен

$$\varphi = -0{,}855 \text{ рад} = -49^\circ.$$

Поскольку возмущающая сила косинусоидальная, то и перемещение записываем в виде

$$x(t) = X\cos(\omega t - \varphi)$$

или окончательно

$$x(t) = 0{,}00543 \cos(35t + 0{,}855) \text{ м}.$$

Задача 18.32. Составить уравнение движения для системы, показанной на рис. *а*, и определить установившееся движение этой системы методом механического импеданса.

Решение. На рис. *б* и *в* показаны силовые схемы для массы m и демпфера α соответственно. На основании первой схемы пишем уравнение движения массы m:

$$m\ddot{x} + \alpha(\dot{x} - \dot{x}_2) + cx + c_1(x - x_1) = 0,$$

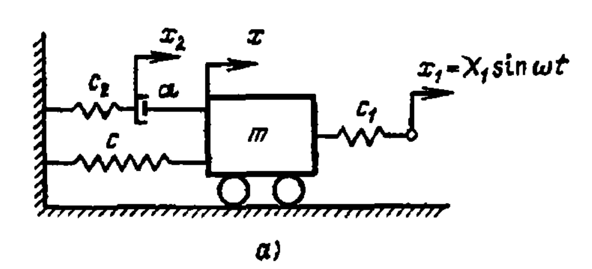
подставив вместо x_1 заданное синусоидальное перемещение, получим

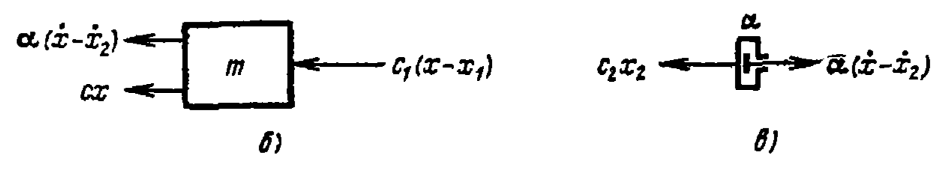
$$m\ddot{x}+\alpha(\dot{x}-\dot{x}_2)+(c+c_1)x=c_1X_1\sin\omega t. \qquad (1)$$

Демпфер α и пружина c_2 соединены последовательно. Поэтому демпфирующая сила равна силе натяжения пружины, т. е.

$$\alpha(\dot{x}-\dot{x}_2)=c_2x_2. \qquad (2)$$

Можно исключить из этих уравнений координату демпфера x_2, подставив в уравнение (1) вместо $\alpha(\dot{x}-\dot{x}_2)$ его значение, взятое из (2),





К задаче 18.32.

и решив полученное таким образом уравнение относительно x_2. Имеем

$$m\ddot{x}+c_2x_2+(c+c_1)x=c_1X_1\sin\omega t,$$

откуда

$$x_2=\frac{1}{c_2}[c_1X_1\sin\omega t-m\ddot{x}-(c+c_1)x]. \qquad (3)$$

Продифференцировав равенство (3) по времени и подставив результат в (1), получим

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}-\frac{\alpha}{c_2}[\omega c_1X_1\cos\omega t-m\dddot{x}-(c+c_1)\dot{x}]+(c+c_1)x=c_1X_1\sin\omega t$$

или после несложных преобразований

$$\dddot{x}+\frac{c_2}{\alpha}\ddot{x}+\frac{c+c_1+c_2}{m}\dot{x}+\frac{(c+c_1)c_2}{\alpha m}x=\frac{\omega c_1}{m}X_1\cos\omega t+\frac{c_1c_2}{\alpha m}X_1\sin\omega t. \qquad (4)$$

Таким образом, движение рассматриваемой системы описывается системой уравнений (1) и (2) или одним уравнением третьего порядка (4).

Правая часть уравнения (4) имеет вид $A\cos\omega t+B\sin\omega t$ и может быть, как известно, записана в виде одной гармонической функции

$$A\cos\omega t+B\sin\omega t=C\sin(\omega t+\alpha),$$

где $C=\sqrt{A^2+B^2}$ — амплитуда, а $\alpha=\operatorname{arctg}(A/B)$ — фазовый угол. Переписав правую часть уравнения (4) в виде одной гармонической функции, можно применить к этому уравнению метод механического импеданса для нахождения установившейся реакции системы.

Можно, однако, поступить и иначе — применить метод механического импеданса непосредственно к уравнению (4) дважды, каждый раз оставляя в правой части одно из двух стоящих там слагаемых. Поскольку уравнение (4) линейное, то сумма найденных таким образом решений даст на основании принципа суперпозиции (принципа наложения решений) искомую установившуюся реакцию системы.

Существует еще и третий путь, в данном случае наиболее удобный. Его мы и будем придерживаться. Применим метод механического импеданса прямо к системе уравнений (1) и (2). Для этого введем комплексное возмущение $c_1X_1e^{i\omega t}$, а соответствующие комплексные перемещения запишем в виде $\overline{X}e^{i\omega t}$ и $\overline{X}_2e^{i\omega t}$, где $\overline{X}$ и $\overline{X}_2$ — комплексные амплитуды. Подставив эти величины в уравнения (1) и (2), получим после сокращения на $e^{i\omega t}$ систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\overline{X}$ и $\overline{X}_2$, а именно

$$-m\omega^2\overline{X}+i\omega\alpha(\overline{X}-\overline{X}_2)+(c+c_1)\overline{X}=c_1X_1,$$
$$i\omega\alpha(\overline{X}-\overline{X}_2)=c_2\overline{X}_2,$$

или

$$(c+c_1-m\omega^2+i\alpha\omega)\overline{X}-i\alpha\omega\overline{X}_2=c_1X_1,$$
$$-i\alpha\omega\overline{X}+(c_2-i\alpha\omega)\overline{X}_2=0.$$

Полученную систему уравнений решаем с помощью теоремы Крамера. Находим определитель системы

$$\Delta=(c+c_1-m\omega^2+i\alpha\omega)(c_2+i\alpha\omega)+\alpha^2\omega^2,$$

или после упрощений

$$\Delta=c_2(c+c_1-m\omega^2)+i\alpha\omega(c+c_1+c_2-m\omega^2).$$

Определители для неизвестных $\overline{X}$ и $\overline{X}_2$ равны

$$\Delta_{\overline{X}}=c_1X_1(c_2+i\alpha\omega),$$
$$\Delta_{\overline{X}_2}=i\alpha\omega c_1X_1.$$

Следовательно,

$$\overline{X}=\frac{\Delta_{\overline{X}}}{\Delta}=\frac{c_1X_1(c_2+i\alpha\omega)}{c_2(c+c_1-m\omega^2)+i\alpha\omega(c+c_1+c_2-m\omega^2)},$$
$$\overline{X}_2=\frac{\Delta_{\overline{X}_2}}{\Delta}=\frac{i\alpha\omega c_1X_1}{c_2(c+c_1-m\omega^2)+i\alpha\omega(c+c_1+c_2-m\omega^2)}.$$

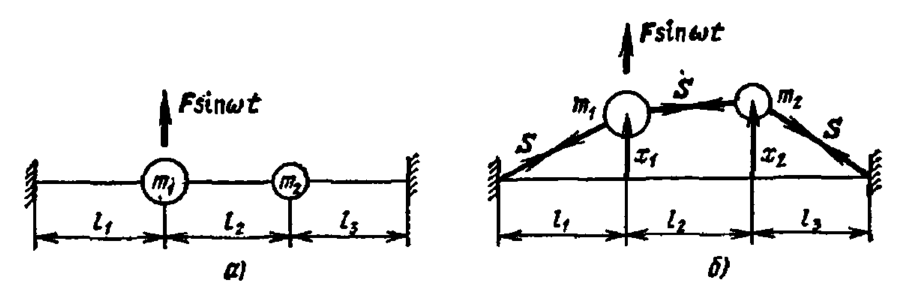
Из двух последних уравнений можно найти действительные амплитуды X и X_2 и фазовые углы φ и φ_2, учитывая, что

$$\overline{X}=Xe^{-i\varphi} \text{ и } \overline{X}_2=X_2e^{-i\varphi_2}.$$

Формулы для этих величин приводить не будем ввиду их громоздкости. Зная действительные амплитуды и фазовые углы для обеих координат системы и помня, что возмущение синусоидально, записываем установившиеся реакции системы в виде

$$x = X \sin(\omega t - \varphi),$$
$$x_2 = X_2 \sin(\omega t - \varphi_2).$$

Задача 18.33. На горизонтально натянутой невесомой струне (см. рис. *а*) закреплены две массы m_1 и m_2, к первой из которых приложено вертикальное синусоидальное возмущение $F \sin \omega t$. Составить уравнение малых колебаний системы, считая натяжение S струны



К задаче 18.33.

постоянным, и определить установившееся движение методом механического импеданса.

Решение. На рис. *б* изображена система, выведенная из состояния статического равновесия. Составляем дифференциальные уравнения движения обеих масс в вертикальной плоскости:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -S\frac{x_1}{l_1} - S\frac{x_1 - x_2}{l_2} + F \sin \omega t, \tag{1}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -S\frac{x_2 - x_1}{l_2} - S\frac{x_2}{l_3}. \tag{2}$$

(В этих уравнениях синусы малых углов заменены тангенсами.)
После несложных преобразований уравнения (1) и (2) принимают вид

$$m_1 \ddot{x}_1 + S\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)x_1 - S\frac{1}{l_2}x_2 = F \sin \omega t, \tag{3}$$

$$-S\frac{1}{l_2}x_1 + m_2 \ddot{x}_2 + S\left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}\right)x_2 = 0. \tag{4}$$

Пользуясь методом механического импеданса для определения установившегося движения, подставим в уравнения (3) и (4) $Fe^{i\omega t}$ вместо $F \sin \omega t$, $\overline{X}_1 e^{i\omega t}$ вместо $x_1(t)$ и $\overline{X}_2 e^{i\omega t}$ вместо $x_2(t)$, где $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ — комплексные амплитуды перемещений x_1 и x_2. Сократив на $e^{i\omega t}$ и

преобразовав уравнения, получим

$$\left[S\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)-m_1\omega^2\right]\overline{X}_1-S\frac{1}{l_2}\overline{X}_2=F, \qquad (5)$$

$$-S\frac{1}{l_2}\overline{X}_1+\left[S\left(\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}\right)-m_2\omega^2\right]\overline{X}_2=0. \qquad (6)$$

Комплексные амплитуды $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ определяются из этих уравнений с помощью правила Крамера. Определитель системы равен

$$\Delta=\begin{vmatrix} S\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)-m_1\omega^2 & -S\frac{1}{l_2} \\ -S\frac{1}{l_2} & S\left(\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}\right)-m_2\omega^2 \end{vmatrix}=$$

$$=\left[S\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)-m_1\omega^2\right]\left[S\left(\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}\right)-m_2\omega^2\right]-\frac{S^2}{l_2^2}. \qquad (7)$$

Определители для неизвестных $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ равны соответственно

$$\Delta_{\overline{X}_1}=\begin{vmatrix} F & -S\frac{1}{l_2} \\ 0 & S\left(\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}\right)-m_2\omega^2 \end{vmatrix}=F\left[S\left(\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}-m_2\omega^2\right)\right],$$

$$\Delta_{\overline{X}_2}=\begin{vmatrix} S\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)-m_1\omega^2 & F \\ -S\frac{1}{l_2} & 0 \end{vmatrix}=\frac{FS}{l_2}.$$

Комплексные амплитуды найдутся так:

$$\overline{X}_1=\frac{\Delta_{\overline{X}_1}}{\Delta} \quad \text{и} \quad \overline{X}_2=\frac{\Delta_{\overline{X}_2}}{\Delta}.$$

Заметим, что все коэффициенты уравнений (5) и (6) — вещественные величины. Поэтому и комплексные амплитуды $\overline{X}_1=X_1e^{-i\varphi_1}$ и $\overline{X}_2=X_2e^{-i\varphi_2}$ в данном случае действительные. Это означает, что фазовые углы φ_1 и φ_2 могут равняться либо нулю, если соответствующая комплексная амплитуда положительна, либо 180°, если она отрицательна. Таким образом, колебания могут либо совпадать по фазе с возмущающей силой, либо находиться с ней в противофазе. Это замечание относится ко всем системам без демпфирования.

Поскольку возмущающая сила синусоидальна, то установившееся движение будет также синусоидальным:

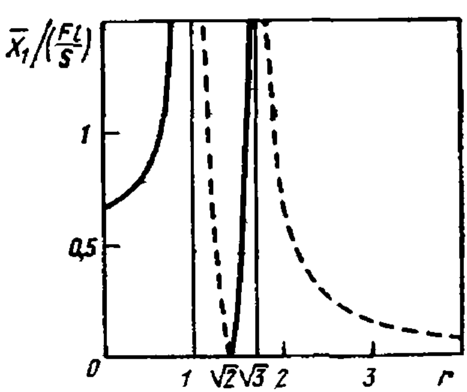
$$x_1=X_1\sin(\omega t-\varphi_1),$$

$$x_2=X_2\sin(\omega t-\varphi_2),$$

где $X_1=|\overline{X}_1|$, $X_2=|\overline{X}_2|$ — действительные амплитуды.

Отметим еще, что если возмущающие воздействия приложены к обеим массам, то задача решается аналогично с использованием принципа суперпозиции.

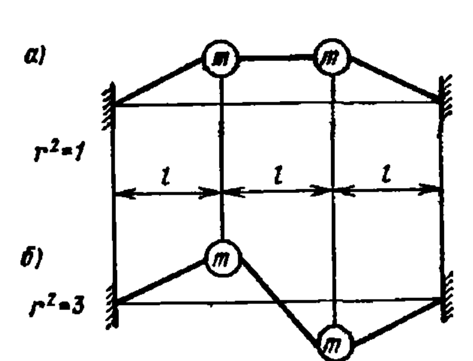
Задача 18.34. В условиях предыдущей задачи, положив $l_1 = l_2 = l_3 = l$, $m_1 = m_2 = m$, определить собственные частоты и главные формы колебаний. Построить амплитудно-частотные характеристики системы.

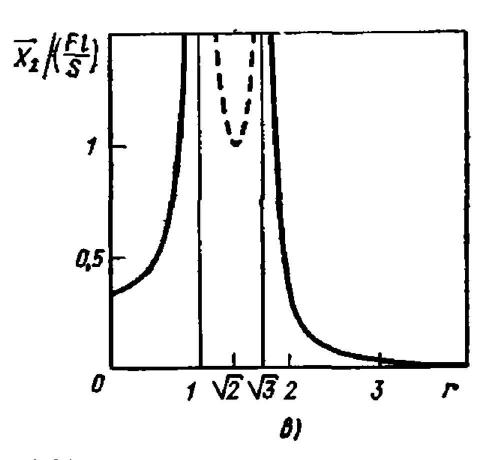


Решение. Собственные частоты находятся как корни уравнения $\Delta = \Delta(\omega) = 0$. Оно имеет вид (см. уравнение (7) в предыдущей задаче)

$$\left(\frac{2S}{l} - m\omega^2\right)^2 - \frac{S^2}{l^2} = 0. \qquad (1)$$

Для упрощения последующих





К задаче 18.34.

выкладок введем безразмерную частоту по следующей формуле:

$$r = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{S}{lm}}}. \qquad (2)$$

Тогда вместо уравнения (1) получим

$$(2 - r^2)^2 - 1 = 0,$$

или

$$r^4 - 4r^2 + 3 = 0. \qquad (3)$$

Отсюда находим $r_1^2 = 1$, $r_2^2 = 3$ и, следовательно,

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \sqrt{3}. \qquad (4)$$

Собственные частоты системы равны

$$\omega_1=\sqrt{\frac{S}{lm}};\quad \omega_2=\sqrt{\frac{3S}{lm}}.$$

Комплексные амплитуды равны (см. предыдущую задачу)

$$\overline{X}_1=\frac{\Delta_{\overline{X}_1}}{\Delta}=\frac{F\left(\frac{2S}{l}-m\omega^2\right)}{\left(\frac{2S}{l}-m\omega^2\right)^2-\frac{S^2}{l^2}}=\frac{Fl}{S}\cdot\frac{2-r^2}{r^4-4r^2+3},\tag{5}$$

$$\overline{X}_2=\frac{\Delta_{\overline{X}_2}}{\Delta}=\frac{F\frac{S}{l}}{\left(\frac{2S}{l}-m\omega^2\right)^2-\frac{S^2}{l^2}}=\frac{Fl}{S}\cdot\frac{1}{r^4-4r^2+3},\tag{6}$$

а действительные амплитуды

$$X_1=\left|\frac{Fl}{S}\cdot\frac{2-r^2}{r^4-4r^2+3}\right|,\tag{7}$$

$$X_2=\left|\frac{Fl}{S}\cdot\frac{1}{r^4-4r^2+3}\right|.\tag{8}$$

В выражениях (7) и (8) под знаком модуля стоят вещественные величины. Поэтому фазовые углы φ_1 и φ_2 могут быть равны 0° или 180° в зависимости от того, положительно или отрицательно соответствующее число.

Отношение комплексных амплитуд равно

$$\frac{\overline{X}_1}{\overline{X}_2}=2-r^2.$$

Подставив сюда значения собственных частот (4), находим отношения действительных амплитуд главных форм колебаний

$$\frac{X_1}{X_2}=2-1=1\quad \text{при}\quad r^2=1,$$

$$\frac{X_1}{X_2}=2-3=-1\quad \text{при}\quad r^2=3.$$

Соответствующие главные формы колебаний показаны на рис. *а* и *б*.

Для построения амплитудно-частотных характеристик системы воспользуемся уравнениями (5) и (6). Задаваясь различными значениями безразмерной частоты r, находим соответствующие значения безразмерных комплексных амплитуд $\overline{X}_1/\left(\frac{Fl}{S}\right)$ и $\overline{X}_2/\left(\frac{Fl}{S}\right)$. Результаты вычислений сведены в табл. 1. По данным табл. 1 построены кривые, показанные на рис. *в*. Сплошные линии соответствуют положительной комплексной амплитуде, т. е. нулевому фазовому углу, штриховые линии — отрицательной комплексной амплитуде, т. е. колебаниям в противофазе.

Таблица 1

r	$\bar{x}_1/\left(\frac{Fl}{S}\right)$	$\bar{x}_2/\left(\frac{Fl}{S}\right)$	r	$\bar{x}_1/\left(\frac{Fl}{S}\right)$	$\bar{x}_2/\left(\frac{Fl}{S}\right)$
0	0,667	0,333	1,5	0,266	−1,065
0,5	0,848	0,485	1,6	0,816	−1,46
0,75	1,34	0,935	$\sqrt{3}$	∞	∞
1,0	∞	∞	1,9	−1,012	0,628
1,1	−2,10	−2,66	2,0	−0,667	0,333
1,2	−0,816	−1,46	2,5	−0,249	0,0586
1,3	−0,343	−1,105	3,0	−0,146	0,0208
$\sqrt{2}$	0	−1,00	4,0	−0,072	0,005

§ 9. Влияние гироскопических сил и сил вязкого сопротивления на свободные и вынужденные колебания твердого тела с двумя степенями свободы

1°. Влияние гироскопических сил на свободные колебания твердого тела. При составлении дифференциальных уравнений малых колебаний с учетом гироскопических сил можно применять теорему об изменении главного момента количеств движения относительно неподвижных осей координат

$$\frac{dL_x}{dt}=\sum_{k=1}^{n} m_x(F_k^e);\quad \frac{dL_y}{dt}=\sum_{k=1}^{n} m_y(F_k^e);\quad \frac{dL_z}{dt}=\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e),\qquad (1^*)$$

где L_x, L_y, L_z — главные моменты количеств движения относительно неподвижных осей координат x, y, z; $\sum_{k=1}^{n} m(F_k^e)$ — главные моменты внешних сил относительно тех же осей.

Если осесимметричное твердое тело, имеющее неподвижную точку, вращается с большой угловой скоростью ω вокруг оси симметрии, которая совпадает при равновесии тела с неподвижной осью x, то с точностью до величин первого порядка малости главные моменты количеств движения относительно неподвижных осей координат будут

$$L_x=A\omega,\quad L_y=A\omega\beta-B\dot{\gamma},\quad L_z=A\omega\gamma+B\dot{\beta},\qquad (2^*)$$

где A — момент инерции твердого тела относительно оси симметрии, B — момент инерции относительно любой оси, перпендикулярной к оси симметрии и проходящей через неподвижную точку, β — малый угол поворота оси симметрии, отсчитываемый от неподвижной оси x в плоскости xy, γ — малый угол поворота оси симметрии, отсчитываемый от неподвижной оси x в плоскости xz.

При решении задач на свободные колебания твердого тела, вращающегося вокруг своей оси, рекомендуется следующий порядок действий:

1) выбираем две системы координат — неподвижную и подвижную — с началом в неподвижной точке;

2) вычисляем главные моменты всех внешних сил относительно неподвижных осей x, y, z и главные моменты количеств движения относительно этих осей;

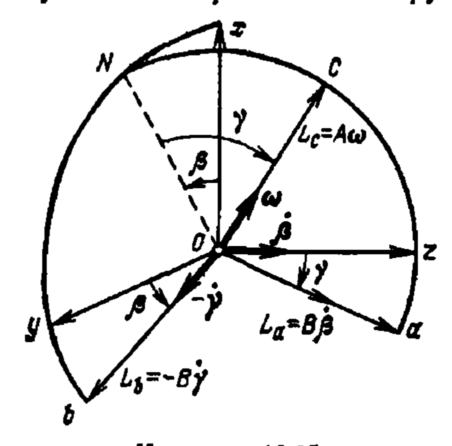
3) пользуясь теоремой об изменении главного момента количеств движения относительно осей x, y, z, находим дифференциальные уравнения малых колебаний системы;

4) задаемся частным решением системы и подставляем его в дифференциальные уравнения движения. Находим уравнение частот, из которого определяем собственные частоты системы;

5) находим далее отношение амплитуд колебаний, соответствующих каждой частоте;

6) составляем уравнения первого и второго главных колебаний и общее решение как сумму главных колебаний.

Задача 18.35. Ротор, имеющий неподвижную точку O, вращается с угловой скоростью ω вокруг оси симметрии Oc и совершает малые колебания вокруг неподвижных осей y, z. Найти главный момент количеств движения ротора с точностью до величин первого порядка малости. Момент инерции ротора относительно оси Oc равен A, а относительно главных осей инерции a и b равен B.



К задаче 18.35.

Решение. Выберем неподвижную систему координат xyz с началом в неподвижной точке O и подвижную систему осей a, b, c, являющихся главными осями инерции твердого тела в точке O. Найдем пересечение плоскости ac с плоскостью xy — линию узлов ON и будем определять положение подвижной системы осей при помощи углов β и γ.

Тогда составляющие угловой скорости ротора будут: ω, направленная по оси Oc, $\dot\beta$, направленная по оси z, $\dot\gamma$, направленная в отрицательную сторону оси Ob. Находим проекции угловой скорости ротора на главные оси инерции a, b, c:

$$\omega_c = \omega + \dot\beta \sin\gamma, \quad \omega_a = \dot\beta\cos\gamma, \quad \omega_b = -\dot\gamma.$$

Полагая углы β и γ, а также их производные малыми величинами первого порядка, найдем значения проекций угловой скорости

на главные оси инерции с точностью до малых величин первого порядка включительно. Тогда $\sin\gamma \approx \gamma$, $\cos\gamma \approx 1$ и далее

$$\omega_c = \omega + \dot{\beta}\cdot\gamma \approx \omega, \quad \omega_a = \dot{\beta}, \quad \omega_b = -\dot{\gamma}.$$

Главные моменты количеств движения относительно главных осей инерции abc будут

$$L_a = B\dot{\beta}, \quad L_b = -B\dot{\gamma}, \quad L_c = A\omega.$$

Далее находим проекции главного момента количеств движения на неподвижные оси:

$$L_x = L_c\cos\gamma\cos\beta - L_a\sin\gamma\cos\beta - L_b\sin\beta \approx A\omega - B\dot{\beta}\gamma + B\dot{\gamma}\beta,$$

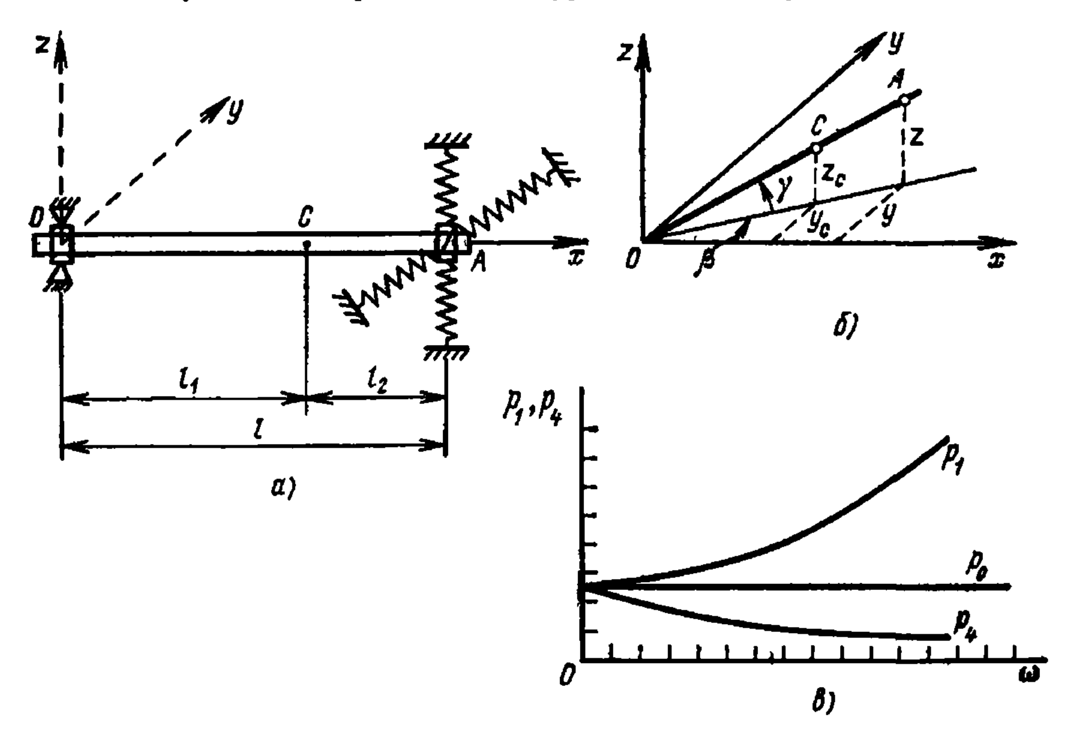
$$L_y = L_c\cos\gamma\cdot\sin\beta - L_a\sin\gamma\sin\beta + L_b\cos\beta \approx A\omega\beta - B\beta\gamma\beta - B\dot{\gamma},$$

$$L_z = L_c\sin\gamma + L_a\cos\gamma \approx A\omega\gamma + B\dot{\beta}.$$

Отбросив члены, порядок малости которых выше первого, окончательно получим

$$L_x = A\omega, \quad L_y = A\omega\beta - B\dot{\gamma}, \quad L_z = A\omega\gamma + B\dot{\beta}.$$

Задача 18.36. Горизонтальный вал массы M вращается с постоянной угловой скоростью $\overline{\omega}$ вокруг оси симметрии. Левый конец



К задаче 18.36.

вала вращается в шарнирно закрепленном самоустанавливающемся подшипнике, который может свободно поворачиваться вокруг центра O.

Правый конец вала вращается в упруго закрепленном подшипнике A. Коэффициент жесткости c упругого поля, в котором перемещается правая опора A, одинаков в любом направлении, перпендикулярном OA. Центр тяжести вала находится в точке C (рис. a) на расстоянии l_1 от точки O и на расстоянии l_2 от опоры A. Расстояние между опорами l. Главные центральные моменты инерции вала: A — относительно его продольной оси OA и B — относительно любой оси, перпендикулярной OA и проходящей через центр тяжести C. В горизонтальном положении вал находится в положении статического равновесия.

Найти малые колебания вращающегося вала около положения равновесия.

Решение. Выберем неподвижные оси координат xyz (рис. a) с центром в неподвижной точке O, направив ось x вдоль оси вала в положении статического равновесия, ось y — в горизонтальной плоскости и ось z — вертикально. Оси xyz образуют правую систему координат.

Для вывода дифференциальных уравнений свободных малых колебаний ротора воспользуемся теоремой об изменении главного момента количеств движения в проекциях на неподвижные оси x, y, z (1*). Значения L_x, L_y, L_z получены в предыдущей задаче. Так как, согласно условию, вал вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью $\overline{\omega}$, то $L_x = A\omega = \text{const}$. Проекции главного момента количеств движения (кинетического момента) на неподвижные оси y, z равны

$$L_y = A\omega\beta - (B + Ml_1^2)\dot{\gamma}, \tag{1}$$

$$L_z = A\omega\gamma + (B + Ml_1^2)\dot{\beta}, \tag{2}$$

где (рис. $б$) смещенное произвольное положение вала вполне определяется координатами y, z правой опоры вала. Действительно, малые углы γ и β, образованные смещенной осью вала с неподвижными координатными плоскостями xy и xz, с точностью до малых величин первого порядка малости равны

$$\beta = \frac{y}{l}, \tag{3}$$

$$\gamma = \frac{z}{l}. \tag{4}$$

Координаты центра тяжести y_C, z_C также могут быть выражены через y, z:

$$y_C = y\frac{l_1}{l}, \tag{5}$$

$$z_c = z\frac{l_1}{l}. \tag{6}$$

Выражение $(B + Ml_1^2)$ представляет в (1) и (2), согласно теореме Штейнера, момент инерции вала относительно любой оси, перпенди-

кулярной оси вала и проходящей через шарнир O. Так как отклонения вала отсчитываются от положения статического равновесия, где вес вала уравновешен реакциями шарнирной и упругой опор, то проекции главного момента внешних сил на неподвижные оси координат равны

$$\sum_{k=1}^{n} m_y(F_k^e) = czl, \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k^e) = -cyl, \tag{8}$$

где проекции реакции упругой опоры равны

$$F_y^e = -cy, \tag{9}$$

$$F_z^e = -cz. \tag{10}$$

Подставив в уравнение (1*) значения проекций кинетического момента (1) и (2) и проекций главного момента внешних сил (7) и (8), освободившись далее от углов β и γ при помощи формул (3) и (4), получим дифференциальные уравнения свободных малых колебаний вала около положения статического равновесия

$$\left.\begin{aligned} (B+Ml_1^2)\ddot{z} - A\omega\dot{y} + cl^2 z = 0,\\ (B+Ml_1^2)\ddot{y} + A\omega\dot{z} + cl^2 y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Здесь $-A\omega\dot{y}$ и $+A\omega\dot{z}$ — гироскопические члены.

Решение этой системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ищем в виде

$$y = a\cos(pt+\alpha), \qquad z = b\sin(pt+\alpha). \tag{12}$$

Подставив эти значения переменных и их производных в уравнения (11), сократив затем уравнения соответственно на $\sin(pt+\alpha)$ и $\cos(pt+\alpha)$, получим систему алгебраических уравнений для определения постоянных

$$\left.\begin{aligned} A\omega p\cdot a + [cl^2 - (B+Ml_1^2)p^2]\cdot b = 0,\\ [cl^2 - (B+Ml_1^2)p^2]\,a + A\omega p\cdot b = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Система (13) имеет нетривиальное решение, когда определитель равен нулю. Отсюда получаем частотное уравнение

$$A^2\omega^2 p^2 - [cl^2 - (B+Ml_1^2)p^2]^2 = 0. \tag{14}$$

Корни этого уравнения определяют собственные частоты малых колебаний вала. Если подставить эти корни в уравнения (13), то можно найти отношение амплитуд колебаний a/b. Проще всего найти корни

уравнения частот (14) следующим образом. Сложив и вычтя равенства (13), найдем

$$\left.\begin{aligned}&[cl^2-(B+Ml_1^2)p^2+A\omega p]\cdot(a+b)=0,\\&[cl^2-(B+Ml_1^2)p^2-A\omega p](a-b)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

Отсюда следует, что существует два типа главных, или нормальных колебаний вала. Частоты первого главного колебания определяются из уравнения

$$(B+Ml_1^2)p^2-A\omega p-cl^2=0.$$

Решив это квадратное уравнение, находим первые две собственные частоты

$$p_{1,2}=\frac{A\omega\pm\sqrt{A^2\omega^2+4cl^2(B+Ml_1^2)}}{2(B+Ml_1^2)}.\qquad(16)$$

Так как значения частот (16) не обращают в нуль первый сомножитель во втором уравнении (15), то им соответствует равенство

$$a-b=0,\quad\text{или}\quad a=b.\qquad(17)$$

Частоты второго главного колебания находятся из уравнения

$$(B+Ml_1^2)p^2+A\omega p-cl^2=0,\qquad(18)$$

откуда

$$p_{3,4}=\frac{-A\omega\mp\sqrt{A^2\omega^2+4cl^2(B+Ml_1^2)}}{2(B+Ml_1^2)}.\qquad(19)$$

Значения частот (19) не обращают в нуль первый сомножитель в первом из уравнений (15). Следовательно, им соответствует равенство

$$a+b=0,\quad\text{или}\quad a=-b.\qquad(20)$$

Заметив, что

$$p_1=-p_3,\quad p_2=-p_4,\qquad(21)$$

заключаем, что существует два типа главных колебаний вала. Первый тип главных колебаний описывается формулами

$$y=a_1\sin(p_1t+\alpha_1),\quad z=a_1\cos(p_1t+\alpha_1).\qquad(22)$$

Второй тип главных колебаний определяется выражениями

$$y=a_2\sin(p_4t+\alpha_2),\quad z=-a_2\cos(p_4t+\alpha_2).\qquad(23)$$

При главных колебаниях первого типа точка A будет описывать окружность вокруг центра, расположенного на оси x. Движение точки A при этом совпадает по направлению с собственным вращением тела. Это движение называют прямой регулярной прецессией,

При втором типе главных колебаний точка A описывает окружность вокруг центра, находящегося на оси x, в направлении, обратном собственному вращению вала. Такое движение называют обратной прецессией.

Общее решение дифференциальных уравнений, определяющих свободные колебания вала, складывается из двух главных колебаний

$$\left.\begin{aligned} y &= a_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + a_2 \sin(p_4 t + \alpha_2), \\ z &= a_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) - a_2 \cos(p_4 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Четыре произвольных постоянных интегрирования a_1, a_2, α_1, α_2 находятся по начальным условиям движения — значениям y, z, $\dot{y}$, $\dot{z}$ при $t=0$.

Если положить в уравнении (14) угловую скорость собственного вращения вала ω равной нулю, то уравнение

$$(B+Ml_1^2)p^2 - cl^2 = 0 \quad (25)$$

определит собственную частоту невращающегося вала

$$p_0 = \pm\sqrt{\frac{cl^2}{B+Ml_1^2}}.$$

Сравнив положительные значения собственных частот вращающегося вала со значением собственной частоты невращающегося вала, находим, что они располагаются в следующем порядке:

$$p_1 > +p_0 > p_4.$$

Как показывает проведенное исследование, учет действия гироскопических сил приводит к удвоению числа собственных частот. С увеличением угловой скорости вала значения частот p_1 и p_4 все больше и больше отличаются от величины p_0 (рис. *в*). Заметим, что отрицательные значения корней частотных уравнений p_2, p_3 приводят к решениям, линейно зависимым от выше найденных, и, таким образом, не вносят ничего нового.

2°. Влияние вязкого трения и гироскопических сил на свободные колебания твердого тела. В п. 1° этого параграфа было рассмотрено влияние гироскопических сил на свободные колебания системы с двумя степенями свободы. При этом не учитывались диссипативные силы, которые в виде вязкого сопротивления среды, сухого трения и внутреннего трения в материале всегда сопутствуют движению. Из всех разновидностей диссипативных сил, учитывая значительное распространение этих сил в технике, мы рассмотрим в этом пункте только силы вязкого трения.

В добавление к тому, что было сказано в п. 1° относительно составления дифференциальных уравнений малых колебаний системы, следует учесть при составлении главного момента внешних сил и

момент сил вязкого трения. Эти силы считают пропорциональными первой степени скорости и направленными прямо противоположно скорости.

Покажем, как учитывается влияние вязкого трения на примере решения задачи о малых колебаниях вала.

Задача 18.37. В условиях задачи 18.36 определить малые колебания вала, полагая, что силы вязкого трения создают моменты: относительно оси y равный $\left(+\frac{n}{l}\dot{z}\right)$ и относительно оси z равный $\left(-\frac{n}{l}\dot{y}\right)$, где n — некоторый постоянный коэффициент.

Решение. Согласно теореме об изменении главного момента количеств движения вала относительно осей y, z имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[A\omega\beta-(B+Ml_1^2)\dot{\gamma}\right]&=czl+\frac{n}{l}\dot{z}, \\ \frac{d}{dt}\left[A\omega\gamma+(B+Ml_1^2)\dot{\beta}\right]&=-cyl-\frac{n}{l}\dot{y}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Внеся в эти уравнения значения β и γ, полученные в предыдущей задаче, получаем дифференциальные уравнения малых колебаний вала в виде

$$\begin{aligned} (B+Ml_1^2)\ddot{z}-A\omega\dot{y}+n\dot{z}+cl^2z&=0, \\ (B+Ml_1^2)\ddot{y}+A\omega\dot{z}+n\dot{y}+cl^2y&=0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для интегрирования этой системы дифференциальных уравнений введем комплексную переменную $\lambda=z+iy$. Умножив второе уравнение (2) на i и сложив его с первым уравнением (2), получим

$$(B+Ml_1^2)\ddot{\lambda}+(n+iA\omega)\dot{\lambda}+cl^2\lambda=0. \quad (3)$$

Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для его интегрирования составляем характеристическое уравнение

$$(B+Ml_1^2)s^2+(n+iA\omega)s+cl^2=0 \quad (4)$$

и находим его корни

$$s_{1,2}=\frac{-(n+iA\omega)\pm\sqrt{(n+iA\omega)^2-4(B+Ml_1^2)cl^2}}{2(B+Ml_1^2)}. \quad (5)$$

Сокращенно эти корни могут быть записаны в виде

$$s_{1,2}=\frac{-(n+iA\omega)\pm\sqrt{a_1+ib_1}}{2(B+Ml_1^2)}, \quad (6)$$

где

$$a_1=n^2-A^2\omega^2-4(B+Ml_1^2)cl^2, \quad b_1=2nA\omega.$$

Согласно формуле Муавра для дробного показателя можно определить два значения $\sqrt{a_1+ib_1}$:

$$\sqrt{a_1+ib_1}=\pm\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right), \tag{7}$$

где

$$\rho=\sqrt{a_1^2+b_1^2}=\sqrt{[n^2-A^2\omega^2-4(B+Ml_1^2)cl^2]^2+4n^2A^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b_1}{a_1}=\frac{2nA\omega}{n^2-A^2\omega^2-4(B+Ml_1^2)cl^2}.$$

Таким образом, можно представить

$$\sqrt{a_1+ib_1}=a_2+ib_2=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{[n^2-A^2\omega^2-4(B+Ml_1^2)cl^2]^2+4n^2A^2\omega^2}+n^2-A^2\omega^2-\right.$$
$$\left.-4(B+Ml_1^2)cl^2\right\}^{1/2}+\frac{i}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{[n^2-A^2\omega^2-4(B+Ml_1^2)cl^2]^2+4n^2A^2\omega^2}-\right.$$
$$\left.-n^2+A^2\omega^2+4(B+Ml_1^2)cl^2\right\}^{1/2}. \tag{8}$$

Тогда корни характеристического уравнения могут быть записаны в виде

$$s_{1,2}=\frac{-(n\mp a_2)-i(A\omega\mp b_2)}{2(B+Ml_1^2)}. \tag{9}$$

Общее решение дифференциального уравнения (4) будет

$$\lambda=C_1e^{s_1t}+C_2e^{s_2t}, \tag{10}$$

где C_1 и C_2 — комплексные постоянные величины вида

$$C_1=D_1+iD_3,\quad C_2=D_2+iD_4. \tag{11}$$

Подставив эти значения произвольных постоянных в (10), получим

$$\lambda=(D_1+iD_3)\exp\left[-\frac{(n-a_2)t}{2(B+Ml_1^2)}\right]\left(\cos\frac{b_2-A\omega}{2(B+Ml_1^2)}t+i\sin\frac{b_2-A\omega}{2(B+Ml_1^2)}t\right)+$$
$$+(D_2+iD_4)\exp\left[-\frac{(n-a_2)t}{2(B+Ml_1^2)}\right]\left(\cos\frac{b_2+A\omega}{2(B+Ml_1^2)}t-i\sin\frac{b_2+A\omega}{2(B+Ml_1^2)}t\right). \tag{12}$$

Отделив в этом уравнении вещественную и мнимую части, находим исходные переменные y, z:

$$y=\exp\left[-\frac{(n-a_2)t}{2(B+Ml_1^2)}\right]\left(D_1\sin\frac{b_2-A\omega}{2(B+Ml_1^2)}t+D_3\cos\frac{b_2-A\omega}{2(B+Ml_1^2)}t\right)+$$
$$+\exp\left[-\frac{(n+a_2)t}{2(B+Ml_1^2)t}\right]\cdot\left(-D_2\sin\frac{b_2+A\omega}{2(B+Ml_1^2)}t+D_4\cos\frac{b_2+A\omega}{2(B+Ml_1^2)}t\right),$$

$$z=\exp\left[-\frac{(n-a_2)t}{2(B+Ml_1^2)}\right]\cdot\left(D_1\cos\frac{b_2-A\omega}{2(B+Ml_1^2)}t-D_3\sin\frac{b_2-A\omega}{2(B+Ml_1^2)}t\right)+$$
$$+\exp\left[-\frac{(n-a_2)t}{2(B+Ml_1^2)}\right]\left(D_2\cos\frac{b_2+A\omega}{2(B+Ml_1^2)}t+D_4\sin\frac{b_2+A\omega}{2(B+Ml_1^2)}t\right).$$

Из (8) видно, что всегда $n > a_2$. Следовательно, координаты правого конца вала убывают с течением времени. Свободные колебания вала под влиянием вязкого трения затухают.

3°. Вынужденные колебания твердого тела с учетом гироскопических сил. При составлении дифференциальных уравнений в этом случае движения может быть использована теорема об изменении главного момента количеств движения. Выражения для главного момента количеств движения, приведенные в п. 1° этого параграфа, определенные уравнениями (2*), сохраняют силу. В отличие от ранее рассмотренных случаев малых колебаний, в главный момент внешних сил относительно неподвижных осей входит момент возмущающих сил.

Наиболее распространенным в технике видом возмущающих сил, действующих на твердое тело, вращающееся вокруг оси, являются силы, вызванные неуравновешенностью ротора.

При решении задач на определение вынужденных колебаний твердого тела с двумя степенями свободы при действии гироскопических сил рекомендуется следующая последовательность действий:

1) выбираем неподвижную и подвижную системы координат;

2) составляем выражения для главного момента количеств движения тела и главного момента внешних сил относительно неподвижных осей координат;

3) находим дифференциальные уравнения малых колебаний, пользуясь теоремой об изменении главного момента количеств движения;

4) ищем частное решение системы дифференциальных уравнений, определяющее вынужденные колебания системы;

5) определяем критические угловые скорости ротора, при которых возникает явление резонанса;

6) находим предельные значения искомых переменных при неограниченном возрастании угловой скорости вращения ротора.

Покажем, как исследуются вынужденные колебания ротора, вызванные собственной неуравновешенностью, на следующих примерах.

Задача 18.38. Определить вынужденные колебания вала, вызванные его статической и динамической неуравновешенностью, в условиях задачи 18.36.

Статическая неуравновешенность, вызванная неточностью изготовления вала, задана смещением центра тяжести на малое расстояние e (эксцентриситет) от геометрической оси вращения.

Динамическая неуравновешенность, возникающая также из-за неточности изготовления, задана малым углом δ между главной центральной осью инерции и геометрической осью вращения. Определить также динамические составляющие реакций упругой и шарнирной опор.

Решение. Для составления дифференциальных уравнений малых колебаний вала воспользуемся теоремой о движении центра инерции

и теоремой об изменении главного момента количеств движения в относительном движении по отношению к центру инерции вала. Эти теоремы записываются так:

$$M\ddot{y}_C = R_y^e, \qquad M\ddot{z}_C = R_z^e; \tag{1}$$

$$\frac{dL_{C_y}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{C_y}(F_k^e), \quad \frac{dL_{C_z}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{C_z}(F_k^e), \tag{2}$$

где y_C, z_C — координаты центра инерции вала, R_y^e, R_z^e — проекции главного вектора внешних сил на оси y, z, L_{C_y}, L_{C_z} — главные моменты количеств движения вала относительно осей, параллельных неподвижным осям y, z и проведенных через центр инерции вала, $\sum_{k=1}^{n} m_{C_y}(F_k^e)$, $\sum_{k=1}^{n} m_{C_z}(F_k^e)$ — главные моменты внешних сил относительно тех же осей.

Пусть точка A оси вала, лежащая в плоскости упругой опоры, получила малые смещения y, z по осям неподвижных осей. Тогда координаты центра инерции вала будут

$$\left.\begin{aligned} y_C &= y\frac{l_1}{l} + e\cos\omega t, \\ z_C &= z\frac{l_1}{l} + e\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Углы, образуемые главной центральной осью инерции с координатными плоскостями xz и xy, будут

$$\left.\begin{aligned} \beta^* &= \beta + \delta\cos(\omega t - \varepsilon) = \frac{y}{l} + \delta\cos(\omega t - \varepsilon), \\ \gamma^* &= \gamma + \delta\sin(\omega t - \varepsilon) = \frac{z}{l} + \delta\sin(\omega t - \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здесь β, γ — углы, образованные геометрической осью вращения с координатными плоскостями xz и xy, угол $\omega t - \varepsilon$ составлен плоскостью, проходящей через ось вращения и главную центральную ось инерции, с плоскостью xy. Кинетический момент (главный момент количеств движения) имеет проекции на оси координат

$$\left.\begin{aligned} L_{C_x} &= A\omega, \\ L_{C_y} &= A\omega\beta^* - B\dot{\gamma}^*, \\ L_{C_z} &= A\omega\gamma^* + B\dot{\beta}^*. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Главные моменты внешних сил относительно осей y, z, проходящих через центр инерции вала, равны

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} m c_y (F_k^e) &= czl_2 + R_{1z} l_1, \\ \sum_{k=1}^{n} m c_z (F_k^e) &= -cyl_2 - R_{1y} \cdot l_1, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где R_{1y}, R_{1z} — проекции на соответствующие оси реакции шарнирной опоры, $-cy$, $-cz$ — проекции на оси реакции упругой опоры. Таким образом, проекции внешних сил на оси координат таковы:

$$R_y^e = -cy + R_{1y}, \qquad R_z^e = -cz + R_{1z}. \tag{7}$$

Подставим в уравнения (1) и (2) найденные значения (5), (6), (7), с учетом формул (3) и (4). Исключив затем из системы четырех уравнений неизвестные проекции реакции шарнирной опоры R_{1y}, R_{1z}, находим окончательно

$$\left.\begin{aligned} &(B + Ml_1^2)\ddot{z} - A\omega\dot{y} + cl^2 z = \\ &\qquad = Me\omega^2 l_1 l \sin\omega t + (B - A)\, l\omega^2\delta \sin(\omega t - \varepsilon), \\ &(B + Ml_1^2)\ddot{y} + A\omega\dot{z} + cl^2 y = \\ &\qquad = Me\omega^2 l_1 l \cos\omega t + (B - A)\, l\omega^2\delta \cos(\omega t - \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Полное решение этой системы обыкновенных неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами состоит из общего решения однородной системы, которое было получено в задаче 18.36, и из частного решения неоднородной системы. Последнее определяет вынужденные колебания системы. Будем искать частное решение в виде

$$\left.\begin{aligned} y &= a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t, \\ z &= a_2 \cos\omega t + b_2 \sin\omega t. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Подставив значения переменных (9) и их производные в систему уравнений (8), приравниваем затем коэффициенты при одноименных тригонометрических функциях ($\sin\omega t$, $\cos\omega t$) в каждом из полученных алгебраических уравнений. Мы получим систему алгебраических уравнений с неизвестными a_1, b_1, a_2, b_2. При условии

$$cl^2 - (B + Ml_1^2 + A)\,\omega^2 \neq 0 \tag{10}$$

находим значения неизвестных

$$\left.\begin{aligned} a_1 = b_2 &= \frac{Me\omega^2 l_1 l + (B - A)\, l\omega^2\delta\cos\varepsilon}{cl^2 - (B + Ml_1^2 - A)\,\omega^2}, \\ a_2 = -b_1 &= \frac{-(B - A)\, l\omega^2\delta \sin\varepsilon}{cl^2 - (B + Ml_1^2 - A)\,\omega^2}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

С учетом полученных значений a_1, b_1, частное решение (9) может быть записано в виде

$$\left.\begin{aligned} y &= a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \\ z &= -b_1 \cos \omega t + a_1 \sin \omega t, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

или

$$y = H \cos(\omega t - \alpha), \qquad z = H \sin(\omega t - \alpha), \tag{13}$$

где

$$H = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \qquad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b_1}{a_1}. \tag{14}$$

Таким образом, при вынужденных колебаниях точка A вала будет описывать окружность радиуса H, вращаясь с угловой скоростью ω в направлении собственного вращения вала. Ось вала при этом будет описывать боковую поверхность кругового конуса с вершиной в неподвижной точке O.

Вынужденным колебаниям, вызванным неуравновешенностью вала, соответствует прямая прецессия вала с угловой скоростью ω, равной по величине собственной угловой скорости вала. Если изменять угловую скорость вала от нуля, то до тех пор, пока будет $cl^2 + A\omega^2 > (B + Ml_1^2)\omega^2$, вынужденные колебания вала и возмущающая сила будут совпадать по фазе, когда же будет $(B + Ml_1^2)\omega^2 > cl^2 + A\omega^2$, то они будут находиться в противоположных фазах.

Если неограниченно увеличивать угловую скорость собственного вращения вала, то из уравнений (11) найдутся предельные значения a_1, b_1:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\omega\to\infty} a_1 &= \frac{-[Mel_1 l + (B - A)\, l\delta \cos \varepsilon]}{B + Ml_1^2 - A}, \\ \lim_{\omega\to\infty} b_1 &= -\frac{(B - A)\, l\delta \sin \varepsilon}{B + Ml_1^2 - A}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Воспользовавшись далее формулой (14), можно найти предельное значение радиуса окружности, описываемого правым концом вала.

Общее решение дифференциальных уравнений (8) складывается из общего решения этих уравнений без правой части и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение системы однородных уравнений (27) было найдено в задаче 18.36. Сложив это решение с частным решением (13), находим уравнения движения правого конца вала под действием возмущающей силы, вызванной статической и динамической неуравновешенностью вала:

$$\left.\begin{aligned} y &= a_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + a_2 \sin(p_4 t + \alpha_2) + H \cos(\omega t - \alpha), \\ z &= a_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) - a_2 \cos(p_4 t + \alpha_2) + H \sin(\omega t - \alpha). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Это решение получено без учета сил сопротивления, препятствующих колебаниям вала. Как бы малы ни были силы сопротивления,

они ведут к быстрому затуханию свободных колебаний, определяемых первыми двумя слагаемыми в правой части уравнений (16). Это было показано в задаче 18.37 для случая сил вязкого трения. Поэтому при изучении колебаний, вызванных неуравновешенностью вала, в установившемся режиме (при $\omega = \text{const}$) можно опустить первые два слагаемых в правой части уравнений (16).

Это нельзя делать при изучении переходных режимов: при пуске и остановке вала, переходе с одного режима на другой, т. е. во всех случаях, когда угловая скорость вала меняется.

Рассмотрим критические скорости вращения вала. Если приравнять нулю определитель системы алгебраических уравнений, полученных в результате подстановки частного решения (9) в дифференциальные уравнения (8), то получим частотное уравнение

$$[cl^2 - (B + Ml_1^2 + A)\,\omega^2]\,[cl^2 - (B + Ml_1^2 - A)\,\omega^2] = 0, \tag{17}$$

откуда получаем два уравнения

$$\left.\begin{aligned} cl^2 - (B + Ml_1^2 + A)\,\omega^2 &= 0,\\ cl^2 - (B + Ml_1^2 - A)\,\omega^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Эти уравнения не имеют общих корней (за исключением случая $\omega = 0$, что соответствует отсутствию гироскопических сил), в чем легко убедиться, если вычесть одно из другого. Из уравнений (18) находятся критические скорости вала

$$\omega_1 = \frac{l\sqrt{c}}{\sqrt{B + Ml_1^2 - A}}, \tag{19}$$

$$\omega_2 = \frac{l\sqrt{c}}{\sqrt{B + Ml_1^2 + A}}. \tag{20}$$

Таким образом, у вала две критические скорости вращения. Сравнив значения этих критических скоростей со значением собственной частоты невращающегося вала (задача 18.36), находим

$$\omega_1 > p_0 > \omega_2.$$

Вращение вала, удваивая число критических скоростей, делает одну из них меньше, а вторую больше собственной частоты невращающегося вала. Заметим, что в случае

$$B + Ml_1^2 < A$$

одно значение критической скорости становится мнимым.

Как следует из уравнений (11), при вынужденных колебаниях вала, вызванных его статической и динамической неуравновешенностью, возникают резонансные колебания, соответствующие только одной критической скорости. Действительно, резонансные колебания возникнут при обращении в нуль знаменателя правой части уравнений (11),

что дает значение критической скорости (19). Резонансных колебаний, соответствующих второму значению критической скорости (20), в случае возмущающих сил, вызванных неуравновешенностью вала, возникнуть не может.

Переходим к определению динамических составляющих реакций опор. Для нахождения реакции упругой опоры составим дифференциальные уравнения движения этой опоры, отбросив мысленно вал и заменив его действие искомой реакцией R_A. Имеем

$$m\ddot{y} = -cy + R_{Ay}, \qquad m\ddot{z} = -cz + R_{Az}. \tag{21}$$

Здесь m — масса той части опоры (подшипника), которая не вращается вместе с валом, но колеблется вместе с ним. Перемещения y, z упругой опоры найдены ранее (13). Подставив эти функции и их производные в уравнения (21), получим

$$R_{Ay} = (c - m\omega^2) H \cos(\omega t - \alpha),$$
$$R_{Az} = (c - m\omega^2) H \sin(\omega t - \alpha).$$

Отсюда

$$R_A = (c - m\omega^2) \cdot H. \tag{22}$$

Из этой формулы видно, что реакция упругой опоры (точнее ее динамическая составляющая) обращается в нуль при наличии статической и динамической неуравновешенности вала, если масса опоры будет удовлетворять равенству

$$m = \frac{c}{\omega^2}. \tag{23}$$

Зная рабочую скорость вала и коэффициент жесткости опоры (который обычно выбирается из соображений оптимального расположения критической угловой скорости вала), можно надлежащим выбором массы невращающихся частей упругой опоры добиться, чтобы на заданной рабочей скорости динамическая составляющая реакции упругой опоры была близка к нулю. Если вал имеет некоторый диапазон рабочих скоростей, то, подбирая массу опоры согласно (23) для некоторой средней рабочей угловой скорости, можно значительно уменьшить реакцию опоры по сравнению с ее величиной в случае жесткого крепления опоры.

Определим динамическую составляющую реакции шарнирной опоры. Для этого мысленно освободим вал от шарнирной опоры и заменим ее действие искомой реакцией R_1. Составляем дифференциальные уравнения движения центра инерции вала в проекциях на оси (1) с учетом (7):

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{y}_C &= -cy + R_{1y} \\ M\ddot{z}_C &= -cz + R_{1z}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Подставив в эти формулы значения y_C, z_C в соответствии с (3) и перемещения y, z упругой опоры (13), находим

$$R_{1y}=\left(c-M\omega^2\frac{l_1}{l}\right)H\cos(\omega t-\alpha)-Me\omega^2\cos\omega t,$$

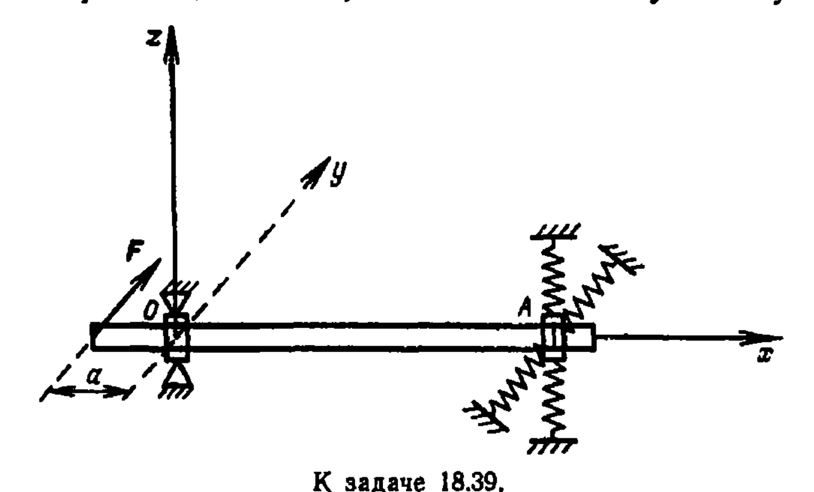
$$R_{1z}=\left(c-M\omega^2\frac{l_1}{l}\right)H\sin(\omega t-\alpha)-Me\omega^2\sin\omega t,$$

откуда получаем

$$R_1=\sqrt{\left(c-M\omega^2\frac{l_1}{l}\right)^2H^2+M^2\omega^4e^2-2M\omega^2e\left(c-M\omega^2\frac{l_1}{l}\right)H}. \qquad (25)$$

При увеличении угловой скорости вала реакция шарнирной опоры неограниченно возрастает.

Задача 18.39. В условиях задачи 18.36 определить вынужденные колебания вращающегося вала, если на него действует возмущающая



К задаче 18.39.

сила F, направленная параллельно оси y и приложенная на расстоянии a от неподвижной точки O (см. рисунок). Проекция возмущающей силы на ось y изменяется согласно формуле

$$F=F_0\cos\omega t, \qquad (1)$$

где F_0 — наибольшее значение возмущающей силы, ω — угловая скорость собственного вращения вала.

Решение. Воспользуемся проекциями кинетического момента на неподвижные оси y, z из задачи 18.36:

$$\left.\begin{aligned} L_y&=A\omega\beta-(B+Ml_1^2)\dot\gamma,\\ L_z&=A\omega\gamma+(B+Ml_1^2)\dot\beta,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где

$$\beta=\frac{y}{l},\qquad \gamma=\frac{z}{l}. \qquad (3)$$

Проекции главного момента внешних сил на неподвижные оси y, z будут

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k^e) &= clz, \\ \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e) &= -cly - F_0 a \cos \omega t. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Внеся эти значения в теорему об изменении главного момента количеств движения, находим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[A\omega\beta - (B + Ml_1^2)\dot{\gamma}\right] &= clz, \\ \frac{d}{dt}\left[A\omega\gamma + (B + Ml_1^2)\dot{\beta}\right] &= -cly - F_0 a \cos \omega t. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Подставив в эти уравнения значения углов (3), получим

$$\left.\begin{aligned} (B + Ml_1^2)\ddot{z} - A\omega\dot{y} + cl^2 z &= 0, \\ (B + Ml_1^2)\ddot{y} + A\omega\dot{z} + cl^2 y &= -F_0 a\, l \cos \omega t. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Частное решение уравнений (6), определяющее вынужденные колебания вала, ищем в виде

$$y = b \cos \omega t, \qquad z = d \sin \omega t. \qquad (7)$$

Подставив (7) в уравнение (6) и сокращая соответственно на $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, получаем систему алгебраических уравнений для определения b и d:

$$\left.\begin{aligned} A\omega^2 b + \left[cl^2 - (B + Ml_1^2)\omega^2\right] d &= 0, \\ \left[cl^2 - (B + Ml_1^2)\omega^2\right] b + A\omega^2 d &= -F_0 al. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Из уравнений (8) находим

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{F_0 al\left[cl^2 - (B + Ml_1^2)\omega^2\right]}{A^2\omega^4 - \left[cl^2 - (B + Ml_1^2)\omega^2\right]^2}, \\ d &= \frac{-F_0 al A\omega^2}{A^2\omega^4 - \left[cl^2 - (B + Ml_1^2)\omega^2\right]^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Обращение в нуль знаменателя в этих равенствах указывает на неограниченное возрастание амплитуды колебаний правого конца вала. Это явление называется резонансом.

Итак, резонанс наступает при

$$A^2\omega^4 - \left[cl^2 - (B + Ml_1^2)\omega^2\right]^2 = 0. \qquad (10)$$

Отсюда находятся два значения критической скорости

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{l\sqrt{c}}{\sqrt{B+Ml_1^2-A}},\\ \omega_2 &= \frac{l\sqrt{c}}{\sqrt{B+Ml_1^2+A}}.\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Таким образом, в отличие от рассмотренных в предыдущей задаче вынужденных колебаний, вызванных неуравновешенностью вала, в данном случае резонанс наступает при любом из двух значений критической угловой скорости вращения вала.

Найдем отношение амплитуд вблизи резонанса, соответствующего второму значению критической скорости. Из (9) имеем

$$\frac{b}{d} = \frac{cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega_2^2}{-A\omega_2^2} = \frac{cl^2-(B+Ml_1^2)\dfrac{cl^2}{B+Ml_1^2+A}}{-A\dfrac{cl^2}{B+Ml_1^2+A}} = -1. \qquad (12)$$

Отсюда следует, что при этих колебаниях ось вала описывает круговой конус в направлении, обратном собственному вращению вала. Такое движение называется обратной прецессией вала.

Найдем далее отношение амплитуд вблизи резонанса, соответствующего первому значению критической скорости. Имеем

$$\frac{b}{d} = \frac{cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega_1^2}{-A\omega_1^2} = \frac{cl^2-(B+Ml_1^2)\dfrac{cl^2}{B+Ml_1^2-A}}{-A\dfrac{cl^2}{B+Ml_1^2-A}} = 1. \qquad (13)$$

В этом случае движение оси вала соответствует прямой прецессии.

Итак, если вынужденные колебания вызываются силой, постоянной по направлению, перпендикулярной оси вала, величина которой меняется с частотой собственного вращения вала, то возможно появление резонансных колебаний двух видов, соответствующих обоим значениям (11) критической скорости. Первые колебания соответствуют прямой прецессии, а вторые обратной прецессии вала.

4°. Влияние гироскопических сил на вынужденные колебания твердого тела при резонансе. Дифференциальные уравнения движения твердого тела составляются в соответствии с общими правилами, указанными в §§ 4, 6 и 9, п. 3°, настоящей главы.

При решении задач на определение вынужденных колебаний твердого тела при резонансе рекомендуется следующая последовательность действий:

1) выбираем обобщенные координаты;

2) пользуясь уравнениями Лагранжа или общими теоремами динамики, составляем дифференциальные уравнения движения твердого тела;

3) рассматривая задачу о свободных колебаниях тела, находим частоты свободных колебаний (резонансные частоты);

4) для случая резонанса находим частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений движения и, накладывая на него общее решение однородной системы, получаем искомое общее решение задачи.

Задача 18.40. Определить вынужденные колебания вала, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси симметрии, если вал закреплен шарнирно в точке O и имеет в точке A упругую опору с коэффициентом жесткости c в любом направлении, перпендикулярном оси симметрии вала. Центр тяжести вала находится в точке C. Главные центральные моменты инерции вала относительно оси симметрии A и относительно любой оси перпендикулярной оси симметрии B. Расстояния $OA = l$, $AC = l_1$, $OC = l_2$. Вследствие неточности изготовления центр тяжести вала находится на расстоянии e от геометрической оси вращения, а главная центральная ось образует угол δ с геометрической осью вращения. Найти вынужденные колебания вала при резонансе.

Решение. Воспользуемся результатами, полученными при решении задачи 18.38, когда для этого же вала были найдены вынужденные колебания при значениях угловой скорости вращения, отличных от резонансных.

Дифференциальные уравнения малых колебаний вала имели вид

$$\left.\begin{aligned} &(B+Ml_1^2)\ddot{z} - A\omega\dot{y} + cl^2z = \\ &= Me\omega^2 l_1 l \sin\omega t + (B-A)\, l\omega^2\delta \sin(\omega t - \varepsilon), \\ &(B+Ml_1^2)\ddot{y} + A\omega\dot{z} + cl^2 y = \\ &= Me\omega^2 l_1 l \cos\omega t + (B-A)\, l\omega^2\delta\cos(\omega t - \varepsilon), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где y, z — координаты точки A вала.

Частное решение, определяющее вынужденные колебания, дается формулами

$$\left.\begin{aligned} y &= a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t = H\cos(\omega t - \alpha), \\ z &= -b_1\cos\omega t + a_1\sin\omega t = H\sin(\omega t - \alpha). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Это решение удовлетворяет системе дифференциальных уравнений движения вала при всех значениях угловой скорости вращения, кроме критического (резонансного), равного

$$\omega_1 = \frac{l\sqrt{c}}{\sqrt{B+Ml_1^2-A}}, \qquad (3)$$

для которого знаменатель коэффициентов a_1, b_1 в (2) обращается в нуль.

Перейдем к определению вынужденных колебаний вала при резонансе, когда угловая скорость вала равна критической. Тогда частное

решение системы дифференциальных уравнений (1) вследствие ее структуры следует искать в виде

$$y=(a_1+b_1t)\cos\omega t+(a_2+b_2t)\sin\omega t, \tag{4}$$

$$z=(a_3+b_3t)\sin\omega t+(a_4+b_4t)\cos\omega t. \tag{5}$$

Подставляем эти функции и их производные в систему (1) и приравниваем коэффициенты соответственно при $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $t\sin\omega t$, $t\cos\omega t$ в левых и правых частях уравнений (1). Действительно, так как полученные после подстановки (4) и (5) в (1) уравнения должны быть справедливы в любой момент времени, то сумма коэффициентов при каждой тригонометрической функции должна быть равна нулю. В результате получаем систему восьми линейных алгебраических уравнений с восемью неизвестными a_i, b_i $(i=1, 2, 3, 4)$. Сгруппируем эти уравнения так, чтобы они составили две независимые системы из четырех уравнений с четырьмя неизвестными каждая:

$$[cl^2-(B+Ml_1^2)\omega^2]\,a_1+A\omega^2a_3+2\,(B+Ml_1^2)\,\omega b_2+A\omega b_4=$$
$$=Me\omega^2l_1l+(B-A)\,l\omega^2\delta\cos\varepsilon, \tag{6.1}$$

$$A\omega^2a_1+[cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega^2]\,a_3-A\omega b_2-2\,(B+Ml_1^2)\,\omega b_4=$$
$$=Me\omega^2l_1l+(B-A)\,l\omega^2\delta\cos\varepsilon, \tag{6.2}$$

$$[cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega^2]\,b_2-A\omega^2b_4=0, \tag{6.3}$$

$$-A\omega^2b_2+[cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega^2]\,b_4=0, \tag{6.4}$$

$$[cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega^2]a_2-A\omega^2a_4-2\,(B+Ml_1^2)\,\omega b_1+A\omega b_3=$$
$$=(B-A)\,l\omega^2\delta\sin\varepsilon, \tag{7.1}$$

$$[cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega^2)\,b_1+A\omega^2b_3=0, \tag{7.2}$$

$$-A\omega^2a_2+[cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega^2]\,a_4-A\omega b_1+2\,(B+Ml_1^2)\,\omega b_3=$$
$$=-(B-A)\,l\omega^2\delta\sin\varepsilon, \tag{7.3}$$

$$A\omega^2b_1+[cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega^2]\,b_3=0. \tag{7.4}$$

Рассмотрим систему (6). В силу выполнения равенства (3) уравнения (6.3) и (6.4) не отличаются друг от друга и имеют решения

$$b_2=-b_4. \tag{8}$$

Далее сложим и вычтем почленно (6.1) и (6.2):

$$\{[cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega^2]+A\omega^2\}\,(a_1+a_3)+[2\,(B+Ml_1^2)\,\omega-A\omega]\,(b_2-b_4)=$$
$$=2Me\omega^2l_1l+2\,(B-A)\,l\omega^2\delta\cos\varepsilon, \tag{9}$$

$$[cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega^2-A\omega^2]\,(a_1-a_3)+$$
$$+[2\,(B+Ml_1^2)\,\omega+A\omega]\,(b_2+b_4)=0. \tag{10}$$

Выражение в фигурной скобке в первом из полученных уравнений

равно нулю по условию (3). Тогда с учетом (8) из (9) находим

$$b_2 = -b_4 = \frac{Mel_1 + (B-A)\,\delta\cos\varepsilon}{2(B+Ml_1^2)-A}\cdot l\omega. \qquad (11)$$

Рассмотрим систему (7). Совершенно аналогичным образом из (7.2) и (7.4) получаем

$$b_1 = b_3, \qquad (12)$$

а вычитая (7.1) и (7.3), находим

$$b_1 = b_3 = -\frac{(B-A)\,l\delta\sin\varepsilon}{2(B+Ml_1^2)-A}\cdot\omega. \qquad (13)$$

Подставив найденные значения b_i в уравнения (4) и (5) и положив в последних $a_i = 0$, так как эти слагаемые становятся пренебрежимо малыми с возрастанием времени, получаем резонансные составляющие уравнений движения вала, вращающегося с критической угловой скоростью,

$$\left.\begin{aligned} y &= t\,(b_1\cos\omega t + b_2\sin\omega t),\\ z &= t\,(b_1\sin\omega t - b_2\cos\omega t). \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Введя обозначения

$$b_1 = D\cos\alpha, \qquad b_2 = D\sin\alpha, \qquad (15)$$

перепишем уравнения движения (14) в виде

$$\left.\begin{aligned} y &= Dt\cos(\omega t - \alpha),\\ z &= Dt\sin(\omega t - \alpha). \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Ось вала описывает конус, радиус основания которого

$$r = Dt$$

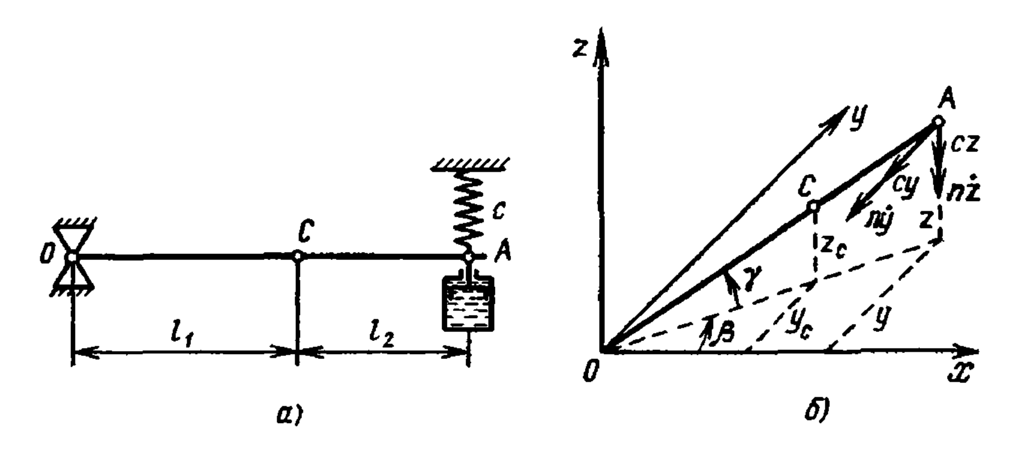
возрастает пропорционально времени, причем обход поверхности конуса происходит с угловой скоростью, равной угловой скорости собственного вращения вала.

5°. Влияние вязкого трения и гироскопических сил на вынужденные колебания твердого тела. Рассмотренная в предыдущих пунктах теория вынужденных колебаний системы хорошо согласуется с действительностью во всем, за исключением одного результата. Хотя при резонансе и наблюдается рост амплитуды колебаний, но этот рост никогда не становится неограниченным, как это получалось в предыдущих задачах. Объяснение этого несоответствия кроется в наличии сил сопротивления, которые не учитывались в пп. 3° и 4°. Поэтому рассмотрим ниже задачу 18.38, но с добавочным учетом сил сопротивления.

Задача 18.41. В условиях задачи 18.38 определить вынужденные колебания вала при наличии демпфера. Демпфер, расположенный

в том же сечении, что и упругая опора, создает силу сопротивления, пропорциональную первой степени скорости (коэффициент пропорциональности n) и направленную противоположно скорости точки A оси вала (рис. a).

Решение. Пусть точка оси A, соответствующая упругой опоре вала, имеет в данный момент координаты y, z и проекции скорости



К задаче 18.41.

на неподвижные оси $\dot{y}$, $\dot{z}$. Тогда проекции момента внешних сил (рис. $б$) равны

$$\left.\begin{aligned} M_y^e &= czl + n\dot{z}l, \\ M_z^e &= -cyl - n\dot{y}l. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний вала, вызванных его статической и динамической неуравновешенностью, были выведены в задаче 18.38 (уравнения (8)). С учетом действия сил сопротивления они запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &(B + Ml_1^2)\ddot{y} + A\omega\dot{z} + nl^2\dot{y} + cl^2y = \\ &= Me\omega^2 l_1 l \cos\omega t + (B - A)l\omega^2\delta\cos(\omega t - \varepsilon), \\ &(B + Ml_1^2)\ddot{z} - A\omega\dot{y} + nl^2\dot{z} + cl^2z = \\ &= Me\omega^2 l_1 l \sin\omega t + (B - A)\,l\omega^2\delta\sin(\omega t - \varepsilon). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Будем искать решение этой системы в виде

$$\left.\begin{aligned} y &= a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t, \\ z &= a_2\cos\omega t + b_2\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Подставив эти функции и их производные в уравнения, приравниваем коэффициенты при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$. Тогда получаем следующую

систему алгебраических уравнений для определения a_i, b_i:

$$\left.\begin{aligned}
&[cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega^2]\,a_1+A\omega^2b_2+nl^2\omega b_1=\\
&\qquad=Me\omega^2l_1l+(B-A)\,l\omega^2\delta\cos\varepsilon,\\
&[cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega^2]\,a_2-A\omega^2b_1+nl^2\omega b_2=\\
&\qquad=-(B-A)\,l\omega^2\delta\sin\varepsilon,\\
&[cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega^2]\,b_1-A\omega^2a_2-nl^2\omega a_1=\\
&\qquad=(B-A)\,l\omega^2\delta\sin\varepsilon,\\
&[cl^2-(B+Ml_1^2)\,\omega^2]\,b_2+A\omega^2a_1-nl^2\omega a_2=\\
&\qquad=Me\omega^2l_1l+(B-A)l\omega^2\delta\cos\varepsilon.
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Почленно сложим и вычтем два крайних и два средних уравнения системы (4). Получим тогда две следующие системы:

$$\left.\begin{aligned}
&[cl^2-(B+Ml_1^2+A)\,\omega^2]\,(a_1-b_2)+nl^2\omega\,(b_1+a_2)=0,\\
&-nl^2\omega\,(a_1-b_2)+[cl^2-(B+Ml_1^2+A)\,\omega^2]\,(b_1+a_2)=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[cl^2-(B+Ml_1^2-A)\,\omega^2]\,(a_1+b_2)+nl^2\omega\,(b_1-a_2)=\\
&\qquad=2Me\omega^2l_1l+2\,(B-A)\,l\omega^2\delta\cos\varepsilon,\\
&-nl^2\omega\,(a_1+b_2)+[cl^2-(B+Ml_1^2-A)\,\omega^2]\,(b_1-a_2)=\\
&\qquad=2\,(B-A)\,l\omega^2\delta\sin\varepsilon.
\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Определитель однородной системы (5) равен

$$\Delta_5=[cl^2-(B+Ml_1^2+A)\,\omega^2]^2+n^2l^4\omega^2\neq 0.\qquad(7)$$

Следовательно, система (5) имеет решение

$$a_1-b_2=0,\qquad b_1+a_2=0,$$

т. е.

$$a_1=b_2,\qquad a_2=-b_1.\qquad(8)$$

Подставив (8) в неоднородную систему (6), находим

$$\left.\begin{aligned}
&[cl^2-(B+Ml_1^2-A)\,\omega^2]a_1+nl^2\omega b_1=\\
&\qquad=Me\omega^2l_1l+(B-A)\,l\omega^2\delta\cos\varepsilon,\\
&-nl^2\omega a_1+[cl^2-(B+Ml_1^2-A)\,\omega^2]\,b_1=\\
&\qquad=(B-A)\,l\omega^2\delta\sin\varepsilon.
\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Решив систему (9), получаем

$$\begin{aligned}
a_1=b_2=\{&[cl^2-(B+Ml_1^2-A)\,\omega^2]\,[Me\omega^2l_1l+(B-A)\,l\omega^2\delta\cos\varepsilon]-\\
&-nl^3\omega^3\,(B-A)\,\delta\sin\varepsilon\}\,\{[cl^2-(B+Ml_1^2-A)\,\omega^2]^2+n^2l^4\omega^2\}^{-1},\\
b_1=-a_2=\{&[cl^2-(B+Ml_1^2-A)\,\omega^2]\,(B-A)\,l\omega^2\delta\sin\varepsilon+\\
&+nl^3\omega^3\,[Mel_1+(B-A)\,\delta\cos\varepsilon]\}\,\{[cl^2-(B+Ml_1^2-A)\,\omega^2]^2+n^2l^4\omega^2\}^{-1}.
\end{aligned}\qquad(10)$$

Как и в случае одномерного движения точки под действием силы упругости, силы сопротивления и синусоидальной возмущающей силы, амплитуды колебаний не растут неограниченно ни при каком значении угловой скорости. В данном случае угловая скорость является частотой возмущающей силы. Решение (3) с учетом (8) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y &= a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \\ z &= a_1 \sin \omega t - b_1 \cos \omega t. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Введя обозначения $a_1 = H \cos\alpha$, $b_1 = H \sin\alpha$, перепишем (11) в виде

$$y = H\cos(\omega t - \alpha), \qquad z = H\sin(\omega t - \alpha). \quad (12)$$

Точка оси вала, лежащая в плоскости упругой опоры, описывает окружность радиуса

$$H = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}. \quad (13)$$

Ось вала описывает конус с вершиной в шарнирной опоре, обегая поверхность в сторону вращения вала и с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения вала.

Найдем квадрат радиуса. После алгебраических преобразований получим

$$H^2 = \frac{\omega^4 l^2 [M^2 e^2 l_1^2 + (B-A)\delta^2 + 2Mel_1(B-A)\delta\cos\varepsilon]}{[cl^2 - (B + Ml_1^2 - A)\omega^2]^2 + n^2 l^4 \omega^2}. \quad (14)$$

Замечаем, что в числителе коэффициент при ω^4 не зависит от угловой скорости вала. Следовательно, для нахождения максимума амплитуды H необходимо исследовать функцию

$$f(\omega) = \frac{\omega^4}{[cl^2 - (B + Ml_1^2 - A)\omega^2]^2 + n^2 l^4 \omega^2}. \quad (15)$$

Вычислив производную от (15) по ω и приравняв ее нулю,

$$f'(\omega) = 0, \quad (16)$$

находим корни (16)

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= 0, \\ \omega_2 &= \frac{cl}{\sqrt{c(B + Ml_1^2 - A) - \dfrac{n^2 l^2}{2}}}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Амплитуда H достигает максимума, когда $\omega = \omega_2$. Внеся это значение угловой скорости в (14), находим наибольшую амплитуду колебаний, квадрат которой равен

$$H_{\max}^2 = \frac{4c^2 [M^2 e^2 l_1^2 + (B-A)^2 \delta^2 + 2Mel_1(B-A)\delta\cos\varepsilon]}{n^2 [4c(B + Ml_1^2 - A) - n^2 l^2]}. \quad (18)$$

§ 10. Влияние гироскопических сил на свободные и вынужденные колебания твердого тела с четырьмя степенями свободы. Самоцентрирование жесткого ротора, вращающегося в двух упругих опорах

При конструировании современных высокооборотных валов необходимо предусмотреть меры, обеспечивающие возможно больший срок службы подшипниковых опор. Реакции между валом и опорой, если рассматривать вал и опоры жесткими, возрастают пропорционально квадрату угловой скорости (см. т. 2, гл. X, § 3). Поэтому при больших угловых скоростях вращения указанные реакции даже при самой тщательной статической и динамической балансировке достигают столь больших значений, что ресурс подшипников исчисляется сотнями, а иногда и десятками часов.

Одним из эффективных методов увеличения долговечности подшипников является установка между корпусом и подшипником упругих элементов. Жесткий вал, вращающийся в двух упругих опорах, самоцентрируется после перехода через второе критическое число оборотов. Реакции между валом и упругими опорами во много раз меньше тех же реакций в случае жесткого крепления опор. Одновременно применение упругих опор позволяет осуществлять переход через критические числа оборотов при малых амплитудах.

Динамика жесткого вала, вращающегося в двух упругих опорах, рассматривается в этом параграфе. Исследуются свободные колебания вала, вынужденные колебания вала и эффект самоцентрирования, вынужденные колебания вала при резонансе, применение уравнений Лагранжа к составлению дифференциальных уравнений колебаний вала.

1° Влияние гироскопических сил на свободные колебания твердого тела. Для составления дифференциальных уравнений малых колебаний твердого тела при наличии гироскопических сил следует применять теорему о движении центра инерции системы материальных точек вместе с теоремой об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек в относительном движении по отношению к центру инерции.

Согласно первой теореме имеем

$$M\ddot{x}_C = R^e_x, \qquad M\ddot{y}_C = R^e_y, \qquad M\ddot{z}_C = R^e_z, \tag{1*}$$

где M — масса твердого тела, x_C, y_C, z_C — координаты центра инерции (тяжести) твердого тела в системе неподвижных осей координат, R^e_x, R^e_y, R^e_z — проекции главного вектора внешних сил, приложенных к твердому телу.

Вторая теорема приводит к соотношениям

$$\frac{dL_{C_x}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{C_x}(F^e_k), \quad \frac{dL_{C_y}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{C_y}(F^e_k), \quad \frac{dL_{C_z}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{C_z}(F^e_k), \tag{2*}$$

где L_{C_x}, L_{C_y}, L_{C_z} — главные моменты количеств движения относительно осей, движущихся поступательно вместе с центром инерции (тяжести) твердого тела, $\sum_{k=1}^{n} m(F_k^e)$ — главные моменты внешних сил относительно тех же осей.

Если осесимметричное твердое тело вращается с большой угловой скоростью ω вокруг оси симметрии, которая совпадает при отсутствии малых колебаний тела с осью x, то с точностью до величин первого порядка малости главные моменты количеств движения относительно осей координат, движущихся поступательно вместе с центром инерции твердого тела, будут

$$\left.\begin{aligned} L_{C_x} &= A\omega, \\ L_{C_y} &= A\omega\beta - B\dot{\gamma}, \\ L_{C_z} &= A\omega\gamma + B\dot{\beta}, \end{aligned}\right\} \qquad (3^*)$$

где A — момент инерции твердого тела относительно оси симметрии, B — момент инерции твердого тела относительно любой оси, перпендикулярной оси симметрии и проходящей через центр инерции тела, β — малый угол поворота оси симметрии, отсчитываемый от оси x в плоскости xy, γ — малый угол поворота оси симметрии, отсчитываемый от оси x в плоскости xz.

При изучении поперечных колебаний обычно пренебрегают малыми продольными перемещениями твердого тела, т. е. полагают координату x_C неизменной. Тогда первое уравнение (1*) отпадает. Если, кроме того, рассматривается равномерное вращение твердого тела, то отпадает и первое уравнение системы (2*).

Для решения задач о свободных колебаниях твердого тела, в которых возможны вышеуказанные допущения, может быть рекомендован следующий порядок действий:

1) выбираем две системы координат: первую систему, жестко связанную с твёрдым телом, и вторую — неподвижную систему координат;

2) применяя теорему о движении центра инерции, составляем два дифференциальных уравнения движения центра тяжести;

3) пользуясь теоремой об изменении главного момента количеств движения в относительном движении по отношению к осям, движущимся поступательно вместе с центром инерции, составляем остальные два дифференциальных уравнения малых колебаний твердого тела;

4) проинтегрировав полученную систему дифференциальных уравнений движения твердого тела, находим частоты свободных колебаний, главные колебания ротора и общее решение задачи.

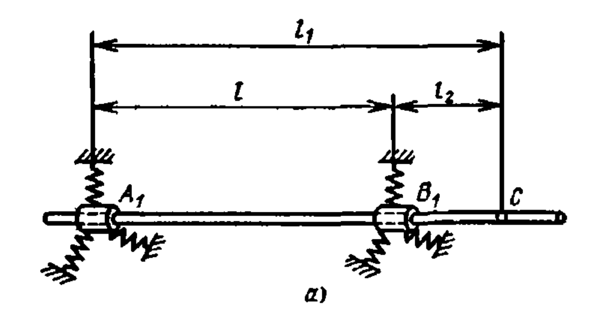
Задача 18.42. Жесткий ротор массы M вращается в двух упругих опорах A_1 и B_1. Коэффициенты жесткости левой опоры c_1,

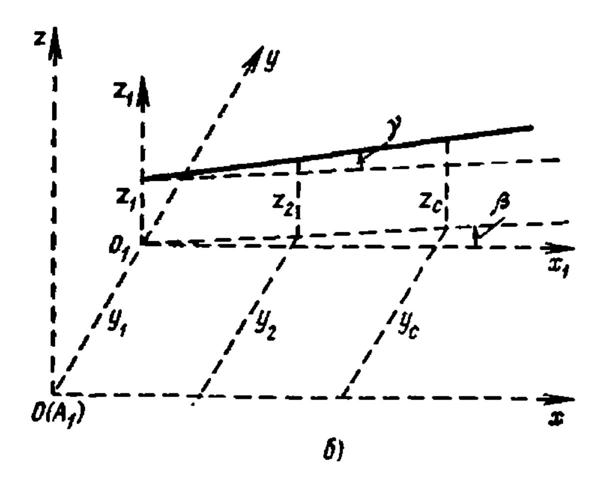
правой c_2 (рис. *а*). Расстояние между опорами равно l. Центр тяжести C ротора вместе с подшипниками находится на расстоянии l_1 от опоры A_1 и на расстоянии l_2 от опоры B_1. Ротор вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω. Момент инерции ротора относительно оси симметрии равен A, относительно оси, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через центр тяжести ротора, равен B. Найти свободные колебания ротора.

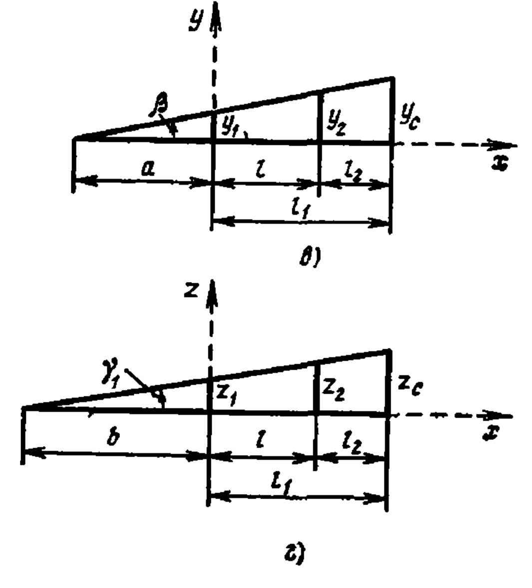
Решение. Рассмотрим малые колебания ротора около положения равновесия (равномерного вращения около горизонтальной оси). Неподвижную систему координат xyz выбираем так (рис. *б*), чтобы ее начало совпало с левой опорой в положении равновесия.

Дадим ротору произвольное перемещение (рис. *б*). Координаты левой опоры обозначим y_1, z_1, координаты правой опоры y_2, z_2, координаты центра тяжести y_C, z_C. Изменением координат x_1, x_2, x_C, как величинами более высокого порядка малости, будем пренебрегать. Угол между проекцией оси ротора на плоскость xy и осью x назовем β; угол между осью ротора и ее проекцией на плоскость xy обозначим γ.

На рис. *в*, *г*, ось ротора спроектирована на координатные плоскости xy и xz.







К задаче 18.42.

Выразим координаты центра тяжести и углы β, γ_1 через независимые координаты y_1, z_1, y_2, z_2, вполне определяющие положение ротора. Имеем на основании рис. *б*, *в* и *г*

$$y_C = -y_1 \frac{l_2}{l} + y_2 \frac{l_1}{l}, \qquad (1)$$

$$z_C = -z_1 \frac{l_2}{l} + z_2 \frac{l_1}{l}, \qquad (2)$$

$$\beta = \frac{y_2 - y_1}{l}, \qquad (3)$$

$$\gamma_1 = \frac{z_2 - z_1}{l}. \qquad (4)$$

На основании теоремы о движении центра инерции можно написать два дифференциальных уравнения

$$M\ddot{y}_C = -c_1 y_1 - c_2 y_2, \qquad (5)$$

$$M\ddot{z}_C = -c_1 z_1 - c_2 z_2, \qquad (6)$$

где в правой части стоят проекции на соответствующие оси упругих реакций пружин.

Переходим к составлению дифференциальных уравнений малых колебаний ротора вокруг осей, параллельных y, z и проведенных через центр инерции колеблющейся системы.

Главные моменты количеств движения системы с точностью до малых величин первого порядка малости включительно будут

$$L_x = A\omega, \qquad (7)$$

$$L_y = A\omega\beta - B\dot{\gamma}, \qquad (8)$$

$$L_z = A\omega\gamma + B\dot{\beta}. \qquad (9)$$

Главные моменты внешних сил относительно осей, проведенных через центр инерции, легко находятся из рис. *а*:

$$\sum m_{Cx}(F_k^e) = 0, \qquad (10)$$

$$\sum m_{Cy}(F_k^e) = -z_2 c_2 l_2 - z_1 c_1 l_1, \qquad (11)$$

$$\sum m_{Cz}(F_k^e) = y_2 c_2 l_2 + y_1 c_1 l_1. \qquad (12)$$

Используя теорему об изменении главного момента количеств движения в относительном движении по отношению к центру инерции и выражения (8)—(12), имеем

$$A\omega\dot{\beta} - B\ddot{\gamma} = -z_2 c_2 l_2 - z_1 c_1 l_1, \qquad (13)$$

$$A\omega\dot{\gamma} + B\ddot{\beta} = y_2 c_2 l_2 + y_1 c_1 l_1. \qquad (14)$$

Подставив в уравнения (5), (6), (13), (14) значения y_C, z_C, β, γ, получим для нахождения y_1, y_2, z_1, z_2 систему четырех линейных однородных дифференциальных уравнений

$$M(l_1\ddot{y}_2 - l_2\ddot{y}_1) + c_1 l y_1 + c_2 l y_2 = 0, \tag{15}$$

$$M(l_1\ddot{z}_2 - l_2\ddot{z}_1) + c_1 l z_1 + c_2 l z_2 = 0, \tag{16}$$

$$A\omega(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - B(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) + c_2 l_2 l z_2 + c_1 l_1 l z_1 = 0, \tag{17}$$

$$A\omega(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + B(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) - c_2 l_2 l y_2 - c_1 l_1 l y_1 = 0. \tag{18}$$

Частное решение этой системы будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= D_1 \sin(pt+\alpha), \\ y_2 &= D_2 \sin(pt+\alpha), \\ z_1 &= D_3 \cos(pt+\alpha), \\ z_2 &= D_4 \cos(pt+\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где D_1, D_2, D_3, D_4, p, α — постоянные, которые должны быть определены так, чтобы (19) удовлетворяло системе дифференциальных уравнений (15) — (18). Внеся (19) в (15) — (18), получим после сокращения соответственно на $\sin(pt+\alpha)$ и $\cos(pt+\alpha)$ и приведения подобных членов однородную систему четырех алгебраических уравнений относительно D_1, D_2, D_3, D_4:

$$\left.\begin{aligned} (c_1 l + M l_2 p^2) D_1 + (c_2 l - M l_1 p^2) D_2 &= 0, \\ (c_1 l + M l_2 p^2) D_3 + (c_2 l - M l_1 p^2) D_4 &= 0, \\ -A\omega p D_1 + A\omega p D_2 + (c_1 l_1 l - Bp^2) D_3 + (c_2 l_2 l + Bp^2) D_4 &= 0, \\ (Bp^2 - c_1 l_1 l) D_1 - (Bp^2 + c_2 l_2 l) D_2 + A\omega p D_3 - A\omega p D_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Легко показать, что система (20) распадается на две. Действительно, сложив и вычтя первые два и последние два уравнения, получаем

$$(c_1 l + M l_2 p^2)(D_1 + D_3) + (c_2 l - M l_1 p^2)(D_2 + D_4) = 0,$$

$$(c_1 l + M l_2 p^2)(D_1 - D_3) + (c_2 l - M l_1 p^2)(D_2 - D_4) = 0,$$

$$(Bp^2 + A\omega p - c_1 l_1 l)(D_1 + D_3) - (Bp^2 + A\omega p + c_2 l_2 l)(D_2 + D_4) = 0,$$

$$(Bp^2 - A\omega p - c_1 l_1 l)(D_1 - D_3) - (Bp^2 - A\omega p + c_2 l_2 l)(D_2 - D_4) = 0.$$

Сгруппировав уравнения, получаем систему для нахождения $D_1 + D_3$ и $D_2 + D_4$

$$\left.\begin{aligned} &(c_1 l + M l_2 p^2)(D_1 + D_3) + (c_2 l - M l_1 p^2)(D_2 + D_4) = 0, \\ &(Bp^2 + A\omega p - c_1 l_1 l)(D_1 + D_3) - \\ &\qquad - (Bp^2 + A\omega p + c_2 l_2 l)(D_2 + D_4) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

и систему для нахождения $D_1 - D_3$ и $D_2 - D_4$

$$\left.\begin{aligned} &(c_1 l + M l_2 p^2)(D_1 - D_3) + (c_2 l - M l_1 p^2)(D_2 - D_4) = 0, \\ &(Bp^2 - A\omega p - c_1 l_1 l)(D_1 - D_3) - \\ &\qquad - (Bp^2 - A\omega p + c_2 l_2 l)(D_2 - D_4) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Приравняв определители систем (21) и (22) нулю, получаем два частотных уравнения*)

$$(Bp^2 + A\omega p - c_2 l_2^2 - c_1 l_1^2)(c_1 + c_2 - Mp^2) + (c_1 l_1 + c_2 l_2)^2 = 0 \quad (23)$$

и

$$(Bp^2 - A\omega p - c_2 l_2^2 - c_1 l_1^2)(c_1 + c_2 - Mp^2) + (c_1 l_1 + c_2 l_2)^2 = 0. \quad (24)$$

Докажем, что уравнения (23) и (24) не имеют общих корней.

Предположим, что общий корень p_1 существует. Тогда при $p = p_1$ оба уравнения удовлетворяются одновременно. Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$2A\omega p_1 (c_1 + c_2 - Mp_1^2) = 0,$$

т. е. общими корнями могли бы быть

$$p_1 = 0 \text{ и } p_1 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{M}},$$

но оба эти значения не удовлетворяют исходным уравнениям. Покажем теперь, что корни частотных уравнений вещественны. Для этого рассмотрим функции

$$f_1(p) = (Bp^2 + A\omega p - c_2 l_2^2 - c_1 l_1^2)(c_1 + c_2 - Mp^2) + (c_1 l_1 + c_2 l_2)^2, \quad (25)$$

$$f_2(p) = (Bp^2 - A\omega p - c_2 l_2^2 - c_1 l_1^2)(c_1 + c_2 - Mp^2) + (c_1 l_1 + c_2 l_2)^2. \quad (26)$$

и найдем их значения для некоторых характерных значений аргумента p:

p	$f_1(p)$	$f_2(p)$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\sqrt{\frac{c_1+c_2}{M}}$	$(c_1 l_1 + c_2 l_2)^2$	$(c_1 l_1 + c_2 l_2)^2$
0	$-c_1 c_2 l^2$	$-c_1 c_2 l^2$
$+\sqrt{\frac{c_1+c_2}{M}}$	$(c_1 l_1 + c_2 l_2)^2$	$(c_1 l_1 + c_2 l_2)^2$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

*) По существу описанная операция означает разложение на множители частотного уравнения системы (20).

Из таблицы видно, что непрерывные функции $f_1(p)$ и $f_2(p)$ при изменении аргумента p от $-\infty$ до $+\infty$ четыре раза меняют знак. Вспомнив, что (23) и (24) являются уравнениями четвертой степени, можно утверждать, что каждое из уравнений (23) и (24) имеет по два отрицательных и два положительных корня, т. е. корни обоих уравнений вещественны. Отметим, что рассматриваемые корни обладают интересным свойством: отрицательные корни одного уравнения равны по абсолютной величине положительным корням другого, и наоборот.

При угловой скорости ω, равной нулю, уравнения (23) и (24) совпадают и принимают вид

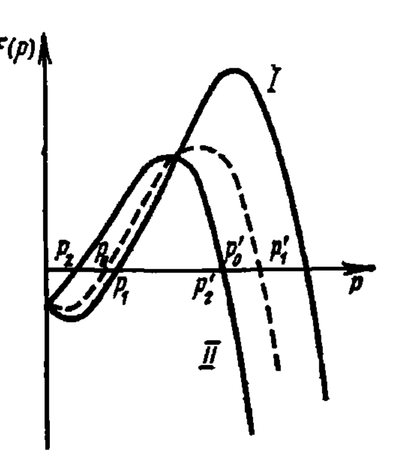
$$(Bp^2 - c_2l_2^2 - c_1l_1^2)(c_1 + c_2 - Mp^2) + (c_1l_1 + c_2l_2)^2 = 0. \tag{27}$$

Корни уравнения (27) определяют частоты свободных колебаний невращающегося ротора. На рис. *д* представлены графики функций $f_1(p)$, $f_2(p)$ и $f_0(p)$, причем через $f_0(p)$ обозначена левая часть (27).

Как видно из графика, положительные корни этих уравнений, т. е. частоты свободных колебаний ротора, располагаются в следующем порядке:

$$p_2 < p_0 < p_1 < p_2' < p_0' < p_1'. \tag{28}$$

Здесь p_0, p_0' — частоты свободных колебаний невращающегося ротора.



К задаче 18.42, *д*.

Из уравнений (21) и (22) видно, что для корней первого частотного уравнения частное решение будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= D_1 \sin(pt + \alpha), \\ z_1 &= D_1 \cos(pt + \alpha), \\ y_2 &= D_2 \sin(pt + \alpha), \\ z_2 &= D_2 \cos(pt + \alpha), \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

так как система (22) в этом случае имеет только тривиальное решение $D_1 - D_3 = 0$ и $D_2 - D_4 = 0$. Аналогично для корней второго частотного уравнения получаем

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= D_1 \sin(pt + \alpha), \\ z_1 &= -D_1 \cos(pt + \alpha), \\ y_2 &= D_2 \sin(pt + \alpha), \\ z_2 &= -D_2 \cos(pt + \alpha). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

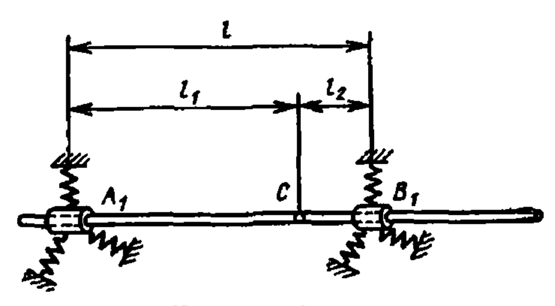
Легко проверить, что вследствие указанной выше особенности корней частотных уравнений можно ограничиться подстановкой в (29) и (30) лишь положительных корней соответствующих частотных уравнений, ибо отрицательные корни не приведут к новым линейно независимым частотным решениям.

В итоге корням p_1 и p_1' отвечают первое и второе главные колебания, при которых ось ротора описывает круговой конус, вращаясь в том же направлении, что и ротор. Эти движения называются «прямой» прецессией ротора. При «прямой» прецессии вектор угловой скорости твердого тела (при вращении вокруг оси симметрии) и вектор угловой скорости оси ротора образуют острый угол.

Корням p_2 и p_2' отвечают третье и четвертое главные колебания, при которых ось ротора описывает круговой конус, вращаясь в направлении, обратном вращению ротора.

Эти движения называются «обратной» прецессией ротора. При «обратной» прецессии вектор угловой скорости твердого тела (при вращении вокруг оси симметрии) и вектор угловой скорости оси ротора образуют тупой угол.

Таким образом, свободные колебания ротора складываются из четырех гармонических колебаний, два из которых соответствуют «прямой» прецессии и два «обратной».



К задаче 18.42, *е*.

Подчеркнем, что частоты свободных колебаний вращающегося ротора, как видно из уравнений (23) и (24), зависят от его угловой скорости.

Заметим еще, что задача решена для горизонтального ротора, центр тяжести ротора лежит вне участка между опорами. Если же центр тяжести ротора лежит между опорами (рис. *е*), то во всех уравнениях надо изменить знак перед l_2 на противоположный.

2°. **Влияние гироскопических сил на вынужденные колебания твердого тела. Самоцентрирование.** При составлении дифференциальных уравнений малых движений твердого тела можно применить теорему о движении центра инерции системы материальных точек и теорему об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек в относительном движении по отношению к центру инерции.

Указанные теоремы используются в форме п. 5° настоящего параграфа (уравнения (1*), (2*), (3*)).

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний отличаются от рассмотренных в п. 1° этого параграфа уравнений свободных колебаний наличием в правых частях возмущающих сил и их моментов. К весьма распространенной в технике категории возмущающих сил относятся силы, вызванные статической и динамической неуравновешенностью роторов.

Статическая неуравновешенность обусловливается смещением центра инерции ротора от геометрической оси вращения. Динамическая

неуравновешенность является следствием наклона главной оси инерции твердого тела по отношению к геометрической оси вращения.

При решении задач на определение вынужденных колебаний твердого тела с четырьмя степенями свободы рекомендуется следующая последовательность действий:

1) выбираем обобщенные координаты;

2) пользуясь теоремой о движении центра инерции, составляем два дифференциальных уравнения движения центра инерции твердого тела;

3) составляем выражения главного момента количеств движения системы в относительном движении по отношению к центру инерции и выражение главного момента внешних сил относительно осей, движущихся поступательно вместе с центром инерции твердого тела;

4) пользуясь теоремой об изменении главного момента количеств движения в относительном движении по отношению к центру инерции, выписываем еще два дифференциальных уравнения малых колебаний;

5) находим частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений, определяющее вынужденные колебания.

Задача 18.43 *). Горизонтальный жесткий ротор массы M вращается с постоянной угловой скоростью ω в двух упругих опорах A_1 и B_1. Опоры перемещаются в однородном упругом поле. Коэффициенты жесткости опор: левой c_1, правой c_2. Расстояние между опорами l. Расстояние от центра тяжести ротора C до опоры A_1 равно l_1, до опоры B_1 равно l_2. Далее A — момент инерции ротора относительно оси симметрии, B — момент инерции ротора относительно оси, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через его центр.

Определить вынужденные колебания ротора, вызванные его статической и динамической неуравновешенностью, если центр тяжести ротора отстоит от геометрической оси на расстоянии e, а главная ось инерции ротора, близкая к геометрической оси, образует с последней угол δ. Плоскости, проведенные через геометрическую ось и центр тяжести, а также через геометрическую ось и главную ось инерции, образуют двугранный угол, равный ε.

Найти также закон вынужденного движения ротора и определить предельные значения координат центра тяжести ротора и угла отклонения главной оси инерции от геометрической оси ротора при неограниченном увеличении угловой скорости ротора.

---

*) А. С. Кельзон, Самоцентрирование и уравновешивание жесткого ротора, вращающегося в двух упругих опорах, Доклады АН СССР, т. 110, вып. 1, 1956.

Решение. Будем исходить из дифференциальных уравнений движения ротора, полученных в предыдущей задаче:

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{y}_C &= -c_1y_1 - c_2y_2, \\ M\ddot{z}_C &= -c_1z_1 - c_2z_2, \\ A\omega\dot{\beta} - B\ddot{\gamma} &= -z_2c_2l_2 - z_1c_1l_1, \\ A\omega\dot{\gamma} + B\ddot{\beta} &= y_2c_2l_2 + y_1c_1l_1. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Если обозначить через y, z координаты точки геометрической оси ротора, лежащей на пересечении этой оси с плоскостью, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через центр тяжести ротора, то координаты центра тяжести будут:

$$\left.\begin{aligned} y_C &= y + e\cos\omega t, \\ z_C &= z + e\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Обозначим через β угол между проекцией главной центральной оси на плоскость xy и осью x. Угол между проекцией геометрической оси на плоскость xy и осью x обозначим β_2. Эти углы связаны соотношением

$$\beta = \beta_2 + \delta\cos(\omega t - \varepsilon), \qquad (3)$$

где $(\omega t - \varepsilon)$ — угол между плоскостью, в которой лежит угол δ, и плоскостью xy.

Обозначив аналогично через γ угол между проекцией главной центральной оси инерции на плоскость xz и осью x, и γ_2 угол между проекцией геометрической оси на плоскость xz и осью x, находим

$$\gamma = \gamma_2 + \delta\sin(\omega t - \varepsilon). \qquad (4)$$

Подставив найденные значения y_C, z_C, β, γ в дифференциальные уравнения движения ротора (1), имеем

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{y} + c_1y_1 + c_2y_2 &= Me\omega^2\cos\omega t, \\ M\ddot{z} + c_1z_1 + c_2z_2 &= Me\omega^2\sin\omega t, \\ A\omega\dot{\beta}_2 - B\ddot{\gamma}_2 + c_2l_2z_2 + c_1l_1z_1 &= -(B-A)\,\omega^2\delta\sin(\omega t - \varepsilon), \\ A\omega\dot{\gamma}_2 + B\ddot{\beta}_2 - c_2l_2y_2 - c_1l_1y_1 &= (B-A)\,\omega^2\delta\cos(\omega t - \varepsilon). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Правые части этих уравнений представляют возмущающие факторы, вызванные статической и динамической неуравновешенностью ротора. Использовав установленные в предыдущей задаче соотношения

$$\left.\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{y_2 - y_1}{l}, \quad y = -y_1\frac{l_2}{l} + y_2\frac{l_1}{l}, \\ \gamma_2 &= \frac{z_2 - z_1}{l}, \quad z = -z_1\frac{l_2}{l_1} + z_2\frac{l_1}{l} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

и систему уравнений (5), находим

$$\left.\begin{aligned} &M(l_1\ddot{y}_2 - l_2\ddot{y}_1) + c_1 l y_1 + c_2 l y_2 = Mel\omega^2\cos\omega t,\\ &M(l_1\ddot{z}_2 - l_2\ddot{z}_1) + c_1 l z_1 + c_2 l z_2 = Mel\omega^2\sin\omega t,\\ &A\omega(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - B(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) + c_2 l_2 l z_2 + c_1 l_1 l z_1 =\\ &\qquad = -(B-A)\,\omega^2 l\delta\sin(\omega t - \varepsilon),\\ &A\omega(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + B(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) - c_2 l_2 l y_2 - c_1 l_1 l y_1 =\\ &\qquad = (B-A)\,\omega^2 l\delta\cos(\omega t - \varepsilon). \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Полученная система линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами описывает малые колебания ротора, вызванные статической и динамической неуравновешенностью.

Решение этой системы складывается из общего решения системы без правой части и частного решения полной системы.

Общее решение системы без правой части найдено в предыдущей задаче — оно отвечает свободным колебаниям ротора.

Частное решение полной системы, которое будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t,\\ z_1 &= a_2\sin\omega t + b_2\cos\omega t,\\ y_2 &= a_3\cos\omega t + b_3\sin\omega t,\\ z_2 &= a_4\sin\omega t + b_4\cos\omega t, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

определяет искомые вынужденные колебания.

Для того чтобы найти значения постоянных a_i, b_i, подставим решение (8) в уравнения движения (7). Так как эти уравнения должны быть удовлетворены в произвольный момент времени, то необходимо раздельно приравнять нулю сумму всех членов, содержащих множителем $\cos\omega t$, и сумму всех членов, содержащих множителем $\sin\omega t$. В итоге получаем две системы алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &M\omega^2(l_2 a_1 - l_1 a_3) + c_1 l a_1 + c_2 l a_3 = Mel\omega^2,\\ &M\omega^2(l_2 a_2 - l_1 a_4) + c_1 l a_2 + c_2 l a_4 = Mel\omega^2,\\ &-A\omega^2(a_3 - a_1) + B\omega^2(a_4 - a_2) + c_2 l_2 l a_4 + c_1 l_1 l a_2 =\\ &\qquad = -(B-A)\,l\delta\omega^2\cos\varepsilon,\\ &A\omega^2(a_4 - a_2) - B\omega^2(a_3 - a_1) - c_2 l_2 l a_3 - c_1 l_1 l a_1 =\\ &\qquad = (B-A)\,l\delta\omega^2\cos\varepsilon, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &M\omega^2(l_2 b_1 - l_1 b_3) + c_1 l b_1 + c_2 l b_3 = 0,\\ &M\omega^2(l_2 b_2 - l_1 b_4) + c_1 l b_2 + c_2 l b_4 = 0,\\ &A\omega^2(b_3 - b_1) + B\omega^2(b_4 - b_2) + c_2 l_2 l b_4 + c_1 l_1 l b_2 =\\ &\qquad = (B-A)\,\delta l\omega^2\sin\varepsilon,\\ &A\omega^2(b_4 - b_2) + B\omega^2(b_3 - b_1) + c_2 l_2 l b_3 + c_1 l_1 l b_1 =\\ &\qquad = -(B-A)\,\delta l\omega^2\sin\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Из этих двух систем могут быть найдены значения всех восьми постоянных a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 так, чтобы частное решение удовлетворяло исходной системе дифференциальных уравнений.

Проще всего эти постоянные определяются, если сложить и вычесть первые два и последние два уравнения каждой системы. Тогда из первой системы получим

$$(Ml_2\omega^2 + c_1 l)(a_1 - a_2) - (Ml_1\omega^2 - c_2 l)(a_3 - a_4) = 0, \quad (11)$$

$$[(B + A)\omega^2 - c_1 l l_1](a_1 - a_2) - [(B + A)\omega^2 + c_2 l l_2](a_3 - a_4) = 0, \quad (12)$$

$$(Ml_2\omega^2 + c_1 l)(a_1 + a_2) - (Ml_1\omega^2 - c_2 l)(a_3 + a_4) = 2Mel\omega^2, \quad (13)$$

$$[(B - A)\omega^2 - c_1 l l_1](a_1 + a_2) - [(B - A)\omega^2 + c_2 l l_2](a_3 + a_4) = \\ = 2(B - A) l\delta\omega^2 \cos\varepsilon. \quad (14)$$

Аналогично из второй системы находим

$$(Ml_2\omega^2 + c_1 l)(b_1 - b_2) - (Ml_1\omega^2 - c_2 l)(b_3 - b_4) = 0, \quad (15)$$

$$[(B - A)\omega^2 - c_1 l l_1](b_1 - b_2) - [(B - A)\omega^2 + c_2 l_2 l](b_3 - b_4) = \\ = 2(B - A) l\delta\omega^2 \sin\varepsilon, \quad (16)$$

$$(Ml_2\omega^2 + c_1 l)(b_1 + b_2) - (Ml_1\omega^2 - c_2 l)(b_3 + b_4) = 0, \quad (17)$$

$$[(B + A)\omega^2 - c_1 l l_1](b_1 + b_2) - [(B + A)\omega^2 + c_2 l_2 l](b_3 + b_4) = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим совместно уравнения (11), (12), (17), (18), представляющие по существу две группы однородных уравнений относительно сумм и разностей искомых величин. Если

$$f_1(\omega) = [(B + A)\omega^2 + c_2 l l_2](Ml_2\omega^2 + c_1 l) - \\ - [(B + A)\omega^2 - c_1 l l_1](Ml_1\omega^2 - c_2 l) \neq 0, \quad (19)$$

то эти системы однородных алгебраических уравнений имеют только тривиальное решение

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_2, & b_1 &= -b_2, \\ a_3 &= a_4; & b_3 &= -b_4. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Подставив найденные значения искомых постоянных в оставшиеся уравнения (13), (14), (15), (16), получаем

$$\left. \begin{aligned} &(Ml_2\omega^2 + c_1 l) a_1 - (Ml_1\omega^2 - c_2 l) a_3 = Mel\omega^2, \\ &[(B - A)\omega^2 - c_1 l l_1] a_1 - [(B - A)\omega^2 + c_2 l_2 l] a_3 = \\ &\qquad = (B - A)\delta l\omega^2 \cos\varepsilon, \\ &(Ml_2\omega^2 + c_1 l) b_1 - (Ml_1\omega^2 - c_2 l) b_3 = 0, \\ &[(B - A)\omega^2 - c_1 l l_1] b_1 - [(B - A)\omega^2 + c_2 l_2 l] b_3 = \\ &\qquad = (B - A)\delta l\omega^2 \sin\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Теперь легко находятся все искомые величины.

Если, кроме того,

$$f_2(\omega)=[(B-A)\omega^2+c_2l_2l](Ml_2\omega^2+c_1l)-\\ -[(B-A)\omega^2-c_1ll_1](Ml_1\omega^2-c_2l)\neq 0, \quad (22)$$

то постоянные будут равны

$$a_1=\frac{1}{f_2(\omega)}\{Mel\omega^2[(B-A)\omega^2+c_2l_2l]-\\ -(Ml_1\omega^2-c_2l)(B-A)l\delta\omega^2\cos\varepsilon\}, \quad (23)$$

$$a_3=\frac{1}{f_2(\omega)}\{Mel\omega^2[(B-A)\omega^2-c_1l_1l]-\\ -(Ml_2\omega^2+c_1l)(B-A)l\delta\omega^2\cos\varepsilon\}, \quad (24)$$

$$b_1=-\frac{1}{f_2(\omega)}(Ml_1\omega^2-c_2l)(B-A)l\delta\omega^2\sin\varepsilon, \quad (25)$$

$$b_3=-\frac{1}{f_2(\omega)}(Ml_2\omega^2+c_1l)(B-A)l\delta\omega^2\sin\varepsilon. \quad (26)$$

Введя вместо постоянных a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 новые постоянные r_1, r_2, χ, ψ, связанные с ними соотношениями

$$\left.\begin{array}{ll} a_1=a_2=r_1\cos\chi, & b_1=-b_2=r_1\sin\chi, \\ a_3=a_4=r_2\cos\psi, & b_3=-b_4=r_2\sin\psi, \end{array}\right\} \quad (27)$$

перепишем уравнения (8) в виде

$$\left.\begin{array}{l} y_1=r_1\cos(\omega t-\chi), \\ z_1=r_1\sin(\omega t-\chi), \\ y_2=r_2\cos(\omega t-\psi), \\ z_2=r_2\sin(\omega t-\psi). \end{array}\right\} \quad (28)$$

На основании уравнений (28) заключаем, что вынужденные колебания ротора, вызванные его статической и динамической неуравновешенностью, представляют «прямую» прецессию с угловой скоростью ω, равной угловой скорости ротора.

Заметим, что статическая и динамическая неуравновешенность в данной системе не могут вызвать вынужденные колебания, соответствующие «обратной» прецессии ротора.

Найдем теперь предельные значения постоянных, определяемых равенствами (23)—(26) при неограниченном возрастании угловой скорости:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\omega\to\infty} a_1=l_1\delta\cos\varepsilon-e, \\ \lim\limits_{\omega\to\infty} a_3=l_2\delta\cos\varepsilon-e, \\ \lim\limits_{\omega\to\infty} b_1=l_1\delta\sin\varepsilon, \\ \lim\limits_{\omega\to\infty} b_3=l_2\delta\sin\varepsilon. \end{array}\right\} \quad (29)$$

Внеся предельные значения постоянных в уравнения (8), находим выражения координат при $\omega=\infty$:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\omega\to\infty} y_1 &= -e\cos\omega t + l_1\delta\cos(\omega t-\varepsilon),\\ \lim_{\omega\to\infty} z_1 &= -e\sin\omega t + l_1\delta\sin(\omega t-\varepsilon),\\ \lim_{\omega\to\infty} y_2 &= -e\cos\omega t + l_2\delta\cos(\omega t-\varepsilon),\\ \lim_{\omega\to\infty} z_2 &= -e\sin\omega t + l_2\delta\sin(\omega t-\varepsilon).\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Для определения предельных значений координат центра тяжести ротора и угла отклонения его главной оси инерции от геометрической оси ротора подставим предельные значения координат (30) в уравнения (2), (3), (4). Используем зависимости (6). В итоге получаем

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\omega\to\infty} y_C &= 0, & \lim_{\omega\to\infty} z_C &= 0,\\ \lim_{\omega\to\infty} \beta &= 0, & \lim_{\omega\to\infty} \gamma &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Следовательно, при неограниченном увеличении угловой скорости вращения неуравновешенный статически и динамически ротор стремится совместить ось вращения с главной центральной осью инерции. При неограниченном увеличении угловой скорости жесткий ротор, вращающийся в двух упругих опорах, располагается так, что устраняется его статическая и динамическая неуравновешенности.

Ротор с четырьмя степенями свободы (не считая вращения вокруг оси) обладает замечательным свойством самоцентрирования. Это свойство находит широкое применение при конструировании современных высокооборотных машин.

Задача 18.44. В условиях предыдущей задачи определить критические угловые скорости ротора (при отсутствии сил трения).

Критическими называются значения угловых скоростей ротора, при которых амплитуды вынужденных колебаний неограниченно возрастают.

Решение. Как следует из уравнений (8) предыдущей задачи, координаты точек ротора неограниченно возрастают одновременно с коэффициентами a_i, b_i.

Из равенств (23) — (26) видно, что это будет при

$$f_2(\omega)=[(B-A)\omega^2+c_2l_2l](Ml_2\omega^2+c_1l)-\\ -[(B-A)\omega^2-c_1ll_1](Ml_1\omega^2-c_2l)=0. \quad (1)$$

Представим функцию $f_2(\omega)$ в виде

$$f_2(\omega)=(B-A)\omega^2l[c_1+c_2-M\omega^2]+Ml\omega^2(c_1l_1^2+c_2l_2^2)-c_1c_2l^3 \quad (2)$$

и исследуем ее. Для этого для значений ω, равных 0, $\sqrt{\frac{c_1+c_2}{M}}$, ∞,

находим значения $f_2(\omega)$. При этом следует различать два случая: $B>A$ и $A>B$.

Результаты вычислений сведем в таблицу:

ω	$B>A$	$A>B$
	$f_2(\omega)$	$f_2(\omega)$
0	$-c_1c_2l^3$	$-c_1c_2l^3$
$\sqrt{\frac{c_1+c_2}{M}}$	$l(c_1l_1+c_2l_2)^2$	$l(c_1l_1-c_2l_2)^2$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Из таблицы видно, что при $B>A$ уравнение (1) имеет два положительных вещественных корня ω_1 и ω_2, т. е. что резонанс наступает при этих двух значениях угловой скорости ротора. В этом случае имеется два значения критической угловой скорости, причем $\omega_1<\sqrt{\frac{c_1+c_2}{M}}<\omega_2$.

Во втором случае, при $A>B$, уравнение (1) имеет один положительный вещественный корень ω_1, т. е. у ротора одна критическая угловая скорость, причем $\omega_1<\sqrt{\frac{c_1+c_2}{M}}$.

Упомянутые критические угловые скорости жесткого ротора в двух упругих опорах определяются как корни биквадратного уравнения (1)

$$\omega_{1,2}=\sqrt{\frac{R_1\pm\sqrt{R_1^2-4M(B-A)c_1c_2l^2}}{2M(B-A)}}, \tag{3}$$

где

$$R_1=(c_1+c_2)(B-A)+M(c_1l_1^2+c_2l_2^2).$$

При $A=0$ формула (3) дает значение критической угловой скорости без учета гироскопического эффекта.

До сих пор при определении вынужденных колебаний ротора мы предполагали, что $f_1(\omega)\neq 0$. Рассмотрим теперь особый случай, когда

$$f_1(\omega)=0. \tag{4}$$

Найдем разность

$$f_1(\omega)-f_2(\omega)=2A\omega^2l(c_1+c_2-M\omega^2). \tag{5}$$

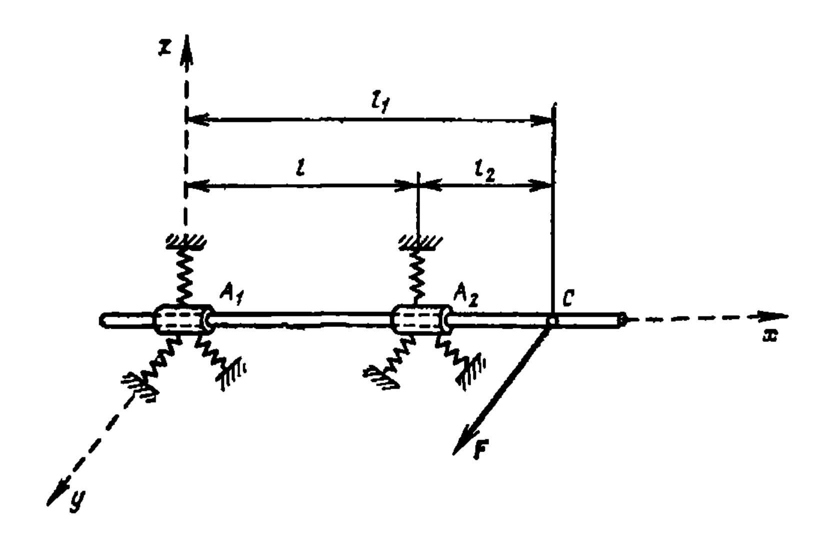
Из (5) следует, что при условии (4) функция $f_2(\omega)$ не обращается в нуль, если $c_1+c_2\neq M\omega^2$ и $\omega\neq 0$. Найденные в предыдущей задаче значения a_i, b_i и при условии (4) удовлетворяют исходным дифференциальным уравнениям движения. Значит, в этом случае мы имеем

те же резонансные колебания и критические угловые скорости, которые уже определены уравнением (3). На этом основании можно заключить, что при воздействии на ротор возмущающих сил, вызванных его статической и динамической неуравновешенностью резонансных колебаний, соответствующих обращению в нуль, функции $f_1(\omega)$ возникнуть не могут. Однако при действии других возмущающих сил, изменяющихся с частотой, равной угловой скорости ротора ω, резонансные колебания, соответствующие обращению в нуль $f_1(\omega)$, могут возникнуть. Доказательство этого утверждения приводится в следующей задаче.

Задача 18.45. В условиях задачи 18.43 определить критические угловые скорости ротора, если возмущающая сила равна

$$F = F_0 \cos \omega t.$$

Возмущающая сила с постоянной амплитудой приложена в центре тяжести ротора и сохраняет неизменное направление, параллельное оси y.



К задаче 18.45.

Решение. Дифференциальные уравнения движения ротора будут (см. уравнения (5), (6), (13), (14) задачи 18.42)

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{y}_C + c_1 y_1 + c_2 y_2 &= F_0 \cos \omega t, \\ M\ddot{z}_C + c_1 z_1 + c_2 z_2 &= 0, \\ A\omega\dot{\beta} - B\ddot{\gamma} + c_2 l_2 z_2 + c_1 l_1 z_1 &= 0, \\ A\omega\dot{\gamma} + B\ddot{\beta} - c_2 l_2 y_2 - c_1 l_1 y_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Подставив выражения для y_C, z_C, β, γ (см. уравнения (1)—(4) задачи 18.42) в эти уравнения, находим

$$\left.\begin{aligned} M(l_1\ddot{y}_2-l_2\ddot{y}_1)+c_1ly_1+c_2ly_2&=F_0l\cos\omega t,\\ M(l_1\ddot{z}_2-l_2\ddot{z}_1)+c_1lz_1+c_2lz_2&=0,\\ A\omega(\dot{y}_2-\dot{y}_1)-B(\ddot{z}_2-\ddot{z}_1)+c_2l_2lz_2+c_1l_1lz_1&=0,\\ A\omega(\dot{z}_2-\dot{z}_1)+B(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1)-c_2l_2ly_2-c_1l_1ly_1&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Решение этой системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами складывается из общего решения системы без правой части и частного решения полной системы.

Общее решение системы без правой части уже найдено, — это уравнение свободных колебаний ротора (см. задачу 18.42).

Частное решение полной системы, определяющее вынужденные колебания ротора, будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned} y_1&=a_1\cos\omega t, & z_1&=a_2\sin\omega t,\\ y_2&=a_3\cos\omega t, & z_2&=a_4\sin\omega t.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Подставив (3) в дифференциальные уравнения движения (2) и сократив соответственно на $\sin\omega t$ или $\cos\omega t$, получаем систему алгебраических уравнений для определения постоянных a_1, a_2, a_3, a_4

$$\left.\begin{aligned} (c_1l+Ml_2\omega^2)a_1+(c_2l-Ml_1\omega^2)a_3&=F_0l,\\ (c_1l+Ml_2\omega^2)a_2+(c_2l-Ml_1\omega^2)a_4&=0,\\ A\omega^2a_1-A\omega^2a_3+(c_1l_1l-B\omega^2)a_2+(c_2l_2l+B\omega^2)a_4&=0,\\ A\omega^2a_4-A\omega^2a_2-(c_1l_1l-B\omega^2)a_1-(c_2l_2l+B\omega^2)a_3&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Сложив и вычтя первые два и последние два уравнения, находим

$$\left.\begin{aligned} (c_1l+Ml_2\omega^2)(a_1+a_2)+(c_2l-Ml_1\omega^2)(a_3+a_4)&=F_0l,\\ [(B-A)\omega^2-c_1l_1l](a_1+a_2)-[(B-A)\omega^2+c_2l_2l](a_3+a_4)&=0,\\ (c_1l+Ml_2\omega^2)(a_1-a_2)+(c_2l-Ml_1\omega^2)(a_3-a_4)&=F_0l,\\ [(B+A)\omega^2-c_1l_1l](a_1-a_2)-[(B+A)\omega^2+c_2l_2l](a_3-a_4)&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Из этих уравнений получаем

$$a_1+a_2=\frac{F_0l\,[(B-A)\,\omega^2+c_2l_2l]}{f_2(\omega)},$$

$$a_3+a_4=\frac{F_0l\,[(B-A)\,\omega^2-c_1l_1l]}{f_2(\omega)},$$

$$a_1-a_2=\frac{F_0l\,[(B+A)\,\omega^2+c_2l_2l]}{f_1(\omega)},$$

$$a_3-a_4=\frac{F_0l\,[(B+A)\,\omega^2-c_1l_1l]}{f_1(\omega)},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}
a_1&=\frac{F_0l\,[(B-A)\,\omega^2+c_2l_2l]}{2f_2(\omega)}+\frac{F_0l\,[(B+A)\,\omega^2+c_2l_2l]}{2f_1(\omega)},\\
a_2&=\frac{F_0l\,[(B-A)\,\omega^2+c_2l_2l]}{2f_2(\omega)}-\frac{F_0l\,[(B+A)\,\omega^2+c_2l_2l]}{2f_1(\omega)},\\
a_3&=\frac{F_0l\,[(B-A)\,\omega^2-c_1l_1l]}{2f_2(\omega)}+\frac{F_0l\,[(B+A)\,\omega^2-c_1l_1l]}{2f_1(\omega)},\\
a_4&=\frac{F_0l\,[(B-A)\,\omega^2-c_1l_1l]}{2f_2(\omega)}-\frac{F_0l\,[(B+A)\,\omega^2-c_1l_1l]}{2f_1(\omega)}.
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Формулы (6) показывают, что a_1, a_2, a_3, a_4 неограниченно возрастают, когда $f_1(\omega)$ приближается к нулю. При решении предыдущей задачи было установлено, что $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ не имеют общих корней. Следовательно, когда $f_1(\omega)\to 0$, то $f_2(\omega)$ принимает отличное от нуля значение. Поэтому при малых $f_1(\omega)$ первые слагаемые в формулах (6) пренебрежимо малы по сравнению со вторыми.

Следовательно, для приближенного определения постоянных можно в (6) отбросить первые части. Тогда

$$\left.\begin{aligned}
a_1&=-a_2,\\
a_3&=-a_4.
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Поэтому уравнения движения точек ротора, совпадающих с центрами нижней и верхней опор, будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
y_1&=a_1\cos\omega t, & y_2&=a_3\cos\omega t,\\
z_1&=-a_1\sin\omega t, & z_2&=-a_3\sin\omega t.
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Из уравнений (8) видно, что характер колебаний, вызываемых силой F вблизи резонанса при соответствующей критической угловой скорости, определяемой из уравнения $f_1(\omega)=0$, отвечает синхронной «обратной» прецессии ротора.

Значения критических угловых скоростей «обратной» прецессии находятся из уравнения (см. задачу 18.43)

$$\begin{aligned}
f_1(\omega)=[(B+A)\,\omega^2+c_2ll_2]\,(Ml_2\omega^2+c_1l)\,-&\\
-\,[(B+A)\,\omega^2-c_1ll_1]\,(Ml_1\omega^2-c_2l)&=0,
\end{aligned}\tag{9}$$

откуда

$$\omega_{3,4}=\sqrt{\frac{R_2\pm\sqrt{R_2^2-4M\,(B+A)\,c_1c_2l^2}}{2M\,(B+A)}},$$

где

$$R_2=(c_1+c_2)(B+A)+M\,(c_1l_1^2+c_2l_2^2),$$

причем эти значения всегда вещественны.

Таким образом, при действии возмущающей силы постоянного направления, изменяющейся по синусоидальному закону с частотой,

равной угловой скорости ротора, существуют четыре или три критические угловые скорости ротора (в зависимости от соотношения моментов инерции A и B).

3°. Влияние гироскопических сил на вынужденные колебания при резонансе. Дифференциальные уравнения движения твердого тела составляются в соответствии с общими правилами, указанными в § 4, 6, 9, 10 настоящей главы.

При решении задач на определение вынужденных колебаний твердого тела при резонансе рекомендуется следующий порядок действий:

1) выбираем обобщенные координаты;

2) пользуясь уравнениями Лагранжа или общими теоремами динамики, составляем дифференциальные уравнения движения твердого тела;

3) находим собственные частоты из задачи о свободных колебаниях тела и критические скорости, исходя из задачи о вынужденных колебаниях твердого тела;

4) для случая резонанса находим частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнеиий движения и, прибавляя к нему общее решение однородной системы, получаем искомое общее решение задачи.

Задача 18.46. В условиях задачи 18.43 определить вынужденные колебания жесткого вала, вращающегося в двух упругих опорах, при резонансе. Центр тяжести вала лежит между опорами.

Решение. Дифференциальные уравнения малых колебаний статически и динамически неуравновешенного вала были получены в задаче 18.42. В случае, когда центр тяжести лежит между опорами, уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&M(l_1\ddot{y}_2+l_2\ddot{y}_1)+c_1ly_1+c_2ly_2=Mel\omega^2\cos\omega t,\\
&M(l_1\ddot{z}_2+l_2\ddot{z}_1)+c_1lz_1+c_2lz_2=Mel\omega^2\sin\omega t,\\
&A\omega(\dot{y}_2-\dot{y}_1)-B(\ddot{z}_2-\ddot{z}_1)-c_2l_2lz_2+c_1l_1lz_1=\\
&\qquad\qquad=-(B-A)\,\omega^2l\delta\sin(\omega t-\varepsilon),\\
&A\omega(\dot{z}_2-\dot{z}_1)+B(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1)+c_2l_2ly_2-c_1l_1ly_1=\\
&\qquad\qquad=(B-A)\,\omega^2l\delta\cos(\omega t-\varepsilon).
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Решение этой задачи для любого значения угловой скорости ω, при котором

$$\Delta(\omega)=[(B-A)\,\omega^2-c_2l_2l\,](c_1l-Ml_2\omega^2)+\\ +[(B-A)\,\omega^2-c_1l_1l](c_2l-Ml_1\omega^2)\neq 0 \tag{2}$$

было получено. Ось вала описывает в этом случае поверхность конуса, вращаясь в ту же сторону, что и вал, с угловой скоростью вала. Рассмотрим случай резонанса, полагая, что вал вращается

с критической угловой скоростью, при которой определитель (2) обращается в нуль:

$$\Delta(\omega) = 0. \tag{3}$$

Будем искать частное решение системы (1) в виде

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= (a_1 + h_1 t)\cos\omega t + (b_1 + d_1 t)\sin\omega t,\\ z_1 &= (a_2 + h_2 t)\sin\omega t + (b_2 + d_2 t)\cos\omega t,\\ y_2 &= (a_3 + h_3 t)\cos\omega t + (b_3 + d_3 t)\sin\omega t,\\ z_2 &= (a_4 + h_4 t)\sin\omega t + (b_4 + d_4 t)\cos\omega t. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Подставляем эти функции и их производные в систему (1). В полученных уравнениях, которые должны быть справедливы в любой момент времени, приравняем коэффициенты соответственно при $\cos\omega t$, $\sin\omega t$, $t\cos\omega t$ и $t\sin\omega t$ в левой и правой частях каждого из четырех уравнений (1).

Тогда находим шестнадцать алгебраических уравнений с шестнадцатью неизвестными (a_i, b_i, h_i, d_i), которые разбиваются на две системы (5) и (6), каждая из восьми уравнений с восемью неизвестными. Первая система уравнений:

$$(c_1 l - Ml_2\omega^2)a_1 + (c_2 l - Ml_1\omega^2)a_3 + 2Ml_2\omega d_1 + 2Ml_1\omega d_3 = Mel\omega^2, \tag{5.1}$$

$$(c_1 l - Ml_2\omega^2)d_1 + (c_2 l - Ml_1\omega^2)d_3 = 0, \tag{5.2}$$

$$(c_1 l - Ml_2\omega^2)a_2 + (c_2 l - Ml_1\omega^2)a_4 - 2Ml_2\omega d_2 - 2Ml_1\omega d_4 = Mel\omega^2, \tag{5.3}$$

$$(c_1 l - Ml_2\omega^2)d_2 + (c_2 l - Ml_1\omega^2)d_4 = 0, \tag{5.4}$$

$$\begin{gathered} A\omega^2 a_1 + (c_1 l_1 l - B\omega^2)a_2 - A\omega^2 a_3 + (B\omega^2 - c_2 l_2 l)a_4 - A\omega d_1 - \\ - 2B\omega d_2 + A\omega d_3 + 2B\omega d_4 = -(B - A)\omega^2 l\delta\cos\varepsilon, \end{gathered} \tag{5.5}$$

$$-A\omega^2 d_1 + (c_1 l_1 l - B\omega^2)d_2 + A\omega^2 d_3 + (B\omega^2 - c_2 l_2 l)d_4 = 0, \tag{5.6}$$

$$(B\omega^2 - c_1 l_1 l)d_1 + A\omega^2 d_2 + (c_2 l_2 l - B\omega^2)d_3 - A\omega^2 d_4 = 0, \tag{5.7}$$

$$\begin{gathered} (B\omega^2 - c_1 l_1 l)a_1 - A\omega^2 a_2 + (c_2 l_2 l - B\omega^2)a_3 + A\omega^2 a_4 - \\ - 2B\omega d_1 - A\omega d_2 + 2B\omega d_3 + A\omega d_4 = (B - A)\omega^2 l\delta\cos\varepsilon. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Вторая система уравнений:

$$(c_1 l - Ml_2\omega^2)b_1 + (c_2 l - Ml_1\omega^2)b_3 - 2Ml_1\omega h_3 - 2Ml_2\omega h_1 = 0, \tag{6.1}$$

$$(c_2 l - Ml_1\omega^2)h_3 + (c_1 l - Ml_2\omega^2)h_1 = 0, \tag{6.2}$$

$$(c_1 l - Ml_2\omega^2)b_2 + (c_2 l - Ml_1\omega^2)b_4 + 2Ml_2\omega h_2 + 2Ml_1\omega h_4 = 0, \tag{6.3}$$

$$(c_1 l - Ml_2\omega^2)h_2 + (c_2 l - Ml_1\omega^2)h_4 = 0, \tag{6.4}$$

$$\begin{gathered} -A\omega^2 b_1 + (c_1 l_1 l - B\omega^2)b_2 + A\omega^2 b_3 - (c_2 l_2 l - B\omega^2)b_4 - A\omega h_1 + \\ + 2B\omega h_2 + A\omega h_3 - 2B\omega h_4 = (B - A)\omega^2 l\delta\sin\varepsilon, \end{gathered} \tag{6.5}$$

$$A\omega^2 h_1 + (c_1 l_1 l - B\omega^2)h_2 - A\omega^2 h_3 - (c_2 l_2 l - B\omega^2)h_4 = 0, \tag{6.6}$$

$$\begin{gathered} -(c_1 l_1 l - B\omega^2)b_1 + A\omega^2 b_2 + (c_2 l_2 l - B\omega^2)b_3 - A\omega^2 b_4 + 2B\omega h_1 - \\ - A\omega h_2 - 2B\omega h_3 + A\omega h_4 = (B - A)\omega^2 l\delta\sin\varepsilon, \end{gathered} \tag{6.7}$$

$$-(c_1 l_1 l - B\omega^2)h_1 - A\omega^2 h_2 + (c_2 l_2 l - B\omega^2)h_3 + A\omega^2 h_4 = 0. \tag{6.8}$$

Рассмотрим вначале систему (5). Сложим и вычтем попарно уравнения (5.1) и (5.3); (5.2) и (5.4); (5.5) и (5.8); (5.6) и (5.7). Получим снова восемь уравнений, но они разобьются на две системы по четыре уравнения с четырьмя неизвестными каждая:

$$\left.\begin{aligned}
&(c_1l - Ml_2\omega^2)(a_1+a_2)+(c_2l - Ml_1\omega^2)(a_3+a_4)+\\
&\qquad +2Ml_2\omega(d_1-d_2)+2Ml_1\omega(d_3-d_4)=2Mel\omega^2,\\
&(c_1l - Ml_2\omega^2)(d_1-d_2)+(c_2l - Ml_1\omega^2)(d_3-d_4)=0,\\
&[(B-A)\omega^2 - c_1l_1l](a_1+a_2)+[c_2l_2l-(B-A)\omega^2](a_3+a_4)+\\
&+(A-2B)\omega(d_1-d_2)+(2B-A)\omega(d_3-d_4)=\\
&\qquad =2(B-A)\omega^2l\delta\cos\varepsilon,\\
&[(B-A)\omega^2 - c_1l_1l](d_1-d_2)+[c_2l_2l-(B-A)\omega^2](d_3-d_4)=0,
\end{aligned}\right\}\quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&(c_1l - Ml_2\omega^2)(a_1-a_2)+(c_2l - Ml_1\omega^2)(a_3-a_4)+\\
&\qquad +2Ml_2\omega(d_1+d_2)+2Ml_1\omega(d_3+d_4)=0,\\
&(c_1l - Ml_2\omega^2)(d_1+d_2)+(c_2l - Ml_1\omega^2)(d_3+d_4)=0,\\
&[(B+A)\omega^2 - c_1l_1l](a_1-a_2)+[c_2l_2l-(B+A)\omega^2](a_3-a_4)-\\
&\qquad -(2B+A)\omega(d_1+d_2)+(2B+A)\omega(d_3+d_4)=0,\\
&[c_1l_1l-(B+A)\omega^2](d_1+d_2)+\\
&\qquad +[(B+A)\omega^2-c_2l_2l](d_3+d_4)=0.
\end{aligned}\right\}\quad (8)$$

Однородная система (8) имеет определитель

$$\Delta_{(8)} = \begin{vmatrix}
c_1l-Ml_2\omega^2 & c_2l-Ml_1\omega^2 & 2Ml_2\omega & 2Ml_1\omega\\
0 & 0 & (c_1l-Ml_2\omega^2) & (c_2l-Ml_1\omega^2)\\
-[c_1l_1l-(B+A)\omega^2] & [c_2l_2l-(B+A)\omega^2] & -(2B+A)\omega & (2B+A)\omega\\
0 & 0 & [c_1l_1l-(B+A)\omega^2] & -[c_2l_2l-(B+A)\omega^2]
\end{vmatrix} =$$
$$=\{[c_1l_1l-(B+A)\omega^2](c_2l-Ml_1\omega^2)+[c_2l_2l-(B+A)\omega^2](c_1l-Ml_2\omega^2)\}^2.$$

Этот определитель не обращается в нуль при значениях угловой скорости, соответствующих уравнению (3).

Действительно, можно показать, что уравнения

$$f_1(\omega)=[c_1l_1l-(B-A)\omega^2](c_2l-Ml_1\omega^2)+$$
$$+[c_2l_2l-(B-A)\omega^2](c_1l-Ml_2\omega^2)=0$$

и

$$f_2(\omega)=[c_1l_1l-(B+A)\omega^2](c_2l-Ml_1\omega^2)+$$
$$+[c_2l_2l-(B+A)\omega^2](c_1l-Ml_2\omega^2)=0$$

не имеют общих корней. Для этого достаточно вычесть одно уравнение из другого. Тогда значение ω, обращающее по условию в нуль $f_1(\omega)$, соответственно приводит к $\Delta_{(8)} \neq 0$.

Следовательно, система (8) имеет нулевое решение

$$a_1-a_2=0,\quad a_3-a_4=0,\quad d_1+d_2=0,\quad d_3+d_4=0,$$

или $a_1 = a_2$; $a_3 = a_4$; $d_1 = -d_2$; $d_3 = -d_4$. Тогда система (7) может быть переписана в следующем виде:

$$(c_1 l - M l_2 \omega^2)\, a_1 + (c_2 l - M l_1 \omega^2)\, a_3 + 2 M l_2 \omega d_1 + 2 M l_1 \omega d_3 = M e l \omega^2, \quad (9.1)$$

$$(c_1 l - M l_2 \omega^2)\, d_1 + (c_2 l - M l_1 \omega^2)\, d_3 = 0, \quad (9.2)$$

$$[(B - A)\,\omega^2 - c_1 l_1 l]\, a_1 + [c_2 l_2 l - (B - A)\,\omega^2]\, a_3 + (A - 2B)\,\omega d_1 + (2B - A)\,\omega d_3 = (B - A)\,\omega^2 l \delta \cos \varepsilon, \quad (9.3)$$

$$[(B - A)\,\omega^2 - c_1 l_1 l]\, d_1 + [c_2 l_2 l - (B - A)\,\omega^2]\, d_3 = 0. \quad (9.4)$$

Уравнения (9.2) и (9.4) в силу (3) имеют пропорциональные коэффициенты. Действительно, представим (3) в развернутом виде:

$$[(B - A)\,\omega^2 - c_2 l_2 l]\,(c_1 l - M l_2 \omega^2) + [(B - A)\,\omega^2 - c_1 l_1 l]\,(c_2 l - M l_1 \omega^2) = 0.$$

Если ни одна из скобок в этом уравнении не обращается в нуль, (случай обращения в нуль будет рассмотрен особо), то можно записать

$$\frac{c_2 l_2 l - (B - A)\,\omega^2}{c_1 l_1 l - (B - A)\,\omega^2} = -\frac{c_2 l - M l_1 \omega^2}{c_1 l - M l_2 \omega^2} = k. \quad (10)$$

При таком обозначении система (9) может быть переписана в таком виде:

$$(c_1 l - M l_2 \omega^2)(a_1 - k a_3) + 2 M l_2 \omega d_1 + 2 M l_1 \omega d_3 = M e l \omega^2, \quad (11.1)$$

$$\frac{d_1}{d_3} = k, \quad (11.2)$$

$$-[c_1 l_1 l - (B - A)\,\omega^2](a_1 - k a_3) + (A - 2B)\,\omega d_1 + (2B - A)\,\omega d_3 = (B - A)\,\omega^2 l \delta \cos \varepsilon, \quad (11.3)$$

$$\frac{d_1}{d_3} = k. \quad (11.4)$$

Равенства (11.2) и (11.4) идентичны. С их учетом остальные два уравнения могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} &(c_1 l - M l_2 \omega^2)(a_1 - k a_3) + (2 M l_1 \omega + 2 M l_2 \omega k)\, d_3 = M e l \omega^2, \\ &-[c_1 l_1 l - (B - A)\,\omega^2](a_1 - k a_3) + (2B - A)\,\omega (1 - k)\, d_3 = \\ &\qquad = (B - A)\,\omega^2 l \delta \cos \varepsilon. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Неизвестное $(a_1 - k a_3)$ содержит коэффициенты тех слагаемых вынужденных колебаний вала, которые не возрастают со временем. Исключив $a_1 - k a_3$ из системы (12), находим

$$\left.\begin{aligned} d_3 &= \frac{Me\,[c_1 l_1 l - (B - A)\,\omega^2] + (c_1 l - M l_2 \omega^2)(B - A)\,\delta \cos \varepsilon}{(2B - A)(c_1 + c_2 - M\omega^2) + 2M\,[c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 - (B - A)\,\omega^2]}\,\omega, \\ d_1 &= \frac{Me\,[c_2 l_2 l - (B - A)\,\omega^2] - (c_2 l - M l_1 \omega^2)(B - A)\,\delta \cos \varepsilon}{(2B - A)(c_1 + c_2 - M\omega^2) + 2M\,[c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 - (B - A)\,\omega^2]}\,\omega. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Если переписать (3) в виде

$$\frac{c_2 l_2 l-(B-A)\,\omega^2}{-(c_2 l-Ml_1\omega^2)}=\frac{c_1 l_1 l-(B-A)\,\omega^2}{c_1 l-Ml_2\omega^2}=k_1 \qquad (14)$$

и обозначить для краткости знаменатель в (13) через

$$L=(2B-A)(c_1+c_2-M\omega^2)+2M\,[c_1 l_1^2+c_2 l_2^2-(B-A)\,\omega^2], \qquad (15)$$

то формулы (13) примут вид

$$\left.\begin{aligned} d_3&=\frac{(c_1 l-Ml_2\omega^2)}{L}\,[k_1 Me+(B-A)\,\delta\cos\varepsilon]\cdot\omega,\\ d_1&=\frac{(c_2 l-Ml_1\omega^2)}{L}\,[k_1 Me+(B-A)\,\delta\cos\varepsilon]\cdot\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Рассмотрим далее систему (6). Совершенно аналогичным путем находим

$$b_1=-b_2,\quad b_3=-b_4.$$

$$h_1=h_2=\frac{\omega\,(B-A)\,\delta\sin\varepsilon\,(c_2 l-Ml_1\omega^2)}{(2B-A)(c_1+c_2-M\omega^2)+2M\,[c_1 l_1^2+c_2 l_2^2-(B-A)\,\omega^2]},$$

$$h_3=h_4=\frac{\omega\,(B-A)\,\delta\sin\varepsilon\,(c_1 l-Ml_2\omega^2)}{(2B-A)(c_1+c_2-M\omega^2)+2M\,[c_1 l_1^2+c_2 l_2^2-(B-A)\,\omega^2]},$$

или, с учетом обозначения (15),

$$\left.\begin{aligned} h_1&=\frac{\omega\,(c_2 l-Ml_1\omega^2)}{L}\,(B-A)\,\delta\sin\varepsilon,\\ h_3&=-\frac{\omega\,(c_1 l-Ml_2\omega^2)}{L}\,(B-A)\,\delta\sin\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Тогда, резонансные слагаемые решения (4), определяющие члены, возрастающие с течением времени, будут

$$\left.\begin{aligned} y_1&=(h_1\cos\omega t+d_1\sin\omega t)\cdot t,\\ z_1&=(h_1\sin\omega t-d_1\cos\omega t)\cdot t,\\ y_2&=(h_3\cos\omega t+d_3\sin\omega t)\cdot t,\\ z_2&=(h_3\sin\omega t-d_3\cos\omega t)\cdot t. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Если ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned} h_1&=H_1\cos\alpha_1, & h_3&=H_2\cos\alpha_2,\\ d_1&=H_1\sin\alpha_1, & d_3&=H_2\sin\alpha_2, \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

то уравнения движения (18) запишутся в виде

$$y_1=H_1 t\cos(\omega t-\alpha_1),\quad z_1=H_1 t\sin(\omega t-\alpha_1),$$
$$y_2=H_2 t\cos(\omega t-\alpha_2),\quad z_2=H_2 t\sin(\omega t-\alpha_2).$$

Угол сдвига фаз определяется из равенств

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{d_1}{h_1} = -\frac{k_1 Me + (B-A)\,\delta\cos\varepsilon}{(B-A)\,\delta\sin\varepsilon},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{d_3}{h_3} = -\frac{k_1 Me + (B-A)\,\delta\cos\varepsilon}{(B-A)\,\delta\sin\varepsilon}.$$

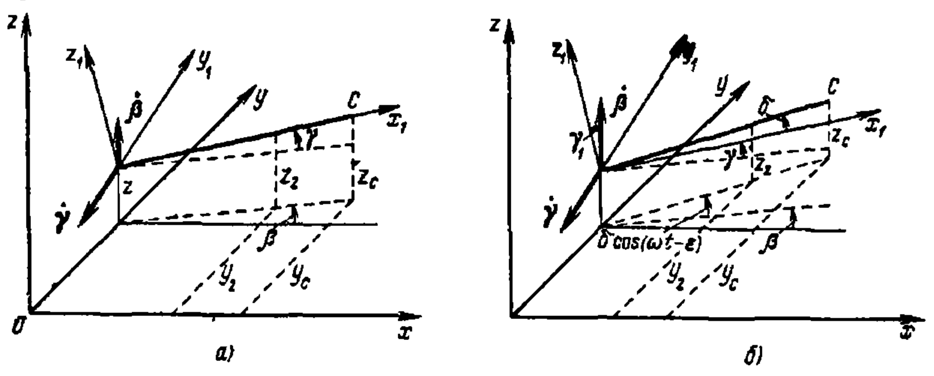
Отсюда следует, что

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Ось вала описывает при резонансе усеченную коническую поверхность с угловой скоростью, равной угловой скорости вала, причем оба радиуса оснований неограниченно возрастают с течением времени.

4°. Применение уравнений Лагранжа в обобщенных координатах к составлению дифференциальных уравнений свободных и вынужденных колебаний вращающегося вала. В пп. 1° и 3° этого параграфа дифференциальные уравнения свободных и вынужденных колебаний вращающегося вала были выведены с помощью теоремы о движении центра инерции системы и теоремы об изменении главного момента количеств движения системы. Покажем, что эти же уравнения могут быть получены применением уравнений Лагранжа в обобщенных координатах.

Задача 18.47. В условиях задачи 18.42 определить дифференциальные уравнения свободных колебаний при помощи уравнений Лагранжа в обобщенных координатах.



К задаче 18.47.

Решение. Выберем неподвижные оси с началом в центре левого подшипника в положении статического равновесия. Ось x направим вдоль оси вала вправо, ось z — вертикально вверх, ось y — так, чтобы система осей была правой. Кроме неподвижной системы осей координат, возьмем подвижные оси x_1, y_1, z_1, совпадающие с главными центральными осями инерции вала и перемещающиеся вместе с ним.

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 (y_1^2 + z_1^2) + \frac{1}{2} c_2 (y_2^2 + z_2^2), \qquad (1)$$

где, согласно условиям задачи 18.41, введены обозначения: y_1, z_1, y_2, z_2 — координаты соответственно левой и правой опор, которые выбираем за обобщенные координаты, c_1, c_2 — коэффициент жесткости левой и правой опор.

Кинетическая энергия вала, согласно теореме Кенига, равна сумме кинетической энергии центра инерции вала, считая в нем сосредоточенной всю массу системы, и кинетической энергии вала в его относительном движении вокруг центра инерции

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{1}{2} A\omega_{x1}^2 + \frac{1}{2} B (\omega_{y1}^2 + \omega_{z1}^2). \qquad (2)$$

Здесь ω_{x1}, ω_{y1}, ω_{z1} — проекции угловой скорости вала на подвижные оси координат. Заметив, что угловая скорость вала состоит из трех составляющих: ω — угловой скорости собственного вращения вала, направленной по оси x_1, $\dot{\beta}$ — направленной по оси z, $\dot{\gamma}$ — направленной по оси y_1, с точностью до величин второго порядка малости включительно и с учетом знаков проекций, находим

$$\omega_{x1} = \omega + \dot{\beta} \sin\gamma \approx \omega + \dot{\beta}\gamma, \qquad (3)$$

$$\omega_{y1} = -\dot{\gamma}, \qquad (4)$$

$$\omega_{z1} = \dot{\beta} \cos\gamma \approx \dot{\beta}. \qquad (5)$$

Подставив эти значения в выражение кинетической энергии вала и заменив y_C, z_C, β, γ их выражениями (см. задачу 18.41)

$$y_C = -y_1 \frac{l_2}{l} + y_2 \frac{l_1}{l}, \quad \beta = \frac{y_2 - y_1}{l},$$

$$z_C = -z_1 \frac{l_2}{l} + z_2 \frac{l_1}{l}, \quad \gamma = \frac{z_2 - z_1}{l},$$

получаем

$$T = \frac{1}{2} \frac{M}{l^2} [(-\dot{y}_1 l_2 + \dot{y}_2 l_1)^2 + (-\dot{z}_1 l_2 + \dot{z}_2 l_1)^2] + \\ + \frac{1}{2} A \left(\omega + \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l} \cdot \frac{z_2 - z_1}{l}\right)^2 + \frac{1}{2} B \left[\left(\frac{\dot{z}_2 - \dot{z}_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l}\right)^2\right]. \qquad (6)$$

Сохранив в этом выражении величины второго порядка малости, находим

$$T = \frac{1}{2} \frac{M}{l^2} [(-\dot{y}_1 l_2 + \dot{y}_2 l_1)^2 + (-\dot{z}_1 l_2 + \dot{z}_2 l_1)^2] + \\ + \frac{1}{2} A \left(\omega^2 + 2\omega \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l} \cdot \frac{z_2 - z_1}{l}\right) + \frac{1}{2} B \left[\left(\frac{\dot{z}_2 - \dot{z}_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l}\right)^2\right]. \qquad (7)$$

Подставив значения потенциальной (1) и кинетической (7) энергий в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}=0,$$

где $q_j = y_1, z_1, y_2, z_2$, находим дифференциальные уравнения движения вала

$$\frac{M}{l^2}(-\ddot{y}_1 l_2+\ddot{y}_2 l_1)(-l_2)-A\omega\frac{\dot{z}_2-\dot{z}_1}{l^2}-B\frac{\ddot{y}_2-\ddot{y}_1}{l^2}+c_1 y_1=0, \quad (8)$$

$$\frac{M}{l^2}(-\ddot{y}_1 l_2+\ddot{y}_2 l_1)\,l_1+A\omega\frac{\dot{z}_2-\dot{z}_1}{l^2}+B\frac{\ddot{y}_2-\ddot{y}_1}{l^2}+c_2 y_2=0, \quad (9)$$

$$\frac{M}{l^2}(-\ddot{z}_1 l_2+\ddot{z}_2 l_1)(-l_2)+A\omega\frac{\dot{y}_2-\dot{y}_1}{l^2}-B\frac{\ddot{z}_2-\ddot{z}_1}{l^2}+c_1 z_1=0, \quad (10)$$

$$\frac{M}{l^2}(-\ddot{z}_1 l_2+\ddot{z}_2 l_1)\,l_1-A\omega\frac{\dot{y}_2-\dot{y}_1}{l_2}+B\frac{\ddot{z}_2-\ddot{z}_1}{l^2}+c_2 z_2=0. \quad (11)$$

Для выделения поступательной части движения сложим уравнения (8) и (9), а также (10) и (11), предварительно умножив их на l. Тогда, учтя, что $l_1 - l_2 = l$, получим

$$M(\ddot{y}_2 l_1-\ddot{y}_1 l_2)+c_1 l y_1+c_2 l y_2=0, \quad (12)$$

$$M(\ddot{z}_2 l_1-\ddot{z}_1 l_2)+c_1 l z_1+c_2 l z_2=0. \quad (13)$$

Для выделения вращательной части движения вала умножим уравнения (8) и (10) на ll_1, а уравнения (9) и (11) на ll_2, и снова сложим (8) и (9), а также (10) и (11). Тогда найдем

$$A\omega(\dot{y}_2-\dot{y}_1)-B(\ddot{z}_2-\ddot{z}_1)+c_1 l l_1 z_1+c_2 l l_2 z_2=0, \quad (14)$$

$$A\omega(\dot{z}_2-\dot{z}_1)+B(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1)-c_1 l l_1 y_1-c_2 l l_2 y_2=0. \quad (15)$$

Полученные уравнения совпадают с дифференциальными уравнениями малых колебаний вала (15—18), найденными в задаче 18.41.

Особенностью составления дифференциальных уравнений движения с помощью уравнений Лагранжа в обобщенных координатах является необходимость сохранять члены второго порядка малости в выражении для кинетической энергии. Это объясняется тем, что в уравнениях Лагранжа кинетическая энергия дифференцируется по малым переменным — обобщенной координате и обобщенной скорости.

Задача 18.48. В условиях задачи 18.43 составить дифференциальные уравнения вынужденных колебаний вала с помощью уравнений Лагранжа в обобщенных координатах.

Решение. Рассмотрим вынужденные колебания вала, вызванные его статической и динамической неуравновешенностью. Статическая неуравновешенность вызвана смещением центра инерции на малое расстояние e от оси вращения. Динамическая неуравновешенность определяется отклонением главной центральной оси вращения на малый угол δ от оси вращения.

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi=\frac{1}{2}c_1(y_1^2+z_1^2)+\frac{1}{2}c_2(y_2^2+z_2^2), \tag{1}$$

как и в предыдущей задаче.

Координаты центра инерции вала и углы, определяющие положение оси вала, равны (см. задачу 18.43)

$$y_C=y+e\cos\omega t=-y_1\frac{l_2}{l}+y_2\frac{l_1}{l}+e\cos\omega t, \tag{2}$$

$$z_C=z+e\sin\omega t=-z_1\frac{l_2}{l}+z_2\frac{l_1}{l}+e\sin\omega t, \tag{3}$$

$$\beta_1=\beta+\delta\cos(\omega t-\varepsilon)=\frac{y_2-y_1}{l}+\delta\cos(\omega t-\varepsilon), \tag{4}$$

$$\gamma_1=\gamma+\delta\sin(\omega t-\varepsilon)=\frac{z_2-z_1}{l}+\delta\sin(\omega t-\varepsilon), \tag{5}$$

где y, z — координаты точки геометрической оси вала (оси вращения), лежащей на пересечении этой оси с плоскостью, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через центр инерции; y_C, z_C — координаты центра инерции; y_1, z_1, y_2, z_2 — координаты левой и правой опор; β, γ — углы между проекциями геометрической оси ротора соответственно на плоскость xy и осью x, на плоскость xz и осью x; β_1, γ_1 — аналогичные углы, образованные проекциями главной центральной оси вала.

Направив, как и в предыдущей задаче, подвижные оси координат по главным центральным осям инерции вала, найдем проекции угловой скорости на эти оси:

$$\omega_{x1}=\omega+\dot\beta_1\sin\gamma_1\approx\omega+\dot\beta\gamma-\delta\omega\sin(\omega t-\varepsilon)\gamma+\dot\beta\delta\sin(\omega t-\varepsilon)=$$
$$=\omega+\frac{\dot y_2-\dot y_1}{l}\frac{z_2-z_1}{l}-\delta\omega\frac{z_2-z_1}{l}\sin(\omega t-\varepsilon)+\delta\frac{\dot y_2-\dot y_1}{l}\sin(\omega t-\varepsilon), \tag{6}$$

$$\omega_{y1}=-\dot\gamma_1=-\dot\gamma-\delta\omega\cos(\omega t-\varepsilon)=-\frac{\dot z_2-\dot z_1}{l}-\delta\omega\cos(\omega t-\varepsilon), \tag{7}$$

$$\omega_{z1}=\dot\beta_1\cos\gamma_1=\dot\beta-\delta\omega\sin(\omega t-\varepsilon)=\frac{\dot y_2-\dot y_1}{l}-\delta\omega\sin(\omega t-\varepsilon). \tag{8}$$

Кинетическая энергия вала, согласно теореме Кенига, равна

$$T=\frac{1}{2}M(\dot y_C^2+\dot z_C^2)+\frac{1}{2}A\omega_{x1}^2+\frac{1}{2}B(\omega_{y1}^2+\omega_{z1}^2). \tag{9}$$

Подставив в это выражение значения проекций скорости центра инерции и угловой скорости, найдем

$$T=\frac{1}{2}\frac{M}{l^2}[(-\dot y_1l_2+\dot y_2l_1-e\omega l\sin\omega t)^2+(-\dot z_1l_2+\dot z_2l_1+e\omega l\cos\omega t)^2]+$$
$$+\frac{1}{2}A\left[\omega+\frac{\dot y_2-\dot y_1}{l}\frac{z_2-z_1}{l}-\delta\omega\frac{z_2-z_1}{l}\sin(\omega t-\varepsilon)+\delta\frac{\dot y_2-\dot y_1}{l}\sin(\omega t-\varepsilon)\right]^2+$$
$$+\frac{1}{2}B\left\{\left[\frac{\dot z_2-\dot z_1}{l}+\delta\omega\cos(\omega t-\varepsilon)\right]^2+\left[\frac{\dot y_2-\dot y_1}{l}-\delta\omega\sin(\omega t-\varepsilon)\right]^2\right\}. \tag{10}$$

Подставим найденные значения потенциальной и кинетической энергии в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}=0,$$

где q_j — принимает значения y_1, z_1, y_2, z_2. Имеем

$$\frac{M}{l^2}(-\ddot{y}_1 l_2+\ddot{y}_2 l_1)(-l_2)-A\omega\frac{\dot{z}_2-\dot{z}_1}{l^2}-B\frac{\ddot{y}_2-\ddot{y}_1}{l^2}+c_1 y_1+$$
$$+M\frac{l_2}{l}e\omega^2\cos\omega t+B\frac{\delta\omega^2}{l}\cos(\omega t-\varepsilon)-A\frac{\delta\omega^2}{l}\cos(\omega t-\varepsilon)=0, \quad (11)$$

$$\frac{M}{l^2}(-\ddot{y}_1 l_2+\ddot{y}_2 l_1)l_1+A\omega\frac{\dot{z}_2-\dot{z}_1}{l^2}+B\frac{\ddot{y}_2-\ddot{y}_1}{l^2}+c_2 y_2-$$
$$-M\frac{l_1}{l}e\omega^2\cos\omega t-B\frac{\delta\omega^2}{l}\cos(\omega t-\varepsilon)+A\frac{\delta\omega^2}{l}\cos(\omega t-\varepsilon)=0, \quad (12)$$

$$\frac{M}{l^2}(-\ddot{z}_1 l_2+\ddot{z}_2 l_1)(-l_2)+A\omega\frac{\dot{y}_2-\dot{y}_1}{l^2}-B\frac{\ddot{z}_2-\ddot{z}_1}{l^2}+c_1 z_1+$$
$$+M\frac{l_2}{l}e\omega^2\sin\omega t+B\frac{\delta\omega^2}{l}\sin(\omega t-\varepsilon)-A\frac{\delta\omega^2}{l}\sin(\omega t-\varepsilon)=0, \quad (13)$$

$$\frac{M}{l^2}(-\ddot{z}_1 l_2+\ddot{z}_2 l_1)l_1-A\omega\frac{\dot{y}_2-\dot{y}_1}{l^2}+B\frac{\ddot{z}_2-\ddot{z}_1}{l^2}+c_2 z_2-$$
$$-M\frac{l_1}{l}e\omega^2\sin\omega t-B\frac{\delta\omega^2}{l}\sin(\omega t-\varepsilon)+A\frac{\delta\omega^2}{l}\sin(\omega t-\varepsilon)=0. \quad (14)$$

Для выделения поступательной части движения сложим (11) с (12), а (13) с (14), предварительно умножив их на l и учтя, что $l_1-l_2=l$. Тогда получим

$$M(-\ddot{y}_1 l_2+\ddot{y}_2 l_1)+c_1 l y_1+c_2 l y_2=Me\omega^2\cos\omega t, \quad (15)$$
$$M(-\ddot{z}_1 l_2+\ddot{z}_2 l_1)+c_1 l z_1+c_2 l z_2=Me\omega^2\sin\omega t. \quad (16)$$

Для выделения вращательной части движения вала умножим уравнения (11) и (13) на ll_1, а уравнения (12) и (14) на ll_2 и сложим (11) и (12), а также (13) и (14). Находим

$$A\omega(\dot{y}_2-\dot{y}_1)-B(\ddot{z}_2-\ddot{z}_1)+c_1 ll_1 z_1+c_2 ll_2 z_2=$$
$$=-(B-A)\omega^2\delta l\sin(\omega t-\varepsilon), \quad (17)$$

$$A\omega(\dot{z}_2-\dot{z}_1)+B(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1)-c_1 ll_1 y_1-c_2 ll_2 y_2=$$
$$=(B-A)\omega^2\delta l\cos(\omega t-\varepsilon). \quad (18)$$

Уравнения (15)—(18) идентичны дифференциальным уравнениям малых колебаний вала, полученным в задаче 18.43. И в этом случае в выражении для кинетической энергии нельзя отбрасывать величины второго порядка малости, чтобы получить в уравнениях Лагранжа уравнения с точностью до малых величин первого порядка малости.

§ 11. Устойчивость движения

1°. Исследование по общему решению. Для изучения устойчивости движения системы материальных точек запишем дифференциальные уравнения движения в виде системы первого порядка

$$\frac{dy_k}{dt} = Y_k(y_1, y_2, \ldots, y_n, t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n), \qquad (1^*)$$

где y_k — обобщенные координаты или обобщенные скорости системы, являющиеся функциями времени t.

Если система функций

$$y_1 = f_1(t),\ y_2 = f_2(t),\ \ldots,\ y_n = f_n(t) \qquad (2^*)$$

является частным решением системы (1*), соответствующим заданным начальным условиям движения

$$y_1 = y_{10},\quad y_2 = y_{20},\ \ldots,\ y_n = y_{n0} \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad (3^*)$$

то решение (2*) определяет невозмущенное движение системы.

Невозмущенное движение системы называется устойчивым, если при малом изменении начальных условий решения системы (2*) переходят в решения, мало отличающиеся от исходных для сколь угодно больших значений t. Такое невозмущенное движение называют также движением устойчивым в малом.

Если отклонения от невозмущениого движения, кроме того, при неограниченном возрастании времени стремятся к нулю, то такое невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым.

В некоторых технических задачах недостаточно исследовать устойчивость движения в малом. Тогда следует отбросить ограничения, наложенные на отклонения начальных условий возмущенного движения, от начальных условий невозмущенного движения.

Невозмущенное движение системы называется асимптотически устойчивым в целом, если при любых иных начальных условиях, чем (3*), решение системы уравнений (1*), начиная с некоторого определенного значения времени, будет отклоняться от решения (2*) на величину, меньшую наперед заданной.

Отклонения начальных условий движения от заданных уравнениями (3*) называются возмущениями.

Возможны и другие определения устойчивости движения. В частности, во многих задачах современной техники важно обеспечить малые отклонения в решении дифференциальных уравнений возмущенного движения от решения невозмущенного движения на конечном интервале времени.

При решении задач на устойчивость движения в этом пункте будет применен прямой метод интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения. Этот метод наиболее эффективен по своим результатам, однако его применение ограничено небольшим числом возможных приложений ввиду математических трудностей, связанных с получением решения в замкнутом виде.

При решении задач на устойчивость движения методом интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения рекомендуется следующий порядок действий:

1) составляем дифференциальные уравнения невозмущенного движения системы;

2) находим частное решение этой системы дифференциальных уравнений, соответствующее заданным начальным условиям и определяющее невозмущенное движение системы;

3) задаемся другими начальными условиями движения;

4) составляем дифференциальные уравнения возмущенного движения;

5) проинтегрировав дифференциальные уравнения возмущенного движения, находим их решение;

6) сопоставляя решения дифференциальных уравнений невозмущенного и возмущенного движений, судим об устойчивости невозмущенного движения.

Задача 18.49. Точка A движется равномерно и прямолинейно со скоростью v_s. Точка B находилась в начальный момент на расстоянии a_0 от точки A. Прямая AB, соединяющая обе точки, в начальный момент образовывала угол ψ_0 с перпендикуляром, восставленным к прямолинейной траектории точки A (рис. *а*).

Угол γ_0, образованный скоростью точки B с линией AB, называется углом упреждения. Точка B будет сближаться с точкой A, вплоть до точного попадания, по прямолинейной относительной траектории, если выбрать угол упреждения γ_0 согласно равенству

$$\sin\gamma_0 = \frac{v_s}{v}\cos\psi_0 \equiv k\cos\psi_0, \tag{1}$$

так как при этом относительная скорость точки B будет направлена по BA (рис. *в*).

Равенству (1) соответствуют два значения угла $\pm\psi_0$ (рис. *б*)

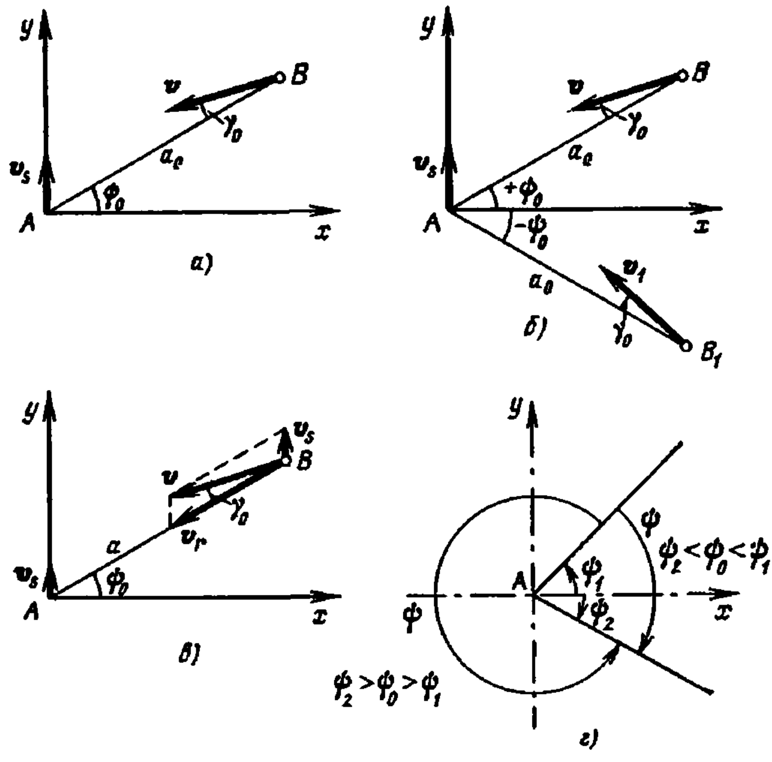
$$\sin\psi_0 = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\gamma_0}{k^2}}, \quad \sin(-\psi_0) = -\sqrt{1 - \frac{\sin^2\gamma_0}{k^2}}. \tag{2}$$

Таким образом, прямолинейное движение точки B возможно при подходе к точке A с передней полуплоскости и с задней полуплоскости по прямым BA и B_1A.

Определить устойчивость движения точки B по BA и B_1A.

Решение. Рассматривая движение точки B как сложное движение, складывающееся из переносного движения вместе с точкой A и относительного движения по отношению к точке A, замечаем, что при соблюдении равенства (1) вектор относительной скорости точки B направлен в точку A (рис. *в*). Наблюдатель, движущийся

вместе с точкой A, видит точку B движущейся по прямолинейной относительной траектории BA с постоянной скоростью v_r. Это и будет невозмущенное движение точки B.



К задаче 18.49.

Рассмотрим теперь возмущенное движение точки B, полагая, что угол упреждения γ не удовлетворяет равенству (1). Обозначив расстояние AB через a, находим проекции относительной скорости на AB и на ось, перпендикулярную AB:

$$\dot{a} = -v\cos\gamma - v_s\sin\psi, \tag{3}$$

$$a\dot{\psi} = v\sin\gamma - v_s\cos\psi. \tag{4}$$

В этих уравнениях через ψ обозначен угол между осью x и прямой AB в данный момент времени.

Разделим уравнение (3) на равенство (4) и помножим обе части на $d\psi$. Тогда найдем

$$\frac{da}{a} = \frac{v\cos\gamma + v_s\sin\psi}{v_s\cos\psi - v\sin\gamma}\, d\psi. \tag{5}$$

При интегрировании этого уравнения с разделенными переменными необходимо рассмотреть три частных случая:

$$1)\ \sin^2\gamma < k^2;\quad 2)\ \sin^2\gamma = k^2;\quad 3)\ \sin^2\gamma > k^2.$$

Первый случай (малый угол упреждения: $\sin^2\gamma < k^2$). Проинтегрировав (5), находим

$$\ln Ca = \ln\left[\left(\frac{\sin\gamma - k\cos\psi}{-k+\sin\gamma\cos\psi+\sqrt{k^2-\sin^2\gamma}\,\sin\psi}\right)^{\frac{\cos\gamma}{\sqrt{k^2-\sin^2\gamma}}}\times \frac{1}{\sin\gamma - k\cos\psi}\right], \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная, а через k обозначено отношение скоростей $k = v_s/v$.

Освободившись от логарифмов и определив C по начальным условиям (при $t=0$ имеем $a=a_0$, $\psi=\psi_0$), находим

$$\frac{a}{a_0} = \left[\frac{-k+\sin\gamma\cos\psi_0+\sqrt{k^2-\sin^2\gamma}\,\sin\psi_0}{-k+\sin\gamma\cos\psi+\sqrt{k^2-\sin^2\gamma}\,\sin\psi}\times \frac{\sin\gamma-k\cos\psi}{\sin\gamma-k\cos\psi_0}\right]^{\frac{\cos\gamma}{\sqrt{k^2-\sin\gamma}}}\frac{\sin\gamma-k\cos\psi_0}{\sin\gamma-k\cos\psi}. \tag{7}$$

Это уравнение относительной траектории точки B в возмущенном движении.

Заметим, что при разных k показатель степени различен:

$$\frac{\cos\gamma}{\sqrt{k^2-\sin^2\gamma}}\begin{cases} >1 & \text{при} \quad k<1,\\ =1 & \text{при} \quad k=1,\\ <1 & \text{при} \quad k>1.\end{cases} \tag{8}$$

Если $k<1$, то точка B настигнет точку A при угле ψ_2, определенном равенствами

$$\cos\psi_2 = \frac{\sin\gamma}{k}, \quad \sin\psi_2 = -\sqrt{1-\frac{\sin^2\gamma}{k^2}}, \tag{9}$$

так как тогда a обратится в нуль, что следует из (7). Сопоставив значения ψ_2 по формуле (9) с равенствами (1) и (2), заключаем, что угол $\psi_2 = -\psi_0$ для угла упреждения γ. Иначе говоря, в конце движения точка B выходит на траекторию невозмущенного движения, находящуюся в задней полуплоскости. Следовательно, движение по относительной траектории AB, находящейся под углом $(-\psi_0)$ к оси x, устойчиво в большом. Каково бы ни было начальное возмущение, точка B в конце движения вернется на прямую AB.

С другой стороны, из равенства (4) имеем

$$\dot\psi = \frac{v\sin\gamma - v_s\cos\psi}{a}. \tag{10}$$

Следовательно, при переходе через прямую, расположенную под углом ψ_1, определяемым равенствами (рис. г)

$$\cos\psi_1 = \frac{\sin\gamma}{k}, \quad \sin\psi_1 = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\gamma}{k^2}}, \tag{11}$$

угловая скорость вращения линии AB меняет знак.

Если начальный угол ψ_0 меньше ψ_1 и больше ψ_2, то в процессе движения угол ψ монотонно уменьшается вплоть до $\psi = \psi_2$, когда точка B совмещается с точкой A.

Если угол ψ_0 больше ψ_1, но меньше ψ_2, то угол в процессе движения монотонно увеличивается вплоть до $\psi = \psi_2$, при котором опять-таки точка B совмещается с точкой A (рис. г). Следовательно, невозмущенное движение по относительной траектории AB, расположенной в передней полуплоскости, неустойчиво в малом.

Как бы мало ни было отклонение точки от траектории невозмущенного движения, находящейся в передней полуплоскости, она при дальнейшем движении будет все дальше отклоняться от невозмущенной траектории, приближаясь к другой прямолинейной траектории невозмущенного движения, расположенной в задней полуплоскости.

Второй случай ($\sin^2\gamma = k^2$). Проинтегрировав уравнение (5) и определив произвольную постоянную интегрирования по начальным условиям (при $t = 0$ имеем $a = a_0$, $\psi = \psi_0$), находим уравнение относительной траектории возмущенного движения

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1 - \cos\psi_0}{1 - \cos\psi} e^{\frac{\sqrt{1 - k^2}}{k}\left(\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\psi_0}{2}\right)}. \tag{12}$$

Уравнение (10) в этом случае принимает вид

$$\dot\psi = \frac{v_s}{a}(1 - \cos\psi). \tag{13}$$

Следовательно, угловая скорость поворота линии BA всегда положительна.

Из уравнения (12) следует, что расстояние a обращается в нуль при $\psi \to 0$ с отрицательной стороны. Таким образом, в этом случае обе траектории невозмущенного движения (рис. г) сливаются в одну прямую Ax, углы ψ_1 и ψ_2 обращаются соответственно в нуль. В этом случае следует судить об устойчивости движения по прямой Ax на основании знака возмущения. Если начальное отклонение находится в первой четверти, то точка B будет отклоняться все дальше от прямой Ax и совпадет с точкой A при $\psi \to 0$ с отрицательной стороны. Если начальное отклонение лежит в четвертой четверти, то точка B будет приближаться к прямой Ax, угол ψ_0 будет стремиться к нулю. В этом случае движение устойчиво в большом.

Третий случай ($\sin^2\gamma > k^2$). Проинтегрировав уравнение (5) и определив произвольную постоянную интегрирования по начальным

условиям ($a=a_0$, $\psi=\psi_0$ при $t=0$), находим уравнение относительной траектории возмущенного движения

$$\frac{a}{a_0}=\left(\frac{\sin\gamma-k\cos\psi_0}{\sin\gamma-k\cos\psi}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{2\cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\gamma-k^2}}\left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\sin\gamma+k}{\sin\gamma-k}}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\sin\gamma+k}{\sin\gamma-k}}\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2}\right)\right]\right\}. \quad (14)$$

Из этого уравнения следует, что расстояние до точки A обращается в нуль при неограниченном возрастании угла ψ.

Из уравнения (4) находим угловую скорость поворота прямой

$$\dot\psi=\frac{v}{a}(\sin\gamma-k\cos\psi), \quad (15)$$

откуда следует, что угловая скорость не меняет знака. Ее знак совпадает со знаком $\sin\gamma$.

Таким образом, возмущенная траектория точки B — спираль, проходящая через точку A.

Из уравнения (15) следует, что угловая скорость вращения прямой BA по мере приближения точки B к A неограниченно возрастает.

2°. Устойчивость движения по первому приближению. Решение задач на определение устойчивости движения прямым методом интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения в большинстве случаев не может быть осуществлено ввиду невозможности получения решения в замкнутом виде.

В связи с этим широкое распространение получил способ определения устойчивости движения по первому приближению. Этот способ был известен задолго до появления классического труда А. М. Ляпунова (Общая задача об устойчивости движения, 1892 г). Однако именно А. М. Ляпунов впервые установил условия, при которых первое приближение позволяет судить об устойчивости движения исходной системы, движение которой описывается нелинейными дифференциальными уравнениями.

Способ определения устойчивости движения по первому приближению заключается в следующем. Пусть

$$y_1=f_1(t),\quad y_2=f_2(t),\ \ldots,\ y_n=f_n(t) \quad (1^*)$$

является частным решением системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dy_k}{dt}=Y_k(y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n,\ t) \quad (2^*)$$

при заданных начальных условиях движения

$$y_1=y_{10},\quad y_2=y_{20},\ \ldots,\ y_n=y_{n0}\quad \text{при}\quad t=0. \quad (3^*)$$

Решение (1*) определяет невозмущенное движение системы. При других начальных условиях движения значения переменных y_k, определяющие движение системы, можно представить в виде

$$y_k = f_k(t) + x_k. \tag{4*}$$

Тогда уравнения (2*) примут вид

$$\frac{df_k}{dt} + \frac{dx_k}{dt} = Y_k[f_1(t) + x_1,\ f_2(t) + x_2, \ldots,\ f_n(t) + x_n,\ t]. \tag{5*}$$

Вычтя из каждого соответственного уравнения (5*) уравнение (2*), найдем

$$\frac{dx_k}{dt} = Y_k[f_1(t) + x_1, \ldots, f_n(t) + x_n, t] - Y_k[f_1(t), \ldots, f_n(t), t]. \tag{6*}$$

Обозначив правую часть этих уравнений для краткости через

$$X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \\ = Y_k[f_1(t) + x_1, \ldots, f_n(t) + x_n, t] - Y_k[f_1(t), \ldots, f_n(t), t], \tag{7*}$$

получим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, t). \tag{8*}$$

Из (7*) следует, что

$$X_k(0, 0, \ldots, 0, t) = 0 \tag{9*}$$

и, следовательно,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \tag{10*}$$

является частным решением системы (8*), соответствующим невозмущенному движению.

Для рассмотрения устойчивости по первому приближению в системе уравнений (8*) в правой части выделяются линейные слагаемые. При этом ограничимся случаем, когда время не входит явно в правую часть уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = a_{k_1}x_1 + a_{k_2}x_2 + \ldots + a_{k_n}x_n + F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{11*}$$

где $a_{k_s} = \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_s}\right)_{x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0}$, а $F_k(x_1, \ldots, x_n)$ содержит слагаемые второго и более высоких порядков относительно переменных x_k.

Тогда для исследования устойчивости по первому приближению составляют систему, получаемую из (11*) отбрасыванием нелинейных слагаемых

$$\frac{dx_k}{dt} = a_{k_1}x_1 + a_{k_2}x_2 + \ldots + a_{k_n}x_n \tag{12*}$$

и находят характеристическое уравнение системы (12*)

$$z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots + A_n = 0. \tag{13*}$$

Согласно первой теореме Ляпунова невозмущенное движение, определяемое уравнениями (1*), устойчиво, если все корни характеристического уравнения (13*) имеют отрицательную вещественную часть. В этом случае отброшенные нелинейные слагаемые в правой части уравнений (11*) не влияют на устойчивость движения.

Согласно второй теореме Ляпунова невозмущенное движение, определяемое уравнениями (1*), неустойчиво, если среди корней характеристического уравнения (13*) имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью. И в этом случае отброшенные нелинейные слагаемые в правой части уравнений (11*) не могут влиять на устойчивость движения.

Таким образом, исследование по первому приближению позволяет окончательно ответить на вопрос об устойчивости движения в тех случаях, когда корни характеристического уравнения имеют отрицательную или положительную вещественную часть.

Если в числе корней характеристического уравнения имеются корни, вещественная часть которых равна нулю, т. е. нулевые или чисто мнимые корни, то судить об устойчивости движения по первому приближению нельзя. В этих случаях, называемых «критическими», как показал А. М. Ляпунов, необходимо учитывать в дифференциальных уравнениях члены порядка выше первого.

О знаке корней характеристического уравнения можно судить на основании теоремы Гурвица, которая формулируется следующим образом. Уравнение n-й степени с вещественными коэффициентами ($a_0 > 0$)

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \tag{14*}$$

имеет все корни с отрицательной вещественной частью, если все определители вида

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \end{vmatrix} \tag{15*}$$

положительны. При этом $a_i = 0$, если $i > n$. Это условие является необходимым и достаточным.

При решении задач на исследование устойчивости движения системы по первому приближению рекомендуется следующий порядок действий:

1) определяем число степеней свободы системы и выбираем обобщенные координаты;

2) пользуясь уравнениями Лагранжа, составляем дифференциальные уравнения невозмущенного движения;

3) составляем дифференциальные уравнения возмущенного движения, полагая, что обобщенные координаты и обобщенные скорости в возмущенном движении отличаются от значений в невозмущенном движении на величины первого порядка малости;

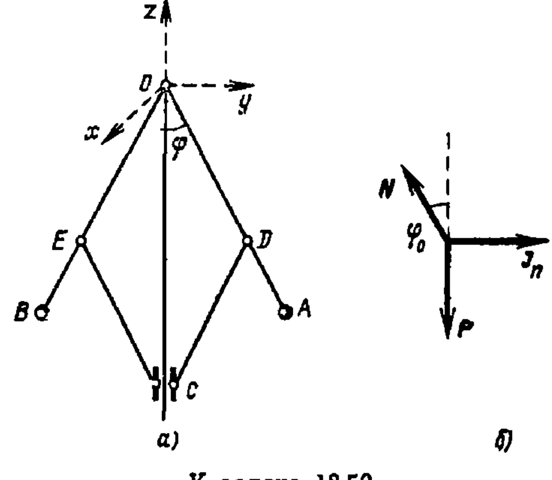
4) в полученных дифференциальных уравнениях отбрасываем слагаемые второго и более высоких порядков малости;

5) вычитаем из дифференциальных уравнений возмущенного движения соответственные дифференциальные уравнения невозмущенного движения;

6) для случая системы линейных дифференциальных уравнений в вариациях с постоянными коэффициентами составляем характеристическое уравнение;

7) пользуясь теоремой Гурвица, определяем знаки вещественных частей корней характеристического уравнения и затем судим об устойчивости движения исходной системы.

Задача 18.50. Центробежный регулятор Уатта предназначен для поддержания равномерного вращательного движения. Он состоит из двух стержней OA и OB одинаковой длины l, шарнирно укрепленных в неподвижной точке O. На концах стержни несут два шара массы m каждый (рис. *а*). При помощи двух стержней CE и DC муфта C, которая может скользить по вертикальной оси, шарнирно соединена со стержнями, несущими шары. Шары считать материальными точками. При увеличении угловой скорости вращения шары расходятся, муфта C подымается, уменьшая впускное отверстие для пара. При уменьшении угловой скорости шары сближаются, муфта C опускается и увеличивает отверстие для впуска пара.



К задаче 18.50.

Пренебрегая массами стержней и муфты, а также силами трения, определить устойчивость движения регулятора. Момент инерции вращающихся частей относительно вертикальной оси равен I_0 (без учета шаров).

Восстанавливающий момент, вызванный отклонением угла φ от невозмущенного значения φ_0, равен

$$L_z = -k(\varphi - \varphi_0),$$

где k — постоянный положительный коэффициент.

Решение. Регулятор в целом представляет собой систему с двумя степенями свободы. Выбираем обобщенные координаты: угол поворота вокруг оси OC, который обозначим β, и угол поворота стержней OA и OB вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости OAB, который назовем φ. Определим значение угла φ_0, соответствующее вращению системы с постоянной заданной угловой скоростью $\dot{\beta}_0 = \omega_0$. Для этого достаточно рассмотреть относительное равновесие одного из шаров (см. рис. *б*). К шару приложены: сила тяжести P $(P = mg)$ и реакция стержня N. Присоединив к этим силам нормальную силу инерции J_n $(J_n = ml \sin\varphi_0 \omega_0^2)$, можем рассматривать совокупность трех сил как уравновешенную систему.

Спроектировав все силы на направление, перпендикулярное N, найдем

$$J_n \cos\varphi_0 - mg \sin\varphi_0 = 0, \tag{1}$$

откуда

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l\cos\varphi_0}. \tag{2}$$

Таким образом, заданной угловой скорости вращения системы соответствует вполне определенный угол φ_0. Это установившееся движение системы называется невозмущенным движением.

Для составления дифференциальных уравнений движения системы воспользуемся уравнениями Лагранжа. Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2}\left[I_1\dot{\beta}^2 + I_2\dot{\varphi}^2\right]. \tag{3}$$

Момент инерции I_1 относительно оси z (рис. *а*) складывается из момента инерции I_0 всех вращающихся частей, кроме шаров (этот момент инерции остается неизменным при изменении угла φ), и из момента инерции шаров, зависящего от угла φ:

$$I_1 = I_0 + 2ml^2\sin^2\varphi. \tag{4}$$

Момент инерции I_2 шаров относительно оси x (рис. *а*) равен

$$I_2 = 2ml^2. \tag{5}$$

Таким образом, кинетическая энергия системы выражается в обобщенных координатах в виде

$$T = \frac{1}{2}\left[(I_0 + 2ml^2\sin^2\varphi)\,\dot{\beta}^2 + 2ml^2\dot{\varphi}^2\right]. \tag{6}$$

Переходим к определению обобщенных сил. Первая обобщенная сила Q_β находится как коэффициент при соответствующем возможном перемещении в выражении для элементарной работы:

$$\delta A_1 = L_z\cdot\delta\beta. \tag{7}$$

Следовательно, обобщенная сила будет

$$Q_\beta = L_z = -k(\varphi - \varphi_0). \qquad (8)$$

Вторая обобщенная сила Q_φ находится как частная производная от потенциальной энергии по углу φ. Действительно, при изменении угла φ работу совершает только сила тяжести шаров, так как центр тяжести остальных вращающихся частей системы остается неизменным, а работа момента L_z при изменении угла φ равна нулю. Тогда с точностью до произвольной постоянной потенциальная энергия шаров равна

$$\Pi = -2mgl\cos\varphi. \qquad (9)$$

Составляем далее уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}(I_1\dot\beta) = Q_\beta, \qquad (10)$$

$$\frac{d}{dt}(I_2\dot\varphi) - \frac{1}{2}\dot\beta^2\frac{\partial I_1}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}. \qquad (11)$$

Рассматривая малые колебания системы около положения невозмущенного движения (2), полагаем

$$\varphi = \varphi_0 + x, \qquad \dot\beta = \dot\beta_0 + \dot y = \omega_0 + \dot y, \qquad (12)$$

где x, y — малые приращения переменных φ, β. Внеся значения переменных в уравнении (10), находим

$$2ml^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot\varphi\cdot\dot\beta + I_1\ddot\beta = -k(\varphi - \varphi_0) \qquad (13)$$

или, учтя (12),

$$2ml^2\sin(\varphi_0 + x)\cos(\varphi_0 + x)\,\dot x\,(\omega_0 + \dot y) +$$
$$+ [I_0 + 2ml^2\sin^2(\varphi_0 + x)]\,\ddot y = -kx. \qquad (14)$$

Для составления уравнения малых движений подсчитываем все члены с точностью до величин первого порядка малости включительно, полагая $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$. После несложных преобразований находим

$$(I_0 + 2ml^2\sin^2\varphi_0)\ddot y + ml^2\sin 2\varphi_0\cdot\dot\beta_0\dot x + kx = 0. \qquad (15)$$

Второе дифференциальное уравнение малых движений находим из (11)

$$I_2\ddot\varphi - \dot\beta\cdot ml^2\cdot 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi = -2mgl\sin\varphi. \qquad (16)$$

Внеся в это уравнение значения (12) и (5), получаем

$$\ddot x - \frac{1}{2}(\dot\beta_0 + \dot y)^2\sin(2\varphi_0 + 2x) + \frac{g}{l}\sin(\varphi_0 + x) = 0. \qquad (17)$$

Раскрываем скобки и подсчитываем для малых движений все члены с точностью до величин первого порядка малости включительно.

После несложных преобразований, учтя равенство (2), найдем

$$\ddot{x} - \dot{\beta}_0 \sin 2\varphi_0 \cdot \dot{y} + \left(\frac{g}{l}\cos\varphi_0 - \dot{\beta}_0^2 \cos 2\varphi_0\right) x = 0. \qquad (18)$$

Таким образом, получена система двух дифференциальных уравнений (15), (18) малых движений системы. Для решения этой системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами полагаем

$$x = C_1 e^{pt}, \quad \dot{y} = C_2 e^{pt}, \qquad (19)$$

где C_1, C_2, p — постоянные величины. Подставив эти значения в уравнения (15), (18) и сократив на общий множитель e^{pt}, получаем характеристическое уравнение

$$\left(\frac{I_0}{2ml^2} + \sin^2\varphi_0\right)p^3 + \dot{\beta}_0^2 \sin^2\varphi_0\left(1 + 2\cos^2\varphi_0 + \frac{I_0}{2ml^2}\right)p + \\ + \frac{k}{2ml^2}\dot{\beta}_0 \sin 2\varphi_0 = 0. \qquad (20)$$

Кратко это уравнение записывается в виде

$$a_0 p^3 + a_2 p + a_3 = 0, \qquad (21)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{I_0}{2ml^2} + \sin^2\varphi_0, \quad a_1 = 0, \\ a_2 &= \dot{\beta}_0^2 \sin^2\varphi_0\left(1 + 2\cos^2\varphi_0 + \frac{I_0}{2ml^2}\right), \\ a_3 &= \frac{k}{2ml^2}\dot{\beta}_0 \sin 2\varphi_0. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Условие Гурвица отрицательности вещественной части корней уравнения третьей степени имеет вид

$$\left.\begin{aligned} & a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ & \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 (a_1 a_2 - a_3 a_0) > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Так как в данном случае $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 = 0$, то условия Гурвица не удовлетворяются, и следовательно, малые движения регулятора, в сделанных предположениях, неустойчивы. Этот факт, установленный сравнительно давно экспериментально, приводит к необходимости вводить дополнительные звенья в систему регулирования.

Задача 18.51. Пусть уравнение возмущенного движения системы с одной степенью свободы определяется уравнением Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \qquad (1)$$

где $\alpha > 0$. Исследовать устойчивость движения.

Решение. Запишем уравнение движения (1) в виде системы двух уравнений

$$\frac{dy}{dt} = -x; \quad \frac{dx}{dt} = y - \alpha\left(\frac{x^3}{3} - x\right). \qquad (2)$$

Это допустимо, так как, вычислив из второго уравнения системы (2) производную по времени и внеся туда значение $\dot{y}$ согласно первому уравнению системы (2), возвращаемся к исходному уравнению (1).

Для определения устойчивости возмущенного движения по первому приближению линеаризуем систему (2), отбросив члены выше первого порядка малости:

$$\frac{dx}{dt} = y + \alpha x, \qquad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x. \qquad (4)$$

Составляем характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & +1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получаем

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + 1 = 0. \qquad (5)$$

Корни характеристического уравнения (5) таковы:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1}. \qquad (6)$$

При $\alpha \geqslant 2$ оба корня вещественные и положительные; при $\alpha < 2$ оба корня комплексные с положительной вещественной частью.

Следовательно, невозмущенное движение $x = 0$, $\dot{x} = 0$ системы неустойчиво в малом.

3°. **Устойчивость движения при наличии гироскопических сил.** Система, неустойчивая сама по себе, может быть сделана устойчивой по первому приближению путем введения гироскопических сил только в том случае, если число неустойчивых степеней свободы четно. Эта теорема была доказана Кельвином.

Гироскопическая стабилизация движения возможна только для консервативной системы. Диссипативные силы, как бы малы ни были, действуя достаточно долго, уничтожат устойчивость, созданную гироскопическими силами. Поэтому устойчивость, созданная гироскопическими силами, называется «временной», в то время как устойчивость консервативной системы является «вековой».

Таким образом, диссипативные силы усиливают устойчивость движения при действии одних консервативных сил и разрушают устойчивость, если она достигнута благодаря добавлению гироскопических сил.

При решении задач на исследование устойчивости движения при действии гироскопических сил рекомендуется следующая последовательность действий:

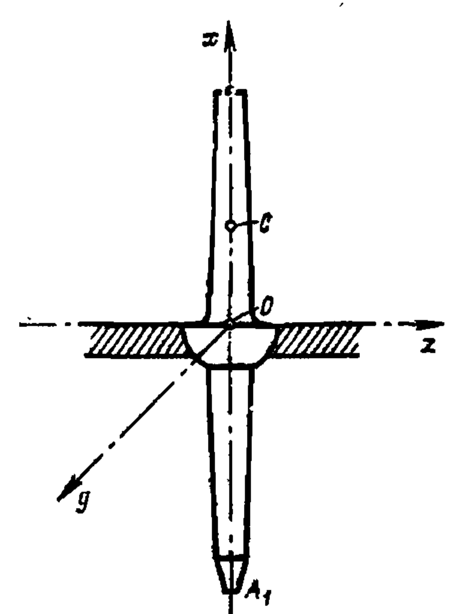
1) определяем число степеней свободы системы и выбираем обобщенные координаты;

2) находим невозмущенное движение системы;

3) задаваясь малыми отклонениями начальных условий движения, составляем дифференциальные уравнения возмущенного движения, пользуясь уравнениями Лагранжа или общими теоремами динамики;

4) полагая, что обобщенные координаты и обобщенные скорости в возмущенном движении отличаются от значений в невозмущенном движении на величины первого порядка малости, линеаризируем дифференциальные уравнения, отбрасывая слагаемые второго и более высоких порядков малости, вычитаем из дифференциальных уравнений возмущенного движения соответствующие уравнения невозмущенного движения;

5) исследуем устойчивость системы по первому приближению непосредственным интегрированием дифференциальных уравнений возмущенного движения или применяя критерий Гурвица к дифференциальным уравнениям в вариациях.



К задаче 18.52.

Задача 18.52. Ротор веса Q вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг собственной оси симметрии, совпадающей с неподвижной вертикальной осью x. Точка O, являющаяся центром сферической опоры ротора, неподвижна. Центр тяжести ротора C находится на высоте $OC = l_2$. Расстояние $OA_1 = l$; буквой A_1 обозначена крайняя нижняя точка ротора. Момент инерции ротора относительно оси симметрии равен A, а момент инерции относительно оси, проходящей через точку O и перпендикулярной к оси симметрии ротора, равен B.

Исследовать устойчивость вертикального положения оси ротора.

Решение. Ротор представляет собой систему с двумя степенями свободы. Выберем в качестве обобщенных координат координаты y_1, z_1 крайней точки ротора A_1. Для составления дифференциальных уравнений движения применим теорему об изменении главного момента количеств движения относительно неподвижных осей y, z.

Пользуясь формулами (2*) из § 9 этой главы, определяющими главные моменты количеств движения относительно неподвижных осей координат, находим

$$\frac{d}{dt}\left(A\omega\beta - B\dot{\gamma}\right) = Q\frac{l_2}{l}z_1, \quad \frac{d}{dt}(A\omega\gamma + B\dot{\beta}) = -Q\frac{l_2}{l}y_1. \tag{1}$$

Внеся в эти уравнения значения углов β и γ,

$$\beta = -\frac{y_1}{l}, \quad \gamma = -\frac{z_1}{l}, \tag{2}$$

получаем

$$B\ddot{z}_1 - A\omega\dot{y}_1 = Ql_2 z_1, \tag{3}$$

$$B\ddot{y}_1 + A\omega\dot{z}_1 = Ql_2 y_1. \tag{4}$$

Кососимметричные члены ($-A\omega\dot{y}_1$) и ($A\omega\dot{z}_1$) соответствуют гироскопическим силам.

Решение этой системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами найдем, введя комплексную переменную

$$\lambda = z_1 + iy_1. \tag{5}$$

Умножив уравнение (4) на i и сложив его с уравнением (3), имеем

$$B\ddot{\lambda} + iA\omega\dot{\lambda} - Ql_2\lambda = 0. \tag{6}$$

Составляем характеристическое уравнение

$$BS^2 + iA\omega S - Ql_2 = 0. \tag{7}$$

Определяем корни этого уравнения:

$$S_1 = \frac{-iA\omega - \sqrt{-A^2\omega^2 + 4BQl_2}}{2B}, \tag{8}$$

$$S_2 = \frac{-iA\omega + \sqrt{-A^2\omega^2 + 4BQl_2}}{2B}. \tag{9}$$

Если выполнено условие

$$A^2\omega^2 > 4BQl_2, \tag{10}$$

то корни являются чисто мнимыми величинами и могут быть для краткости записаны в виде

$$S_1 = ik_1, \quad S_2 = ik_2, \tag{11}$$

где

$$k_1 = \frac{-A\omega - \sqrt{A^2\omega^2 - 4BQl_2}}{2B}, \tag{12}$$

$$k_2 = \frac{-A\omega + \sqrt{A^2\omega^2 - 4BQl_2}}{2B} \tag{13}$$

— вещественные числа. В этом случае решение уравнения (6) будет

$$\lambda = D_1 e^{ik_1 t} + D_2 e^{ik_2 t}, \tag{14}$$

где D_1 и D_2 — комплексные произвольные постоянные вида $D_1 = B_1 + iB_3$, $D_2 = B_2 + iB_4$. Тогда уравнение (14) примет вид

$$\lambda = (B_1 + iB_3)(\cos k_1 t + i \sin k_1 t) + (B_2 + iB_4)(\cos k_2 t + i \sin k_2 t). \quad (15)$$

Далее находим исходные переменные y_1 и z_1, отделив в уравнении (15) вещественную часть от мнимой:

$$y_1 = B_1 \sin k_1 t + B_3 \cos k_1 t + B_2 \sin k_2 t + B_4 \cos k_2 t, \quad (16)$$

$$z_1 = B_1 \cos k_1 t - B_3 \sin k_1 t + B_2 \cos k_2 t - B_4 \sin k_2 t. \quad (17)$$

В этих уравнениях B_1, B_2, B_3, B_4 — произвольные постоянные интегрирования, определяемые по начальным данным y_{10}, $\dot{y}_{10}$, z_{10}, $\dot{z}_{10}$ при $t = 0$. Так как y_1 и z_1 являются линейными функциями косинуса и синуса, то координаты нижнего конца ротора не растут с течением времени.

Итак, при выполнении условия (10) точка A_1 совершает периодическое движение (полагаем, что k_1 и k_2 соизмеримы), складывающееся из четырех гармонических колебаний. Следовательно, если угловая скорость ротора

$$\omega > 2\frac{\sqrt{BQl_2}}{A}, \quad (18)$$

что вытекает из (10), то вертикальное положение оси ротора устойчиво, несмотря на то, что центр тяжести занимает наивысшее положение и равновесие такого же невращающегося стержня неустойчиво. Гироскопические силы стабилизируют неустойчивую консервативную систему. Рассмотрим далее случай, когда

$$\omega < 2\frac{\sqrt{BQl_2}}{A}. \quad (19)$$

Корни характеристического уравнения (7) будут комплексными числами вида

$$s_1 = -a + ib, \quad s_2 = a + ib, \quad (20)$$

где

$$a = \frac{\sqrt{4BQl_2 - A^2\omega^2}}{2B} > 0, \quad b = \frac{-A\omega}{2B} < 0. \quad (21)$$

В этом случае общее решение уравнения (6) будет

$$\lambda = D_1 e^{s_1 t} + D_2 e^{s_2 t}. \quad (22)$$

Здесь, так же как и в первом случае, $D_1 = B_1 + iB_3$, $D_2 = B_2 + iB_4$. Следовательно, уравнение (22) после этой замены примет вид

$$\lambda = (B_1 + iB_3)e^{-at}(\cos bt + i \sin bt) + \\ + (B_2 + iB_4)e^{at}(\cos bt + i \sin bt). \quad (23)$$

Исходные переменные y_1 и z_1 получим, отделив вещественную часть от мнимой:

$$y_1 = e^{-at}(B_1 \sin bt + B_3 \cos bt) + e^{at}(B_2 \sin bt + B_4 \cos bt), \tag{24}$$

$$z_1 = e^{-at}(B_1 \cos bt - B_3 \sin bt) + e^{at}(B_2 \cos bt - B_4 \sin bt). \tag{25}$$

Вторые слагаемые в этих уравнениях содержат множитель e^{at} и, следовательно, им соответствуют все возрастающие колебания. Вертикальное положение оси ротора в этом случае неустойчиво.

4°. Второй метод Ляпунова. Запишем систему дифференциальных уравнений возмущенного движения в виде

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1*}$$

ограничиваясь случаем, когда функции X_k не зависят явно от времени. В этом случае невозмущенное движение называется установившимся.

Под x_k следует понимать обобщенные координаты и обобщенные скорости системы, которые в задачах устойчивости играют одинаковую роль.

Будем считать, что в некоторой области

$$|x_k| \leqslant \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

функции X_k непрерывны и допускают для каждой совокупности начальных условий единственное решение. Здесь ε — достаточно малое положительное число.

Уравнения возмущенного движения (1*) в большинстве случаев нелинейны и не смогут быть проинтегрированы в замкнутом виде. Ввиду этого Ляпунов предложил качественный метод исследования устойчивости движения.

Пользуясь этим методом, можно, не интегрируя дифференциальные уравнения возмущенного движения, ответить на вопрос об устойчивости невозмущенного движения системы. Второй метод Ляпунова основан на исследовании некоторых функций

$$V(x_1, \ldots, x_n), \tag{2*}$$

называемых функциями Ляпунова.

Эти функции будем полагать однозначными, имеющими непрерывные частные производные и обращающимися в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

1) Функция $V(x_1, \ldots, x_n)$ называется знакоопределенной (определенно-положительной или определенно-отрицательной), если она при

$$|x_k| \leqslant \varepsilon \tag{3*}$$

принимает значения только одного определенного знака (положительного или отрицательного) и обращается в нуль только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

2) Функция $V(x_1, \ldots, x_n)$ называется знакопостоянной (положительной или отрицательной), если она в области (3*) может принимать значения только одного определенного знака, но может обращаться в нуль не только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

3) Функция $V(x_1, \ldots, x_n)$ называется знакопеременной, если она в области (3*) может принимать как положительные так и отрицательные значения.

Общих критериев, позволяющих относить функции Ляпунова к одному из вышеуказанных типов, не существует, однако можно сформулировать некоторые частные теоремы. Так:

1) любая форма нечетного порядка является знакопеременной функцией;

2) если форма является квадратичной, то, согласно теореме Сильвестра, для того чтобы квадратичная форма была определенно-положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее дискриминанта были положительны (см. § 1 этой главы),

3) знакоопределенность или знакопеременность однородной формы остается неизменной, если к ней добавить любую форму от тех же переменных и того же порядка с достаточно малыми коэффициентами,

4) если функция не содержит всех координат, то она не может быть знакоопределенной. Такая функция может быть знакопостоянной или знакопеременной,

5) если по совокупности членов наинизшего порядка в разложениях аналитических функций можно судить о знакоопределенности или знакопеременности этих функций, то для достаточно малых значений $|x_k|$ члены более высоких порядков можно не рассматривать.

Если по совокупности членов наинизшего порядка в разложениях аналитических функций можно установить, что последняя является знакопостоянной, то в этом случае знакоопределенность или знакопеременность решается из рассмотрения членов более высоких порядков.

Производная по времени от функции Ляпунова имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n.$$

Внеся в это выражение значения производных $\dot{x}_k$ из (1*), найдем полную производную от функции Ляпунова, составленную в силу уравнений возмущенного движения:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot X_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot X_n. \qquad (4^*)$$

Перейдем к формулировке основных теорем второго метода Ляпунова об устойчивости и неустойчивости движения:

Теорема А. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию $V(x_1, \ldots$

$\ldots, x_n$), полная производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция знакопостоянная, знака, противоположного с V, или эта производная тождественно обращается в нуль, то невозмущенное движение устойчиво.

Теорема Б. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию $V(x_1, \ldots, x_n)$, полная производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция знакоопределенная знака, противоположного с V, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Теорема В. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти функцию $V(x_1, \ldots, x_n)$ такую, что ее полная производная по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция знакоопределенная, а сама функция V может принимать значения знака, противоположного с dV/dt, то невозмущенное движение неустойчиво.

Задача 18.53. Дана система дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = -y + \alpha x^3, \quad \frac{dy}{dt} = x + \alpha y^3. \tag{1}$$

Определить устойчивость частного решения $x = y = 0$.

Решение. Составим функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \tag{2}$$

Производная по времени от этой функции будет

$$\frac{dV}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}.$$

Заменим производные dx/dt и dy/dt их значениями из уравнений (1). Тогда получим

$$\frac{dV}{dt} = x(-y + \alpha x^3) + y(x + \alpha y^3) = \alpha(x^4 + y^4). \tag{3}$$

При $\alpha > 0$ функция Ляпунова (2) и ее полная производная по времени (3) будут знакоопределенными одного знака (определенно-положительными). Следовательно, согласно теореме В, невозмущенное движение $x = 0$, $y = 0$ неустойчиво.

При $\alpha < 0$ функция Ляпунова (2) и ее полная производная по времени (3) будут знакоопределенными функциями противоположного знака. Согласно теореме Б частное решение устойчиво асимптотически.

При $\alpha = 0$ уравнения возмущенного движения принимают вид

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x. \tag{4}$$

Продифференцировав первое из этих уравнений по времени и учтя второе, находим

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0.$$

Аналогично находим

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

Отсюда получаем

$$x=a\cos(t+t_0),\qquad y=a\sin(t+t_0).$$

Таким образом, при $\alpha=0$ движение устойчиво. Заметим, что систему (4) можно рассматривать как линеаризованную систему уравнений (1). Ответ, полученный в данном случае для линеаризованной системы, не совпадает с правильными ответами, полученными для исходной системы. Характер движения здесь определяется именно нелинейными членами и отбрасывать их нельзя.

ГЛАВА XIX
ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Для многих динамических систем, содержащих силы сопротивления, под установившимся движением понимается движение, не зависящее от начальных условий и определяемое только действующими на систему силами. Простейшим примером установившегося движения являются вынужденные колебания, возникающие в линейной механической системе.

Это движение устанавливается не сразу, а через некоторый промежуток времени после начала движения. Процесс прихода системы к установившемуся движению называется переходным процессом. Обычно переходный процесс является затухающим колебательным или затухающим апериодическим.

В машинах переходный процесс возникает при пуске и остановке, при переходе с одного режима работы на другой, а также при сбросе или увеличении полезной нагрузки.

Во многих случаях при исследовании переходных процессов в динамических системах удобно пользоваться не классическим методом интегрирования дифференциальных уравнений движения, а операционным исчислением, в основе которого лежит преобразование Лапласа. Одна из причин этого состоит в том, что при интегрировании дифференциальных уравнений вычисление постоянных интегрирования при большом их числе является трудоемкой операцией. При использовании преобразования Лапласа начальные условия учитываются автоматически и операция вычисления произвольных постоянных отпадает. Вторая причина заключается в том, что преобразование Лапласа позволяет заменить операции дифференцирования и интегрирования функций простыми операциями умножения и деления. Это дает возможность сводить решение дифференциальных уравнений к решению алгебраических уравнений.

§ 1. Преобразование Лапласа

1°. Вводные замечания. Изображением по Лапласу (L-изображением) или преобразованием по Лапласу функции $f(t)$ вещественного аргумента t называется интеграл

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = F(p), \qquad (1^*)$$

где $p = s + i\sigma$ — некоторый комплексный параметр. Поскольку p в подынтегральном выражении является параметром, значение интеграла определяется величиной этого параметра и видом функции $f(t)$, но не зависит от переменной интегрирования t. Таким образом, интеграл является функцией комплексного аргумента p, что и подчеркнуто в равенстве (1*).

Функцию $f(t)$ называют оригиналом, а функцию $F(p)$ — изображением и кратко записывают это обстоятельство так:

$$F(p) \dashrightarrow f(t) \quad \text{или} \quad f(t) \dashleftarrow F(p), \tag{2*}$$

что читается «$f(t)$ преобразуется в $F(p)$» (стрелка всегда направлена к оригиналу).

Условимся оригиналы обозначать малыми буквами латинского алфавита, а их изображения — соответствующими большими латинскими буквами. Например, будем считать, что

$$x(t) \dashleftarrow X(p), \qquad y(t) \dashleftarrow Y(p). \tag{3*}$$

Для многих часто встречающихся функций составлены таблицы изображений, которыми и следует пользоваться при решении задач.

Обратим внимание на следующие обстоятельства:

1) Интеграл в равенстве (1*) является несобственным интегралом первого рода, если функция $f(t)$ непрерывна или имеет только разрывы первого рода, что будет в дальнейшем предполагаться. Следовательно, встает вопрос о его сходимости. Можно показать, что для функций, растущих не быстрее, чем экспоненциальная функция e^{at}, этот интеграл всегда сходится, если вещественная часть s числа p достаточно велика. Поэтому в тех простейших приложениях, которые будут рассмотрены, можно не исследовать сходимость интеграла (1*), условившись раз навсегда, что s достаточно велико. Однако следует помнить, что существуют функции, например $f(t) = e^{t^2}$, которые растут быстрее экспоненты и для которых интеграл (1*) расходится; следовательно, изображение в этом случае не существует.

2) Очевидно, что изображение, определяемое формулой (1*), зависит только от значений функции $f(t)$ при $t \geqslant 0$, поскольку нижний предел в интеграле равен 0. Значения $f(t)$ при отрицательных t никакой роли не играют и могут быть какими угодно. Удобно считать, что $f(t) = 0$ при $t < 0$. Для упрощения письма это обстоятельство, как правило, не записывается, а только подразумевается. Так, например, запись

$$f(t) = t \tag{4*}$$

следует понимать как

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ t & \text{при} \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{5*}$$

В частности единичную функцию Хевисайда (единичный скачок)

$$\sigma_0(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ 1 & \text{при } t\geqslant 0\end{cases} \tag{6*}$$

будем обозначать просто 1, т. е. вместо $f(t)=\sigma_0(t)$ писать $f(t)=1$.

График единичной функции изображен на рис. 19.1. Единичная функция очень удобна для записи тех функций, которые будут рассматриваться в этой главе. Так, например, запись

$$f(t)=t\sigma_0(t) \tag{7*}$$

равносильна записи (5*). Аналогично любую функцию $f(t)$, с которой здесь придется иметь дело, можно представить как $f(t)\sigma_0(t)$. Однако для упрощения формул множитель $\sigma_0(t)$ будем опускать, если это не может повести к недоразумениям, но о его существовании всегда следует помнить.

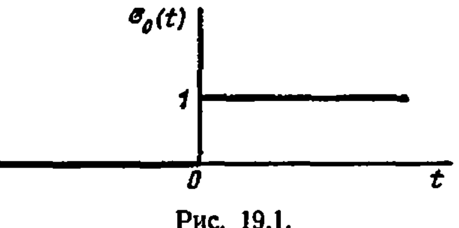


Рис. 19.1.

3) Формула (1*) однозначно определяет изображение по оригиналу. Оригинал по изображению также определяется однозначно в точках непрерывности оригинала, а в точках разрыва ему можно приписать любое значение, поскольку значения $f(t)$ в отдельных точках не влияют на величину интеграла (1*) и, следовательно, не могут быть определены из $F(p)$. За значение оригинала в точках его разрыва принимается предел справа, т. е.

$$f(t_i)=f(t_i+0), \tag{8*}$$

где t_i — точка разрыва функции $f(t)$.

Для нахождения изображения по оригиналу, а также оригинала по изображению в простейших случаях можно пользоваться сравнительно небольшой таблицей изображений. Если изображение в таблице отсутствует, то во многих случаях его можно привести к виду, имеющемуся в таблице, с помощью теорем об основных свойствах изображений, речь о которых пойдет ниже. Приведем краткие таблицы изображений (табл. 1 и 2), достаточные для решения задач, которые нам встретятся. В литературе можно найти более подробные таблицы.

2°. Основные свойства преобразования Лапласа. Знание основных свойств изображений необходимо для практического использования операционного исчисления. Все эти свойства выводятся из формулы (1*).

Умножение на постоянную. При умножении оригинала на постоянную величину c изображение умножается на ту же постоянную, и наоборот, т. е.

$$cf(t) \doteqdot cF(p). \tag{9*}$$

Таблица 1

№	Оригиналы $f(t)$	Изображения $F(p)$	№	Оригиналы $f(t)$	Изображения $F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	10	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	11	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	12	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
4	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	18	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
5	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	14	$te^{at}\sin\omega t$	$\frac{2\omega(p-a)}{[(p-a)^2+\omega^2]^2}$
6	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	15	$te^{at}\cos\omega t$	$\frac{(p-a)^2-\omega^2}{[(p-a)^2+\omega^2]^2}$
7	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	16	$\frac{1}{2\omega^3}e^{at}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	$\frac{1}{[(p-a)^2+\omega^2]^2}$
8	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	17	$\frac{1}{2\omega^3}e^{at}(a\sin\omega t-a\omega t\cos\omega t+\omega^2 t\sin\omega t)$	$\frac{p}{[(p-a)^2+\omega^2]^2}$
9	$\operatorname{ch} at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$			

Изображение суммы нескольких функций. Изображение алгебраической суммы конечного числа оригиналов равно сумме их изображений, т. е., если

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} f_i(t) \tag{10*}$$

и

$$f_i(t) \leftarrow F_i(p) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad f(t) \leftarrow F(p),$$

то

$$F(p)=\sum_{i=1}^{n} F_i(p). \tag{11*}$$

Обе сформулированные теоремы, взятые в совокупности, выражают свойство линейности преобразования Лапласа. Они позволяют находить изображение (или оригинал) любой линейной комбинации функций, входящих в табл. 1.

Изменение масштаба аргумента. Имеет место следующее свойство:

$$f(\alpha t) \leftarrow \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \text{причем} \quad \alpha > 0. \tag{12*}$$

Таблица 2

№	Оригиналы $f(t)$	Изображения $F(p)$
1	Прямоугольная волновая функция	$\frac{1}{p}\,\text{th}\left(\frac{ap}{2}\right)$
2	Выпрямленный синус волновой функции	$\frac{\pi a}{a^2p^2+\pi^2}\,\text{cth}\,\frac{ap}{2}$
3	Половина выпрямленного синуса волновой функции	$\frac{\pi a}{(a^2p^2+\pi^2)(1-e^{-ap})}$
4	Пилообразная волновая функция	$\frac{1}{ap^2}-\frac{e^{-ap}}{p(1-e^{-ap})}$
5	Единичная функция Хевисайда $U(t-a)$	$\frac{e^{-ap}}{p}$

Таблица 2 (*продолжение*)

№	Оригиналы $f(t)$	Изображения $F(p)$
6	Импульсная функция	$\frac{e^{-ap}(1-e^{\varepsilon p})}{p}$
7	Ступенчатая функция	$\frac{1}{p(1-e^{-ap})}$
8	$f(t)=n^2,\ n\leqslant t\leqslant n+1,$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{e^{-p}+e^{-2p}}{p(1-e^{-p})^2}$
9	$f(t)=r^n,\ n\leqslant t\leqslant n+1$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{1-e^{-p}}{p(1-re^{-p})}$
10	$f(t)=\begin{cases}\sin(\pi t/a), & 0\leqslant t\leqslant a,\\ 0 & t>a\end{cases}$	$\frac{\pi a(1+e^{-ap})}{a^2p^2+\pi^2}$
11	Треугольная волновая функция	$\frac{1}{ap^2}\,\mathrm{th}\left(\frac{ap}{2}\right)$

Случай $\alpha < 0$ не рассматривается ввиду следующего обстоятельства. При $\alpha < 0$ и $t > 0$ имеем $\alpha t < 0$, т. е. оригинал тождественно равен нулю. Но согласно принятому условию при $t < 0$ любой оригинал равен нулю. Поэтому при $\alpha < 0$ следует считать, что $f(\alpha t) = 0$ при любом t, кроме, может быть, точки $t = 0$.

Теорема запаздывания (теорема смещения оригинала). Рассмотрим два процесса, представленных на рис. 19.2*а* и *б*. Графики

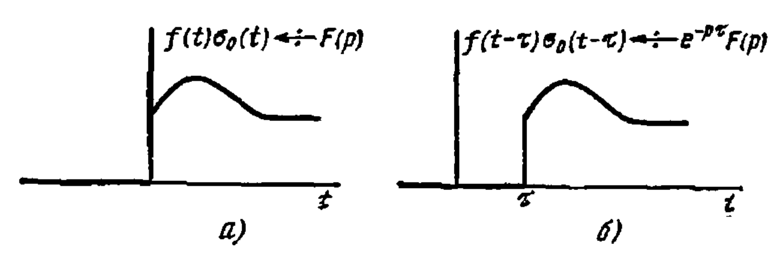


Рис. 19.2. *а*) График процесса $f(t)\,\sigma_0(t)$; *б*) График запаздывающего процесса $f(t-\tau)\,\sigma_0(t-\tau)$.

на обоих рисунках одинаковые, но вторая кривая смещена на величину τ вдоль оси t, т. е. начало второго процесса как бы запаздывает на время τ по отношению к началу отсчета времени.

Теорема запаздывания позволяет, зная изображение функции $f(t)\,\sigma_0(t)$, определяющей течение во времени некоторого процесса, найти изображение функции $f(t-\tau)\cdot\sigma_0(t-\tau)$, которая определяет течение того же процесса, но запаздывающего на время τ (рис. 19.2).

В сокращенной записи теорема запаздывания выглядит так:

$$f(t-\tau) \leftarrow e^{-p\tau}F(p), \quad \text{где} \quad \tau \geqslant 0,$$

причем здесь необходимо сделать оговорку, что при $t < \tau$ левая часть тождественно равна нулю.

Эту теорему можно записать в строгой форме с помощью единичной функции Хевисайда. Она имеет вид

$$f(t-\tau)\,\sigma_0(t-\tau) \leftarrow e^{-p\tau}F(p), \tag{13*}$$

где

$$F(p) \rightarrow f(t) \quad \text{и} \quad \tau \geqslant 0.$$

При точной записи равенство нулю оригинала при $t < \tau$ обеспечивает множитель $\sigma_0(t-\tau)$. Условие $\tau \geqslant 0$ необходимо, так как при $\tau < 0$ в промежутке $\tau < t < 0$ получается, что $t-\tau > 0$ и $f(t-\tau)$, вообще говоря, не равно нулю, тогда как по принятому соглашению оригинал должен быть равен нулю при $t < 0$.

Функция Дирака. Изображение произвольной импульсивной функции определяется шестой строкой табл. 2. Если основание прямоугольника ε стремится к нулю, а его высота неограниченно возрастает так, что площадь прямоугольника (величина импульса) остается

все время равной единице (единичный импульс), то соответствующая функция называется дельта-функцией Дирака (по имени известного физика). Обозначается дельта-функция Дирака символом $\delta(t-\tau)$, где τ — момент начала действия импульса. Изображение дельта-функции Дирака определяется соотношением

$$\delta(t-\tau) = e^{-p\tau}. \tag{14*}$$

Теорема смещения. Эта теорема дает возможность найти оригинал для изображения $F(p+a)$, если известен оригинал $f(t) \leftarrow F(p)$. Теорема записывается так:

$$F(p+a) \rightarrow e^{-at}f(t), \tag{15*}$$

где a — любое число, вообще говоря, комплексное.

Теорема смещения позволяет, например, получить строку 11 табл. 1 из строки 7 той же таблицы. Поскольку в таблице имеются почти все простейшие оригиналы с множителем e^{-at}, теорема смещения будет использоваться редко.

Изображение производной. Теорема об изображении производной является основной, так как на ней покоится сама идея операционного метода. Записывается теорема так:

$$f'(t) \leftarrow pF(p) - f(0). \tag{16*}$$

В важном частном случае, если $f(0)=0$, имеем

$$f'(t) \leftarrow pF(p), \tag{17*}$$

т. е. операции дифференцирования оригинала соответствует умножение изображения на число p.

Пользуясь теоремой (16*), можно многие строчки табл. 1 получить из других строчек этой же таблицы.

Изображения высших производных. Для производных порядка n имеет место соответствие

$$f^{(n)}(t) \leftarrow p^nF(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1}f^{(k)}(0), \tag{18*}$$

или в более подробной записи

$$f^{(n)}(t) \leftarrow p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots$$
$$\ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{19*}$$

Здесь, как обычно, за производную нулевого порядка принимается исходная функция. В частности, если

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0, \tag{20*}$$

то

$$f^{(n)}(t) \leftarrow p^nF(p). \tag{21*}$$

Для производной второго порядка, которая часто встречается в задачах механики, имеем

$$f''(t) \doteqdot p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \qquad (22^*)$$

а при нулевых начальных условиях, когда $f(0) = f'(0) = 0$,

$$f''(t) \doteqdot p^2F(p). \qquad (23^*)$$

Изображение интеграла. Теорема об изображении интеграла имеет вид

$$\int_0^t f(t)\,dt \doteqdot \frac{F(p)}{p}, \qquad (24^*)$$

т. е. интегрированию оригинала в пределах от 0 до t соответствует деление изображения на число p.

Эта теорема применяется при решении уравнений, содержащих интегралы. Ею можно также пользоваться для нахождения изображений некоторых функций по известным изображениям других функций.

Дифференцирование изображения. Имеет место следующее свойство:

$$\frac{dF(p)}{dp} \doteqdot -tf(t), \qquad (25^*)$$

т. е. дифференцированию изображения по p соответствует умножение оригинала на $(-t)$.

В общем случае производной порядка n имеем

$$\frac{d^nF(p)}{dp^n} \doteqdot (-1)^n t^n f(t). \qquad (26^*)$$

Легко заметить аналогию между свойством дифференцирования оригинала и свойством дифференцирования изображения.

Соотношениями (25*) и (26*) можно пользоваться для получения одних изображений через другие, а также при решении линейных дифференциальных уравнений с переменными полиномиальными коэффициентами.

Дифференцирование по параметру. Это свойство относится к часто встречающемуся случаю, когда оригинал зависит не только от независимой переменной t, но и от некоторого параметра α. Например, для функции $t^2 \sin \omega t$ множитель ω является параметром; функция $e^{at} \cos \omega t$ содержит два параметра: a и ω. Если оригинал зависит от параметра, то от этого же параметра зависит и соответствующее изображение. Табл. 1 дает немало примеров этому.

Имеет место следующая теорема:

$$\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} \doteqdot \frac{\partial F(p, \alpha)}{\partial \alpha}, \qquad (27^*)$$

т. е. изображение производной оригинала по параметру равно производной изображения оригинала по тому же параметру. Эта теорема вытекает из теоремы Лейбница о дифференцировании определенного интеграла по параметру и требует выполнения некоторых условий, при которых справедлива формула Лейбница. Для тех функций, с которыми здесь придется сталкиваться, эти условия всегда выполняются.

Теорема свертывания (теорема Бореля). Сверткой или складкой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция

$$f(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{28*}$$

Очевидно, что в этой формуле функции f_1 и f_2 можно поменять местами — результат от этого не изменится. Операция получения складки называется свертыванием функций, откуда и происходит название теоремы.

Теорема формулируется так: если

$$f_1(t) \dot{\leftarrow} F_1(p) \quad \text{и} \quad f_2(t) \dot{\leftarrow} F_2(p),$$

то

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,dt \dot{\leftarrow} F_1(p)\cdot F_2(p), \tag{29*}$$

т. е. изображением свертки двух функций является произведение изображений этих функций. Эту теорему называют также теоремой об умножении изображений.

Теорема свертывания позволяет выразить реакцию системы на сложное воздействие через ее реакцию на более простое воздействие, что часто представляет определенные выгоды.

Основные свойства преобразования Лапласа, рассмотренные в этом параграфе, сведены в табл. 3.

3°. Нахождение оригиналов для дробно-рациональных изображений. При применении преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами встречаются изображения в виде дробно-рациональной функции, т. е. отношения двух полиномов:

$$F(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}=\frac{a_0p^m+a_1p^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0p^n+b_1p^{n-1}+\ldots+b_n}, \tag{30*}$$

причем алгебраическая дробь (30) правильная, т. е. $n>m$. Необходимо поэтому уметь находить оригиналы для изображений вида (30*). Этот вопрос и будет рассмотрен в настоящем параграфе.

Таблица 3

№	Свойства	Оригинал	Изображение
1	Умножение на постоянную	$cf(t)$	$cF(p)$
2	Изображение суммы	$\sum_{i=1}^{n} f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} F_i(p)$
3	Изменение масштаба	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
4	Теорема запаздывания	$f(t-\tau)\,\sigma_0(t-\tau)$	$e^{-p\tau} \cdot F(p)$
5	Теорема смещения	$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
6	Изображение производной	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
6ª	Изображение высших производных	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots$ $\ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
7	Изображение интеграла	$\int_0^t f(t)\,dt$	$\frac{1}{p} F(p)$
8	Дифференцирование изображения	$-tf(t)$	$\frac{dF(p)}{dp}$
9	Дифференцирование по параметру	$\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial F(p, \alpha)}{\partial \alpha}$
10	Теорема свертывания	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$

Для решения поставленной задачи в общем случае применяется известный из курса математики прием — разложение правильной алгебраической дроби на простейшие. При этом можно использовать как элементарные методы разложения, так и излагаемую в руководствах по преобразованию Лапласа теорему разложения Хевисайда. И в том, и в другом случае необходимо знать корни знаменателя дроби, т. е. значения p_i, для которых $Q(p_i)=0$. В простейших случаях эти корни известны или легко находятся подбором, в более сложных приходится определять их приближенными способами. Поскольку это всегда можно сделать, будем считать корни знаменателя известными. Они могут быть простыми и кратными, вещественными и комплексными. Коэффициенты b_i полинома $Q(p)$ будем считать вещественными, тогда комплексные корни будут попарно сопряженными.

В зависимости от корней знаменателя в разложении дроби (30*) могут встретиться простейшие дроби четырех типов:

$$1)\ \frac{A}{p-a};\qquad 2)\ \frac{A}{(p-a)^k};$$

$$3)\ \frac{Ap+B}{p^2+bp+c},\ b^2-4c<0;\qquad 4)\ \frac{Ap+B}{(p^2+bp+c)^k},$$

где A, B, b, c — вещественные постоянные, а k — натуральное число. Типы 1) и 2) соответствуют вещественным корням знаменателя, причем величина $a=p_i$, где p_i — корни $Q(p)$, а типы 3) и 4) соответствуют комплексным корням знаменателя (в частном случае чисто мнимых корней $b=0$).

Оригиналы для дробей типов 1) и 2) имеются в строках 4 и 5 табл. 1 (постоянный множитель может быть приписан в обеих частях согласно свойству 1 табл. 3). В случае нулевого корня ($a=0$) следует использовать строки 1, 2 и 3 табл. 1.

Оригиналы для простейших дробей типа 3) имеются в строках 10 и 11 табл. 1. При построении этих оригиналов приходится использовать также первое свойство преобразования Лапласа. Для приведения дроби к табличному виду нужно выделить в знаменателе полный квадрат. При чисто мнимых корнях используются строки 6 и 7.

§ 2. Переходные процессы

Как уже говорилось, метод преобразования Лапласа позволяет свести задачу интегрирования линейных дифференциальных уравнений к алгебраическим операциям. Преимущество этого метода перед классическим заключается, с одной стороны, в автоматическом учете начальных условий, с другой стороны, в существенном упрощении процесса решения уравнений, в правой части которых стоят функции, имеющие различные аналитические выражения на различных отрезках изменения аргумента, или неэлементарные функции, например функция Дирака. Кроме того, рассматриваемый метод позволяет находить

независимо друг от друга установившееся движение и переходный процесс.

Рассмотрим колебательную систему с одной степенью свободы, приведенное дифференциальное уравнение движения которой имеет вид

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=h(t). \tag{31*}$$

Начальные условия запишем в общем виде

$$x(0)=x_0, \quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0. \tag{32*}$$

Введя обозначения

$$X(p) \rightarrow x(t) \quad \text{и} \quad H(p) \rightarrow h(t) \tag{33*}$$

и воспользовавшись теоремой об изображении производных, получим

$$\ddot{x} \leftarrow p^2X(p)-px_0-\dot{x}_0,$$
$$2n\dot{x} \leftarrow 2n[pX(p)-x_0],$$
$$k^2x \leftarrow k^2X(p).$$

Тогда согласно (31*), изображающее уравнение будет

$$(p^2+2np+k^2)X(p)-(p+2n)x_0-\dot{x}_0=H(p). \tag{34*}$$

Отсюда находим изображение искомой функции

$$X(p)=\frac{1}{p^2+2np+k^2}[H(p)+(p+2n)x_0+\dot{x}_0]. \tag{35*}$$

Уравнение (35*) можно коротко записать в виде

$$X(p)=G(p)\cdot F(p), \tag{36*}$$

где

$$G(p)=\frac{1}{p^2+2np+k^2}, \quad F(p)=H(p)+(p+2n)x_0+\dot{x}_0. \tag{37*}$$

Структура уравнения (36*) является типичной для изображений решений, получаемых с помощью преобразования Лапласа. Первый сомножитель правой части $G(p)$ зависит только от параметров системы. Он представляет собой величину, обратную характеристической функции системы (т. е. левой части характеристического уравнения системы) и называется *передаточной функцией* системы. Второй сомножитель при заданных параметрах системы определяется видом возмущающего воздействия и начальными условиями. Понятием передаточной функции широко пользуются в теории автоматического регулирования.

Искомая функция $x(t)$, определяющая движение системы, находится из (35*) путем обратного преобразования.

Уравнение (35*) можно переписать в виде

$$X(p)=\frac{1}{\sqrt{k^2-n^2}}\cdot\frac{\sqrt{k^2-n^2}}{(p+n)^2+k^2-n^2}\cdot H(p)+$$
$$+x_0\frac{p+n}{(p+n)^2+k^2-n^2}+\frac{nx_0+\dot{x}_0}{\sqrt{k^2-n^2}}\cdot\frac{\sqrt{k^2-n^2}}{(p+n)^2+k^2-n^2}. \qquad (38^*)$$

Применив теорему свертывания (для первого члена) и воспользовавшись таблицей изображений, находим искомый оригинал:

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{k^2-n^2}}\int_0^t e^{-n(t-\tau)}\sin\sqrt{k^2-n^2}(t-\tau)\cdot h(\tau)\,d\tau+$$
$$+e^{-nt}\left(x_0\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t+\frac{nx_0+\dot{x}_0}{\sqrt{k^2-n^2}}\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t\right). \qquad (39^*)$$

Обратимся снова к уравнению (36*), к которому приводится линейное дифференциальное уравнение любого порядка с постоянными коэффициентами. Предположим, что возмущающее воздействие представляет собой единичный импульс, т. е.

$$h(t)=\sigma_1(t),$$

а все начальные условия — нулевые. Тогда, поскольку $\sigma_1(t) \leftarrow 1$, из (37*) следует $F(p)=H(p)$, и уравнение (36*) принимает вид

$$X_{\sigma_1}(p)=G(p),$$

откуда

$$x_{\sigma_1}(t)=g(t), \qquad (40^*)$$

где $g(t) \leftarrow G(p)$.

Таким образом, реакция системы на единичный импульс при нулевых начальных условиях дается оригиналом передаточной функции системы. Поэтому функцию $g(t)$ называют реакцией (ответом, откликом) системы на единичный импульс (при нулевых начальных условиях).

Если система подвергается произвольному возмущающему воздействию $h(t)$ при произвольных начальных условиях $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$ и т. д., то из уравнения (36*) на основании теоремы свертывания следует

$$x(t)=\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)\,d\tau, \qquad (41^*)$$

где $f(t) \leftarrow F(p)$ — оригинал полного возмущающего воздействия на систему. Уравнение (41*), впервые полученное Борелем, позволяет находить реакцию системы на любое воздействие, зная ее реакцию на единичный импульс.

Решение задач рекомендуется производить в следующем порядке:

1) составить дифференциальное уравнение движения системы;

2) перейти к изображающему уравнению, заменив все члены дифференциального уравнения их изображениями по Лапласу, с учетом начальных условий;

3) решить изображающее уравнение относительно изображения искомой функции;

4) использовав таблицу изображений, основные теоремы операционного исчисления и методы, рассмотренные в § 3, перейти от найденного изображения искомой функции к оригиналу.

Задача 19.1. Система масса — пружина — демпфер подвергается синусоидальному возмущающему воздействию. Определить движение системы при нулевых начальных условиях.

Решение. Дифференциальное уравнение движения колебательной системы имеет вид

$$m\ddot{x}+\beta\dot{x}+cx=f\sin\omega t.$$

Обозначив $2n=\beta/m$, $k^2=c/m$, $h=f/m$, перепишем его в виде

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=h\sin\omega t. \qquad (1)$$

Пусть

$$x(t)\leftarrow X(p).$$

c

m

К задаче 19.1.

Тогда, применив правило об изображении производных и учтя, что $x_0=\dot{x}_0=0$, запишем уравнение (1) в изображениях по Лапласу (см. также табл. 1, строку 6):

$$(p^2+2pn+k^2)X(p)=h\frac{\omega}{p^2+\omega^2}; \qquad (2)$$

отсюда сразу находится изображание искомого решения

$$X(p)=\frac{h\omega}{(p^2+\omega^2)(p^2+2np+k^2)}. \qquad (3)$$

Чтобы осуществить переход от изображения к оригиналу, разложим дробь, стоящую в правой части равенства (3) на простейшие дроби.

Рассмотрим чаще всего встречающийся на практике случай малого сопротивления $n<k$. Тогда корни квадратного трехчлена в знаменателе будут комплексными и можно записать:

$$\frac{h\omega}{(p^2+\omega^2)(p^2+2np+k^2)}=\frac{Ap+B}{p^2+\omega^2}+\frac{Cp+D}{p^2+2np+k^2}, \qquad (4)$$

где A, B, C и D — постоянные, подлежащие определению.

На основании равенства (4) можем записать

$$h\omega=(Ap+B)(p^2+2np+k^2)+(cp+D)(p^2+\omega^2),$$

или

$$h\omega=(A+C)p^3+(2nA+B+D)p^2+(k^2A+2nB+\omega^2C)p+ \\ +k^2B+\omega^2D. \qquad (5)$$

Приравняв в обеих частях этого тождества коэффициенты при одинаковых степенях p, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A, B, C и D:

$$\left.\begin{aligned} p^3&:\ A+C=0,\\ p^2&:\ 2nA+B+D=0,\\ p&:\ k^2A+2nB+\omega^2C=0,\\ p^0&:\ k^2B+\omega^2D=\omega h.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Решив эту систему, найдем

$$A=-C=-\frac{2n\omega h}{4n^2\omega^2+(k^2-\omega^2)^2},$$
$$B=\frac{\omega h(k^2-\omega^2)}{4n^2\omega^2+(k^2-\omega^2)^2},$$
$$D=\frac{\omega h(\omega^2+4n^2-k^2)}{4n^2\omega^2+(k^2-\omega^2)^2}.$$

Тогда, исходя из (3) и (4), можно записать

$$X(p)=\frac{\omega h}{4n^2\omega^2+(k^2-\omega^2)^2}\left(-\frac{2np}{p^2+\omega^2}+\frac{k^2-\omega^2}{p^2+\omega^2}+\right. \\ \left.+\frac{2np}{p^2+2np+k^2}+\frac{\omega^2+4n^2-k^2}{p^2+2np+k^2}\right). \qquad (7)$$

Имея в виду воспользоваться таблицей изображений, преобразуем полученное выражение

$$X(p)=\frac{h}{4n^2\omega^2+(k^2-\omega^2)^2}\left[(k^2-\omega^2)\frac{\omega}{p^2+\omega^2}-2n\omega\frac{p}{p^2+\omega^2}+\right. \\ \left.+(\omega^2+2n^2-k^2)\frac{\omega}{\sqrt{k^2-n^2}}\cdot\frac{\sqrt{k^2-n^2}}{(p+n)^2+k^2-n^2}+2n\omega\frac{p+n}{(p+n)+k^2-n^2}\right]. \qquad (8)$$

С помощью таблицы изображений и теоремы смещения находим искомый оригинал

$$x(t)=\frac{h}{4n^2\omega^2+(k^2-\omega^2)^2}\left\{(k^2-\omega^2)\sin\omega t-2n\omega\cos\omega t+\right. \\ +e^{-nt}\left[(\omega^2+2n^2-k^2)\frac{\omega}{\sqrt{k^2-n^2}}\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t+\right. \\ \left.\left.+2n\omega\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t\right]\right\}. \qquad (9)$$

Полученное решение можно представить в более компактной форме, если учесть, что

$$A\sin\omega t+B\cos\omega t=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega t+\varphi),$$

где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{B}{A}$, причем $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ при $A>0$, $B>0$,

$$\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi \quad \text{при } A<0,\quad B>0,$$

$$\pi<\varphi<\frac{3}{2}\pi \quad \text{при } A<0 \text{ и } B<0,$$

$$\frac{3}{2}\pi<\varphi<2\pi \quad \text{при } A>0 \text{ и } B<0.$$

Имеем

$$x(t)=\frac{h}{4n^2\omega^2+(k^2-\omega^2)^2}\Big[\sqrt{4n^2\omega^2+(k^2-\omega^2)^2}\sin(\omega t+\gamma)+$$
$$+e^{-nt}\sqrt{(\omega^2+2n^2-k^2)^2+4n^2(k^2-n^2)}\frac{\omega}{\sqrt{k^2-n^2}}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\delta\right)\Big],$$

где

$$\operatorname{tg}\gamma=-\frac{2n\omega}{k^2-\omega^2},\quad \operatorname{tg}\delta=\frac{2n\sqrt{k^2-n^2}}{\omega^2+2n^2-k^2}, \tag{10}$$

или после упрощений

$$x(t)=\frac{h}{\sqrt{4n^2\omega^2+(k^2-\omega^2)^2}}\Big[\sin(\omega t+\gamma)+$$
$$+e^{-nt}\frac{\omega}{\sqrt{k^2-n^2}}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\delta\right)\Big]. \tag{11}$$

Второе слагаемое в квадратных скобках убывает с возрастанием времени t. Оно описывает переходный процесс в системе, т. е. свободные затухающие колебания. Первое слагаемое дает установившееся движение системы — вынужденные гармонические колебания с частотой, равной частоте возмущающей силы.

При отсутствии сопротивления следует положить в формуле (9) $n=0$. Тогда получим

$$x(t)=\frac{h}{k^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{k}\sin kt\right). \tag{9a}$$

Рассмотрим явление резонанса. При отсутствии сопротивления ($n=0$) изображение (7) принимает вид

$$X(p)=\frac{\omega h}{k^2-\omega^2}\left(\frac{1}{p^2+\omega^2}-\frac{1}{p^2+k^2}\right). \tag{12}$$

При резонансе, если положить $\omega=k$, правая часть превращается в неопределенность вида 0/0. Пользуясь правилом Лопиталя, получим

$$X(p)=\frac{\omega h}{\frac{d}{d\omega}(k^2-\omega^2)}\cdot\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{p^2+\omega^2}-\frac{1}{p^2+k^2}\right)=\frac{\omega h}{(p^2+\omega^2)^2} \tag{13}$$

или

$$X(p)=\frac{h}{2p}\cdot\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}=F_2(p)\cdot F_1(p). \quad (14)$$

Находим для каждого сомножителя изображения оригинал по табл. 1

$$F_1(p)=\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}\to t\sin\omega t,$$

$$F_2(p)=\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{p}\to\frac{h}{2}.$$

По теореме свертывания находим оригинал

$$F_1(p)\cdot F_2(p)=\frac{h}{2p}\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}\to\int_0^t\frac{h}{2}\tau\cdot\sin\omega\tau\cdot d\tau=$$

$$=\frac{h}{2\omega}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t-t\cos\omega t\right). \quad (15)$$

Итак, при резонансе

$$x=\frac{h}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin\omega t-t\cos\omega t\right). \quad (16)$$

Второй член в скобках с течением времени неограниченно возрастает по модулю, что и свидетельствует о наличии резонанса.

Задача 19.2. В условиях предыдущей задачи определить движение, если возмущающее воздействие представляет собой единичный скачок.

Решение. Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=h\sigma_0(t). \quad (1)$$

Поскольку начальные условия нулевые, а $\sigma_0(t)\leftarrow\frac{1}{p}$, то уравнение (1) в изображениях запишется так:

$$(p^2+2np+k^2)X(p)=\frac{h}{p}, \quad (2)$$

откуда

$$X(p)=h\cdot\frac{1}{p(p^2+2np+k^2)}. \quad (3)$$

Считая, как и ранее $n<k$, разложим дробь, стоящую в правой части равенства (3), на простейшие. Имеем

$$\frac{1}{p(p^2+2np+k^2)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+2np+k^2}, \quad (4)$$

откуда

$$1=A(p^2+2np+k^2)+(Bp+C)p. \quad (5)$$

Для определения неизвестных A, B и C применим метод частных значений. Положив в тождестве (5) $p=0$, получим

$$1=Ak^2 \quad \text{и} \quad A=\frac{1}{k^2}.$$

Значения $p=1$ и $p=-1$ дают еще два уравнения

$$1=A(1+2n+k^2)+B+C,$$
$$1=A(1-2n+k^2)+B-C.$$

Подставив сюда найденное значение для A, после упрощения найдем

$$B+C=-\frac{1+2n}{k^2},$$
$$B-C=-\frac{1-2n}{k^2};$$

отсюда

$$B=-\frac{1}{k^2},\quad C=-\frac{2n}{k^2}.$$

Теперь равенство (3) можно переписать в виде

$$X(p)=\frac{h}{k^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p+2n}{p^2+2np+k^2}\right). \qquad (6)$$

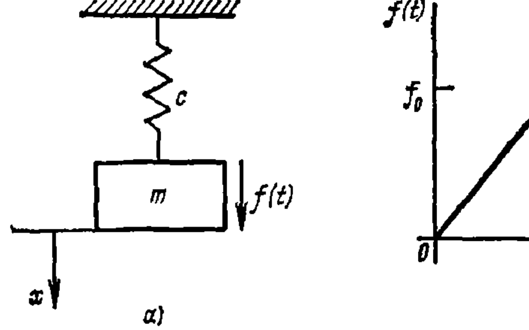
Выделив в знаменателе второй дроби полный квадрат, после преобразования получим

$$X(p)=\frac{h}{k^2}\left[\frac{1}{p}-\frac{p+n}{(p+n)^2+k^2-n^2}-\frac{n}{\sqrt{k^2-n^2}}\cdot\frac{\sqrt{k^2-n^2}}{(p+n)^2+k^2-n^2}\right]. \qquad (7)$$

С помощью таблицы изображений и теоремы смещения находим оригинал

$$x(t)=\frac{h}{k^2}\left[1-e^{-nt}\left(\cos\sqrt{k^2-n^2}t+\frac{n}{\sqrt{k^2-n^2}}\sin\sqrt{k^2-n^2}t\right)\right]. \qquad (8)$$

Первый член полученного решения дает установившееся движение, т. е. в данном случае новое положение статического равновесия системы. Второй и третий члены описывают затухающие колебания системы около этого нового положения равновесия, т. е. переходный процесс.



К задаче 19.3.

Задача 19.3. К массе m, подвешенной на пружине жесткостью c приложено возмущение в виде пилообразной функции периода T (см рисунок). Найти движение системы при нулевых начальных условиях

Решение. Уравнение движения системы имеет вид

$$m\ddot{x}+cx=f(t). \qquad (1$$

Перейдя в этом уравнении от оригиналов к изображениям с учетом начальных условий и изображения пилообразной функции (см. табл. 2), получим

$$(mp^2+c)\,X(p)=\frac{f_0}{T}\left[\frac{1}{p^2}-\frac{Te^{-pT}}{p(1-e^{-pT})}\right]. \qquad (2)$$

Обозначив, как обычно, $c/m=k^2$, найдем из (2) изображение искомой функции

$$X(p)=\frac{f_0}{mT}\left[\frac{1}{p^2(p^2+k^2)}-\frac{Te^{-pT}}{p(p^2+k^2)(1-e^{-pT})}\right]. \qquad (3)$$

Чтобы перейти к оригиналу, разложим выражение, стоящее в квадратных скобках, на простейшие дроби. В данном случае это проще всего сделать с помощью несложного искусственного приема. Имеем

$$\frac{1}{p^2(p^2+k^2)}=\frac{1}{k^2}\cdot\frac{k^2}{p^2(p^2+k^2)}=\frac{1}{k^2}\,\frac{p^2+k^2-p^2}{p^2(p^2+k^2)}=\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+k^2}\right)$$

и

$$\frac{Te^{-pT}}{p(p^2+k^2)(1-e^{-pT})}=\frac{T}{k^2}\,\frac{k^2}{p(p^2+k^2)}\cdot\frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}}=$$

$$=\frac{T}{k^2}\,\frac{p^2+k^2-p^2}{p(p^2+k^2)}\cdot\frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}}=\frac{T}{k^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+k^2}\right)\frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}}.$$

Подставив найденные разложения в выражение (3), получим

$$X(p)=\frac{f_0}{mTk^2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+k^2}\right)+\frac{f_0}{mk^2}\left(\frac{p}{p^2+k^2}-\frac{1}{p}\right)\frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}}. \qquad (4)$$

Заметив, что

$$\frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}}=e^{-pT}+e^{-2pT}+e^{-3pT}+\ldots \to \sigma_0(t-T)+$$

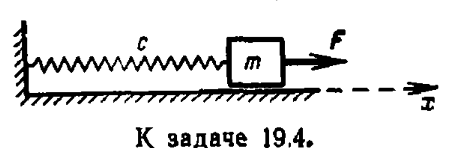
$$+\sigma_0(t-2T)+\sigma_0(t-3T)+\ldots$$

и воспользовавшись таблицей изображений, найдем искомый оригинал

$$x(t)=\frac{f_0}{mTk^3}(kt-\sin kt)+\frac{f_0}{mk^2}[\cos k(t-T)\cdot\sigma_0(t-T)+$$

$$+\cos k(t-2T)\,\sigma_0(t-2T)+\ldots+\sigma_0(t-T)-\sigma_0(t-2T)-\ldots]. \qquad (5)$$

Как видно из полученного решения, на член kt, неограниченно возрастающий с течением времени, накладываются различного вида колебания.



К задаче 19.4.

Задача 19.4. Найти закон движения груза массы m, если коэффициент жесткости пружины c. На груз, кроме того, действует сила $F=F_0 t\cos\omega t$. В начальный момент времени груз был прикреплен к концу нерастянутой пружины и его скорость равнялась нулю.

Решение. Составим дифференциальное уравнение движения груза

$$m\ddot{x} + cx = F_0 t \cos\omega t. \tag{1}$$

Переходим к изображениям, учитывая нулевые начальные условия:

$$mp^2X(p) + cX(p) = F_0\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}. \tag{2}$$

Из этого уравнения находим

$$X(p) = \frac{F_0}{m}\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2\left(p^2+\frac{c}{m}\right)}. \tag{3}$$

Чтобы осуществить переход от изображения к оригиналу, разложим дробь, стоящую в правой части равенства (3) на простейшие дроби

$$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2\left(p^2+\frac{c}{m}\right)} = \frac{Ap+B}{p^2+\omega^2} + \frac{Cp+D}{(p^2+\omega^2)^2} + \frac{Ep+H}{p^2+\frac{c}{m}}. \tag{4}$$

Здесь A, B, C, D, E, H — неизвестные коэффициенты. Для их нахождения приводим правую часть к общему знаменателю и приравниваем в левой и правой частях тождества (4) коэффициенты при одинаковых степенях p:

$$\left.\begin{aligned}
A+E&=0,\\
B+H&=0,\\
A\left(\omega^2+\frac{c}{m}\right)+C+E2\omega^2&=0,\\
B\left(\omega^2+\frac{c}{m}\right)+D+H2\omega^2&=1,\\
A\omega^2\frac{c}{m}+C\frac{c}{m}+E\omega^4&=0,\\
B\omega^2\frac{c}{m}+D\frac{c}{m}+H\omega^4&=-\omega^2.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Решив эту систему линейных алгебраических уравнений, найдем

$$A=C=E=0,\quad B=-H=\frac{c/m+\omega^2}{(c/m-\omega^2)^2},\quad D=-\frac{2\omega^2}{c/m-\omega^2}. \tag{6}$$

Внеся эти значения коэффициентов в равенство (3), имеем

$$X(p) = \frac{F_0}{m}\left[\frac{c/m+\omega^2}{(c/m-\omega^2)^2}\cdot\frac{1}{p^2+\omega^2} - \frac{2\omega^2}{(c/m-\omega^2)(p^2+\omega^2)^2} - \frac{c/m+\omega^2}{(c/m-\omega^2)^2}\cdot\frac{1}{p^2+c/m}\right]. \tag{7}$$

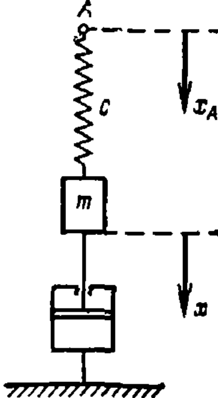
Переходя от изображений к оригиналам, получаем

$$x(t)=\frac{F_0}{m}\left[\frac{c/m+\omega^2}{(c/m-\omega^2)^2}\cdot\frac{\sin\omega t}{\omega}-\frac{2\omega^2}{c/m-\omega^2}\cdot\frac{\sin\omega t-\omega t\cos\omega t}{2\omega^3}-\right.$$
$$\left.-\frac{(c/m+\omega^2)}{(c/m-\omega^2)^2}\frac{\sin\sqrt{c/m}t}{\sqrt{c/m}}\right]. \quad (8)$$

После приведения подобных членов находим закон движения груза

$$x(t)=\frac{2mF_0\omega}{(c-m\omega^2)^2}\sin\omega t+\frac{F_0}{c-m\omega^2}t\cos\omega t-\frac{F_0(c+m\omega^2)}{(c-m\omega^2)^2\sqrt{\frac{c}{m}}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t. \quad (9)$$

Задача 19.5. Груз массы m покоился на конце пружины жесткости c. *Определить закон движения груза, если точка подвеса пружины* A начнет двигаться по вертикали согласно закону



К задаче 19.5.

$$x_A=ae^{-nt}\sin\sqrt{c/m}t,$$

где $n=\alpha/2m$, α — коэффициент вязкого сопротивления среды, пропорционального скорости груза.

Решение. Выбирая начало неподвижных координат в положении статического равновесия груза и направляя ось x по вертикали вниз, составим дифференциальное уравнение движения груза

$$m\ddot{x}=-c(x-x_A)-\alpha\dot{x}, \quad (1)$$

или, учитывая значение x_A,

$$\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{c}{m}x=\frac{c}{m}ae^{-nt}\sin\sqrt{c/m}t. \quad (2)$$

Обозначая для кратности $\alpha/m=2n$, $c/m=k^2$, запишем уравнение (2) в виде

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=k^2ae^{-nt}\sin kt. \quad (3)$$

Переходя от оригинала к изображениям, получим $(x_0=0,\ \dot{x}_0=0)$

$$p^2X(p)+2npX(p)+k^2X(p)=\frac{k^3a}{(p+n)^2+k^2}. \quad (4)$$

Отсюда находим изображение

$$X(p)=\frac{ak^3}{[(p+n)^2+k^2][(p+n)^2+(k^2-n^2)]}. \quad (5)$$

Разложим $X(p)$ на простейшие дроби. Для этого, обозначив для краткости $p+n=z$, представим дробь в виде

$$\frac{1}{(z^2+k^2)(z^2+k^2-n^2)}=\frac{Az+B}{z^2+k^2}+\frac{Cz+D}{z^2+k^2-n^2}, \quad (6)$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях тождества (6), получаем

$$\begin{aligned} A+C&=0,\\ B+D&=0,\\ A(k^2-n^2)+Ck^2&=0,\\ B(k^2-n^2)+Dk^2&=1. \end{aligned} \tag{7}$$

Решая полученную систему алгебраических уравнений, находим

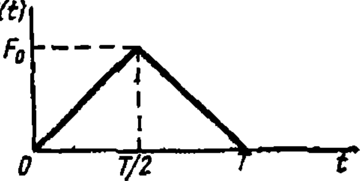
$$A=C=0, \qquad B=-D=-\frac{1}{n^2}. \tag{8}$$

Тогда, изображение может быть записано в виде

$$X(p)=\frac{ak^2}{n^2}\left[\frac{-1}{(p+n)^2+k^2}+\frac{1}{(p+n)^2+(k^2-n^2)}\right]. \tag{9}$$

Возвращаясь от изображений к оригиналам, найдем закон движения груза

$$x(t)=\frac{ae^{-nt}}{n^2}\left[\frac{k^2}{\sqrt{k^2-n^2}}\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t-\right.$$
$$\left.-k^2\sin kt\right]. \tag{10}$$



К задаче 19.6.

Задача 19.6. Материальная точка массы m движется по оси x под действием силы $F(t)$, изображенной на рисунке и направленной вдоль оси x. Полагая начальные условия заданными и нулевыми: $x_0=0$, $\dot{x}_0=0$ при $t=0$, найти уравнение движения точки.

Решение. Найдем изображение функции $F(t)$

$$L[F(t)]=\int_0^\infty e^{-pt}F(t)\,dt=$$
$$=\int_0^{T/2} e^{-pt}\frac{F_0}{T/2}t\,dt+\int_{T/2}^{T} e^{-pt}2F_0\left(1-\frac{t}{T}\right)dt-\int_T^\infty 0\,dt=$$
$$=\frac{2F_0}{T}\left(-\frac{t}{p}e^{-pt}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\right)\Big|_0^{T/2}+$$
$$+2F_0\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right)\Big|_{T/2}^{T}+\frac{2F_0}{T}\left(\frac{t}{p}e^{-pt}+\frac{e^{-pt}}{p^2}\right)\Big|_{T/2}^{T}=$$
$$=\frac{2F_0}{T}\frac{1}{p^2}\left(1-2e^{-pT/2}+e^{-pT}\right). \tag{1}$$

Дифференциальное уравнение движения точки запишется в виде

$$m\ddot{x} = F(t). \qquad (2)$$

Переходя от оригиналов к изображениям, получим

$$mp^2 X(p) = \frac{2F_0}{T}\frac{1}{p^2}(1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}), \qquad (3)$$

откуда

$$X(p) = \frac{2F_0}{mT}\frac{1}{p^4}(1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}). \qquad (4)$$

Возвращаясь от изображения к оригиналу, находим

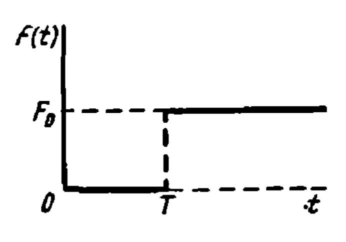
$$x(t) = \frac{F_0}{3mT}\left[t^3 - 2\left(t - \frac{T}{2}\right)^3 \sigma_0\left(t - \frac{T}{2}\right) + (t - T)^3 \sigma_0(t - T)\right]. \qquad (5)$$

Таким образом, точка движется согласно уравнениям

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{3mT}t^3 & \text{при} \quad t < \frac{T}{2}, \\ \frac{F_0}{3mT}\left[t^3 - 2\left(t - \frac{T}{2}\right)^3\right] & \text{при} \quad \frac{T}{2} < t < T, \\ \frac{F_0}{3mT}\left[t^3 - 2\left(t - \frac{T}{2}\right)^3 + (t - T)^3\right] & \text{при} \quad t > T. \end{cases} \qquad (6)$$

Если бы искать решение этой задачи обычным интегрированием дифференциальных уравнений движения, то следовало бы проводить интегрирование на каждом из трех участков, находя начальные условия для второго участка из конечных значений переменных на первом участке. Аналогично нужно было бы поступить на стыке второго и третьего участков.

Задача 19.7. Груз массы m, подвешенный к пружине жесткости c начал движение, имея начальное отклонение от положения равновесия равное x_0 и начальную скорость v_0. Спустя T *сек* на груз начала действовать постоянная сила F_0, направленная по оси x. Определить закон движения груза.



К задаче 19.7.

Решение. Скачок силы может быть записан с помощью единичной функции Хевисайда

$$F(t) = F_0\sigma_0(t - T). \qquad (1)$$

Тогда дифференциальное уравнение движения груза на пружине можно записать в виде

$$m\ddot{x} + cx = F_0\sigma_0(t - T). \qquad (2)$$

Переходя к изображениям, преобразуем уравнение (2) по Лапласу

$$m[p^2 X(p) - px_0 - v_0] + cX(p) = \frac{F_0 e^{-pT}}{p}. \qquad (3)$$

Решая это алгебраическое уравнение, находим изображение

$$X(p)=\frac{x_0 p}{p^2+k^2}+\frac{v_0}{p^2+k^2}+\frac{F_0}{m}\,\frac{e^{-pT}}{p\,(p^2+k^2)}, \tag{4}$$

где для краткости обозначено $c/m=k^2$.

Разлагая последнее слагаемое на простейшие дроби, получим

$$X(p)=\frac{x_0 p}{p^2+k^2}+\frac{v_0}{p^2+k^2}+\frac{F_0}{c}\cdot\frac{1}{p}\,e^{-pT}-\frac{F_0}{c}\cdot\frac{p}{p^2+k^2}\,e^{-pT}. \tag{5}$$

Возвращаясь от изображений к оригиналам, находим искомое уравнение движения груза

$$x(t)=x_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt+\frac{F_0}{c}\,[1-\cos k(t-T)]\,\sigma_0(t-T). \tag{6}$$

Таким образом, груз движется согласно уравнениям

$$x(t)=\begin{cases} x_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt & \text{при } t<T,\\ x_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt+\frac{F_0}{c}\,[1-\cos k(t-T)] & \text{при } t>T. \end{cases} \tag{7}$$

С помощью преобразования Лапласа решение в этой задаче было получено сразу для всего процесса. Если бы при решении задачи применить классический метод интегрирования дифференциальных уравнений движения, то пришлось бы составлять на каждом интервале времени ($t\leqslant T$) и ($t>T$) свое дифференциальное уравнение движения и «сшить» оба решения, приравняв конечные значения координаты и ее производной на первом участке начальным значениям этих переменных на втором участке.

Задача 19.8. Решить предыдущую задачу, если к грузу в момент T приложен мгновенный импульс F_0.

Решение. Мгновенный импульс может быть записан с помощью функции Дирака

$$F(t)=F_0\delta(t-T). \tag{1}$$

Дифференциальное уравнение движения груза будет

$$m\ddot{x}+cx=F_0\delta(t-T). \tag{2}$$

Переходя к изображениям, имеем (см. формулу (14*))

$$m\,[p^2X(p)-px_0-v_0]+cX(p)=F_0e^{-pT}, \tag{3}$$

Решая это алгебраическое уравнение, находим

$$X(p)=\frac{px_0}{p^2+k^2}+\frac{v_0}{p^2+k^2}+\frac{F_0}{m}\cdot\frac{e^{-pT}}{p^2+k^2}, \tag{4}$$

где обозначено $c/m=k^2$.

Возвращаясь от изображений к оригиналам, находим уравнение движения груза

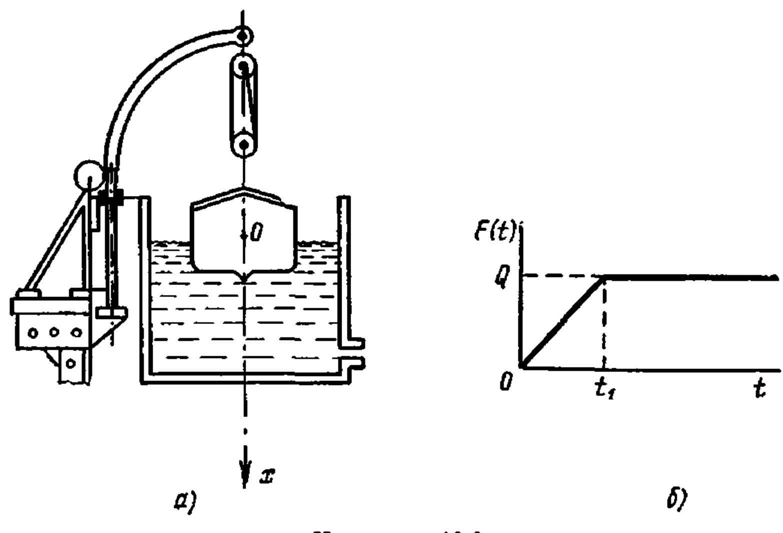
$$x(t)=x_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt+\frac{F_0}{mk}\sin k(t-T)\,\sigma_0(t-T). \tag{5}$$

Таким образом, движение груза определяется уравнениями

$$x(t)=\begin{cases} x_0\cos kt+\dfrac{v_0}{k}\sin kt & \text{при } t<T,\\ x_0\cos kt+\dfrac{v_0}{k}\sin kt+\dfrac{F_0}{mk}\sin k(t-T) & \text{при } t>T. \end{cases} \tag{6}$$

Применение преобразования Лапласа позволило получить решение задачи в единой аналитической записи.

Задача 19.9. Шлюпка (рис. *а*) веса Q, поперечное сечение которой можно приближенно считать неизменным по высоте, покоится на воде в доке. Трос, коэффициент жесткости которого c, прикреплен



К задаче 19.9.

к шлюп-балке и не растянут. Воду из дока начинают выпускать так, что ее уровень равномерно падает, вследствие чего сила, действующая на шлюпку по вертикали вниз изменяется согласно закону, представленному на рис. *б*. Найти уравнение движения шлюпки, если одновременно с выпуском воды шлюпке сообщили скорость v_0.

Решение. С помощью функции Хевисайда можно записать силу $F(t)$ следующим образом:

$$F(t)=\frac{Q}{t_1}t\sigma_0(t)-\frac{Q}{t_1}(t-t_1)\sigma_0(t-t_1). \qquad (1)$$

Дифференциальное уравнение движения шлюпки на тросе будет

$$\frac{Q}{g}\ddot{x}+cx=\frac{Q}{t_1}t\sigma_0(t)-\frac{Q}{t_1}(t-t_1)\sigma_0(t-t_1). \qquad (2)$$

Начальные условия: $x_0=0$, $\dot{x}=v_0$. Преобразуем уравнение, заменяя оригиналы изображениями и обозначая $c\cdot g/Q=k^2$:

$$p^2X(p)-v_0+k^2X(p)=\frac{g}{t_1}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-pt_1}}{p^2}\right) \qquad (3)$$

или

$$X(p)(p^2+k^2)=v_0+\frac{g}{t_1}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-pt_1}}{p^2}\right). \qquad (4)$$

Отсюда

$$X(p)=\frac{v_0}{p^2+k^2}+\frac{g}{t_1}\left[\frac{1}{p^2(p^2+k^2)}-\frac{e^{-pt_1}}{p^2(p^2+k^2)}\right]. \qquad (5)$$

Дроби в квадратной скобке можно разложить на простые:

$$X(p)=\frac{v_0}{p^2+k^2}+\frac{g}{t_1k^2}\left[\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+k^2}-\frac{e^{-pt_1}}{p^2}+\frac{e^{-pt_1}}{p^2+k^2}\right]. \qquad (6)$$

Возвращаясь от изображений к оригиналам, находим

$$x(t)=\frac{v_0}{k}\sin kt+\frac{g}{k^2t_1}\left[t-\frac{\sin kt}{k}-(t-t_1)\sigma_0(t-t_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin k(t-t_1)}{k}\sigma_0(t-t_1)\right], \qquad (7)$$

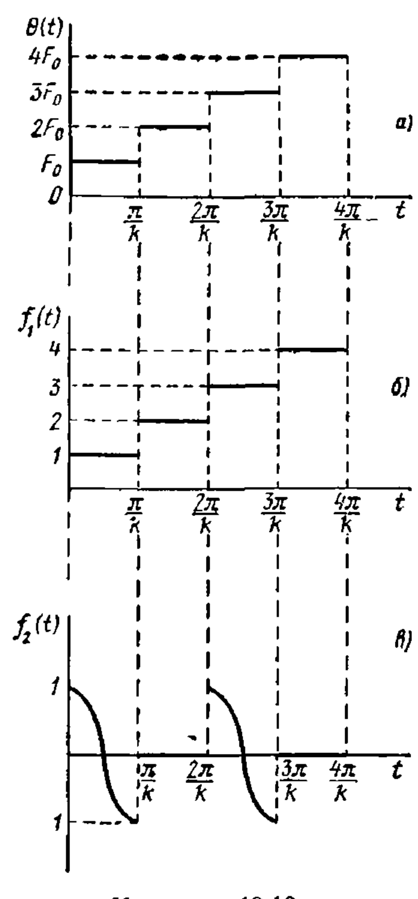
или

$$x(t)=\frac{v_0}{k}\sin kt+\frac{Q}{ct_1}\left[t-\frac{\sin kt}{k}-(t-t_1)\sigma_0(t-t_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin k(t-t_1)}{k}\sigma_0(t-t_1)\right]. \qquad (8)$$

Окончательно получаем

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{Q}{ct_1}\cdot t+\dfrac{\sin kt}{k}\left(v_0-\dfrac{Q}{ct_1}\right) & \text{при } t<t_1,\\[2mm] \dfrac{Q}{c}+\dfrac{v_0}{k}\sin kt+\dfrac{Q}{ct_1k}[\sin k(t-t_1)-\sin kt] & \text{при } t>t_1.\end{cases}$$

Задача 19.10. Груз массы m подвешен к концу пружины жесткости c. В начальный момент груз находится в положении статического равновесия и его скорость равна нулю. Определить движение груза под действием силы $Q(t)$, ступенчато возрастающей с каждым размахом (рис. a).



К задаче 19.10.

Решение. Дифференциальное уравнение движения груза

$$m\ddot{x}+cx=Q(t) \tag{1}$$

или

$$\ddot{x}+k^2x=\frac{Q(t)}{m}, \tag{2}$$

где введено обозначение $c/m=k^2$.

Переходя от оригиналов к изображениям по Лапласу, имеем

$$p^2X(p)+k^2X(p)=\frac{F_0}{m}\frac{1}{p\left(1-e^{-p\pi/k}\right)}. \tag{3}$$

Из (3) находим

$$X(p)=\frac{F_0}{m}\frac{1}{p\left(p^2+k^2\right)\left(1-e^{-p\pi/k}\right)}=$$

$$=\frac{F_0}{mk^2}\left(\frac{k^2+p^2-p^2}{p\left(p^2+k^2\right)}\right)\frac{1}{1-e^{-p\pi/k}}=$$

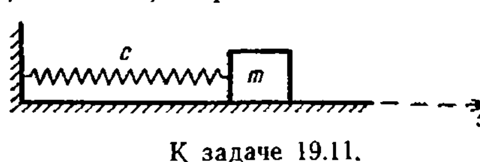
$$=\frac{F_0}{c}\left[\frac{1}{p\left(1-e^{-p\pi/k}\right)}-\frac{p}{p^2+k^2}\frac{1}{1-e^{-p\pi/k}}\right]. \tag{4}$$

Возвращаясь от изображений к оригиналам, получаем

$$x(t)=\frac{F_0}{c}\left[f_1(t)-f_2(t)\right],$$

где графики функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ даны на рис. *б*, *в*.

Таким образом, для нахождения в любой момент времени координаты x, определяющей положение груза, надо от значения $f_1(t)$ (рис. *б*) вычесть величину $f_2(t)$ (рис. *в*) и полученную разность умножить на F_0/c.



К задаче 19.11.

Задача 19.11. Тело массы m прикреплено к концу нерастянутой пружины, коэффициент жесткости которой c. Начальная скорость тела равна нулю. Определить движение тела, если на него подействовала сила $F(t)=F_0\delta(t)$, где $\delta(t)$ — функция Дирака (единичный импульс).

Решение. Дифференциальное уравнение движения тела

$$m\ddot{x}+cx=F_0\delta(t). \tag{1}$$

Переходя к изображениям по Лапласу и учитывая, что система удовлетворяет нулевым начальным условиям, находим

$$mp^2X(p)+cX(p)=F_0\cdot 1. \tag{2}$$

Из этого уравнения имеем

$$X(p)=\frac{F_0}{m(p^2+k^2)}, \tag{3}$$

где обозначено $c/m=k^2$.

Возвращаясь от изображения к оригиналу, получим закон движения

$$x(t)=\frac{F_0}{\sqrt{mc}}\sin kt. \tag{4}$$

Задача 19.12. Решить предыдущую задачу, если к телу дополнительно приложена сила вязкого сопротивления, пропорциональная скорости точки: $R=-\alpha\dot{x}$, и коэффициент α удовлетворяет равенству $\alpha=2mk$.

Решение. Дифференциальное уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x}=-cx-\alpha\dot{x}+F_0\delta(t) \tag{1}$$

или

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=\frac{F_0}{m}\delta(t), \tag{2}$$

где обозначено $c/m=k^2$, $\alpha/m=2n$.

Переходя к изображениям, запишем уравнение (2) в форме

$$p^2X(p)+2npX(p)+k^2X(p)=\frac{F_0}{m}. \tag{3}$$

Из уравнения (3) находим ($n=k$)

$$X(p)=\frac{F_0}{m}\frac{1}{p^2+2np+k^2}=\frac{F_0}{m}\frac{1}{(p+n)^2}. \tag{4}$$

Возвращаясь от изображений к оригиналам, получим уравнение движения тела

$$x(t)=\frac{F_0}{m}\cdot te^{-nt}. \tag{5}$$

Задача 19.13. На точку массы m, которая может перемещаться в плоскости xy, действуют две силы: одна притягивает точку к оси x, и величина ее пропорциональна расстоянию до оси y, вторая притягивает точку к оси y, и она пропорциональна расстоянию до оси x. В начальный момент координаты точки $x_0=a$, $y_0=b$, а скорость равна нулю. Определить движение точки.

Решение. Дифференциальные уравнения движения материальной точки будут

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}&=-c_1y,\\ m\ddot{y}&=-c_2x. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Обозначая $c_1/m = k_1^2$ и $c_2/m = k_2^2$, запишем систему уравнений в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + k_1^2 y = 0, \\ \ddot{y} + k_2^2 x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Переходим от оригиналов к изображениям:

$$X(p) \div x(t), \qquad Y(t) \div y(t). \tag{3}$$

Тогда уравнения (2) преобразуются так:

$$\left.\begin{aligned} p^2 X(p) - pa + k_1^2 Y(p) = 0, \\ p^2 Y(p) - pb + k_2^2 X(p) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Или

$$\left.\begin{aligned} p^2 X(p) + k_1^2 Y(p) = pa, \\ k_2^2 X(p) + p^2 Y(p) = pb. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим

$$X(p) = \frac{p(p^2 a - bk_1^2)}{p^4 - k_1^2 k_2^2}. \tag{6}$$

Аналогично имеем

$$Y(p) = \frac{p(p^2 b - ak_2^2)}{p^4 - k_1^2 k_2^2}. \tag{7}$$

Разложим $X(p)$ и $Y(p)$ на простые дроби

$$X(p) = \frac{ak_2 + bk_1}{2k_2} \cdot \frac{p}{p^2 + k_1 k_2} + \frac{ak_2 - bk_1}{2k_2} \cdot \frac{p}{p^2 - k_1 k_2}, \tag{8}$$

$$Y(p) = \frac{ak_2 + bk_1}{2k_1} \cdot \frac{p}{p^2 + k_1 k_2} - \frac{ak_2 - bk_1}{2k_1} \cdot \frac{p}{p^2 - k_1 k_2}. \tag{9}$$

Переходя от изображений к оригиналам, находим искомые уравнения движения точки

$$x(t) = \frac{ak_2 + bk_1}{2k_2} \cos\sqrt{k_1 k_2}\, t + \frac{ak_2 - bk_1}{2k_2} \operatorname{ch}\sqrt{k_1 k_2}\, t, \tag{10}$$

$$y(t) = \frac{ak_2 + bk_1}{2k_1} \cos\sqrt{k_1 k_2}\, t + \frac{ak_2 - bk_1}{2k_1} \operatorname{ch}\sqrt{k_1 k_2}\, t. \tag{11}$$

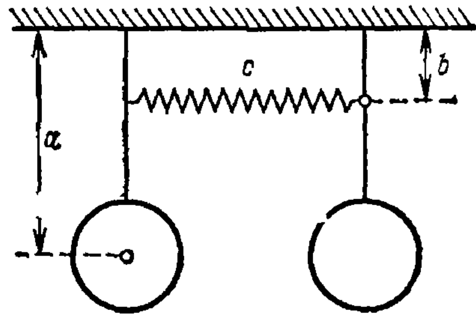
Задача 19.14. Два одинаковых маятника длины a и массы m каждый соединены на уровне b упругой пружиной жесткости c, прикрепленной концами к стержням маятников.

Определить малые колебания системы в плоскости равновесного положения маятников, если начальные отклонения и начальные угловые скорости маятников соответственно равны: φ_{10}, φ_{20}, ω_{10}, ω_{20}. Массами стержней маятников и массой пружины пренебречь.

Решение. Рассматриваемая система является консервативной. Поэтому для составления дифференциальных уравнений движения системы воспользуемся уравнениями Лагранжа в обобщенных координатах в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{1}$$

где $L = T - \Pi$ — лагранжева функция, или кинетический потенциал, равная разности кинетической и потенциальной энергий системы.



К задаче 19.14.

Обозначая радиус инерции каждого маятника относительно центральной оси перпендикулярной плоскости качаний через ρ, найдем кинетическую энергию

$$T = m(\rho^2 + a^2)\frac{\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2}{2} \tag{2}$$

и потенциальную энергию (углы φ_1 и φ_2, по предположению, малы)

$$\Pi = \frac{mga}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{cb^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}. \tag{3}$$

Подставляя значения (2) и (3) в уравнения Лагранжа, получим

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{mga + cb^2}{m(\rho^2 + a^2)}\varphi_1 - \frac{cb^2}{m(\rho^2 + a^2)}\varphi_2 = 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + \frac{mga + cb^2}{m(\rho^2 + a^2)}\varphi_2 - \frac{cb^2}{m(\rho^2 + a^2)}\varphi_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Обозначая для краткости

$$\frac{mga + cb^2}{m(\rho^2 + a^2)} = k^2, \quad \frac{cb^2}{m(\rho^2 + a^2)} = n^2,$$

перепишем уравнения (4) в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + k^2\varphi_1 - n^2\varphi_2 = 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + k^2\varphi_2 - n^2\varphi_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Найдем решение системы при заданных начальных данных с помощью преобразования Лапласа. Переходя к изображениям, запишем уравнения (5) в виде

$$\left.\begin{aligned} p^2\Phi_1(p) - p\varphi_{10} - \omega_{10} + k^2\Phi_1(p) - n^2\Phi_2(p) = 0, \\ p^2\Phi_2(p) - p\varphi_{20} - \omega_{20} + k^2\Phi_2(p) - n^2\Phi_1(p) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

или

$$\left.\begin{aligned} (p^2 + k^2)\Phi_1(p) - n^2\Phi_2(p) = p\varphi_{10} + \omega_{10}, \\ -n^2\Phi_1(p) + (p^2 + k^2)\Phi_2(p) = p\varphi_{20} + \omega_{20}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Отсюда находим

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(p) &= \frac{(p\varphi_{10}+\omega_{10})(p^2+k^2)+n^2(p\varphi_{20}+\omega_{20})}{(p^2+k^2)^2-n^4}, \\ \Phi_2(p) &= \frac{(p\varphi_{20}+\omega_{20})(p^2+k^2)+n^2(p\varphi_{10}+\omega_{10})}{(p^2+k^2)^2-n^4}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Раскладываем $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$ на простые дроби

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(p) &= \frac{A_1p+B_1}{p^2+k^2-n^2}+\frac{C_1p+D_1}{p^2+k^2+n^2}, \\ \Phi_2(p) &= \frac{A_2p+B_2}{p^2+k^2-n^2}+\frac{C_2p+D_2}{p^2+k^2+n^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Для нахождения коэффициентов A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 приравниваем правые части соответственных уравнений (8) и (9). Определив коэффициенты, записываем изображения

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(p) &= \frac{\varphi_{10}+\varphi_{20}}{2}\cdot\frac{p}{p^2+k_1^2}+\frac{\omega_{10}+\omega_{20}}{2}\cdot\frac{1}{p^2+k_1^2}+ \\ &\quad +\frac{\varphi_{10}-\varphi_{20}}{2}\cdot\frac{p}{p^2+n_1^2}+\frac{\omega_{10}-\omega_{20}}{2}\cdot\frac{1}{p^2+n_1^2}, \\ \Phi_2(p) &= \frac{\varphi_{10}+\varphi_{20}}{2}\,\frac{p}{p^2+k_1^2}+\frac{\omega_{20}+\omega_{10}}{2}\cdot\frac{1}{p^2+k_1^2}- \\ &\quad -\frac{\varphi_{10}-\varphi_{20}}{2}\cdot\frac{p}{p^2+n_1^2}-\frac{\omega_{10}-\omega_{20}}{2}\,\frac{1}{p^2+n_1^2}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где для краткости обозначены

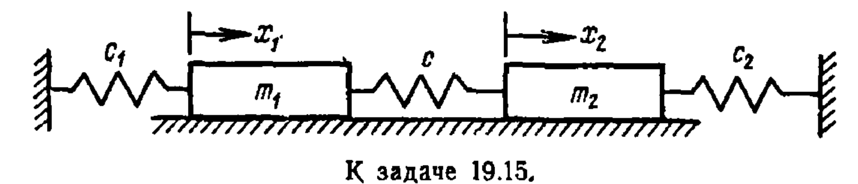
$$\frac{ag}{\rho^2+a^2}=k_1^2, \qquad \frac{mga+2cb^2}{m(\rho^2+a^2)}=n_1^2. \tag{11}$$

Возвращаясь от изображений к оригиналам, находим уравнения движения маятников

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{\varphi_{10}+\varphi_{20}}{2}\cos k_1t+\frac{\omega_{10}+\omega_{20}}{2k_1}\sin k_1t+ \\ &\qquad +\frac{\varphi_{10}-\varphi_{20}}{2}\cos n_1t+\frac{\omega_{10}-\omega_{20}}{2n_1}\sin n_1t, \\ \varphi_2(t) &= \frac{\varphi_{10}+\varphi_{20}}{2}\cos k_1t+\frac{\omega_{20}+\omega_{10}}{2k_1}\sin k_1t- \\ &\qquad -\frac{\varphi_{10}-\varphi_{20}}{2}\cos n_1t-\frac{\omega_{10}-\omega_{20}}{2n_1}\sin n_1t. \end{aligned} \tag{12}$$

Согласно этим уравнениям колеблются упруго связанные маятники. Интересно отметить, что при нулевых начальных координатах в нуль обращаются нечетные слагаемые в правых частях уравнений (12). При нулевых начальных скоростях в нуль обращаются четные слагаемые правых частей в (12).

Задача 19.15. На рисунке показана колебательная система с двумя степенями свободы. На первый груз действует возмущающая сила $F=4\sin t$ ($кГ$). Заданы массы грузов: $m_1=4\ кГ\cdot м^{-1}\cdot сек^2$ и $m_2=1\ кГ\cdot м^{-1}\cdot сек^2$ и жесткости пружин: $c_1=20\ кГ/см$, $c_2=2\ кГ/см$, $c=4\ кГ/см$.



К задаче 19.15.

Найти движение системы при следующих начальных условиях:

$$x_{10}=1\ см,\ v_{10}=0,\ x_{20}=0,\ v_{20}=1\ см/сек.$$

Решение. Составляем уравнения движения системы

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -c_1x_1-c(x_1-x_2)+F, \\ m_2\ddot{x}_2 &= -c(x_2-x_1)-c_2x_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Подставляя числовые данные, записываем уравнения после преобразований в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1+6x_1-x_2 &= \sin t, \\ \ddot{x}_2+6x_2-4x_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Преобразуя эти уравнения по Лапласу с учетом начальных условий, получим уравнения в изображениях

$$\left.\begin{aligned} p^2X_1(p)-p+6X_1(p)-X_2(p) &= \frac{1}{p^2+1}, \\ p^2X_2(p)-1+6X_2(p)-4X_1(p) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

или

$$\left.\begin{aligned} (p^2+6)X_1(p)-X_2(p) &= \frac{1+p+p^3}{1+p^2}, \\ -4X_1(p)+(p^2+6)X_2(p) &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Определитель системы равен

$$\Delta=\begin{vmatrix} p^2+6 & -1 \\ -4 & p^2+6 \end{vmatrix}=(p^2+6)^2-4=(p^2+8)(p^2+4). \tag{5}$$

Числители в формулах для неизвестных $X_1(p)$ и $X_2(p)$ равны

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \dfrac{1+p+p^3}{1+p^2} & -1 \\ 1 & p^2+6 \end{vmatrix} = \frac{(1+p+p^3)(p^2+6)+1+p^2}{1+p^2}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} p^2+6 & \dfrac{1+p+p^3}{1+p^2} \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(p^2+6)(1+p^2)+4(1+p+p^3)}{1+p^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} X_1(p) &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(1+p+p^2)(p^2+6)+1+p^2}{(p^2+8)(p^2+4)(p^2+1)}, \\ X_2(p) &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(p^2+6)(1+p^2)+4(1+p+p^2)}{(p^2+8)(p^2+4)(p^2+1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Далее раскладываем $X_1(p)$ и $X_2(p)$ на простые дроби

$$\left.\begin{aligned} X_1(p) &= \frac{A_1p+B_1}{p^2+8} + \frac{C_1p+D_1}{p^2+4} + \frac{E_1p+F_1}{p^2+1}, \\ X_2(p) &= \frac{A_2p+B_2}{p^2+8} + \frac{C_2p+D_2}{p^2+4} + \frac{E_2p+F_2}{p^2+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p в выражениях (7) и (8), получаем системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A_1+C_1+E_1&=1, & A_2+C_2+E_2&=0, \\ B_1+D_1+F_1&=0, & B_2+D_2+F_2&=1, \\ 5A_1+9C_1+12E_1&=7, & 5A_2+9C_2+12E_2&=4, \\ 5B_1+9D_1+12F_1&=2, & 5B_2+9D_2+12F_2&=7, \\ 4A_1+8C_1+32E_1&=6, & 4A_2+8C_2+32E_2&=4, \\ 4B_1+8D_1+32F_1&=7, & 4B_2+8D_2+32F_2&=10. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Решая эти системы, получаем

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}, & D_1 &= \frac{1}{12}, & A_2 &= -1, & D_2 &= \frac{1}{6}, \\ B_1 &= -\frac{9}{28}, & E_1 &= 0, & B_2 &= \frac{9}{14}, & E_2 &= 0, \\ C_1 &= \frac{1}{2}, & F_1 &= \frac{5}{21}, & C_2 &= 1, & F_2 &= \frac{4}{21}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Следовательно:

$$\left.\begin{aligned} X_1(p) &= \frac{\frac{1}{2}p-\frac{9}{28}}{p^2+8} + \frac{\frac{1}{2}p+\frac{1}{12}}{p^2+4} + \frac{\frac{5}{21}}{p^2+1}, \\ X_2(p) &= \frac{-p+\frac{9}{14}}{p^2+8} + \frac{p+\frac{1}{6}}{p^2+4} + \frac{\frac{4}{21}}{p^2+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

С помощью таблицы изображений находим искомые оригиналы

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}\left(\cos 2\sqrt{2}t - \frac{9}{28\sqrt{2}}\sin 2\sqrt{2}t\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\cos 2t + \frac{1}{12}\sin 2t\right) + \frac{5}{21}\sin t, \\ x_2(t) &= -\left(\cos 2\sqrt{2}t - \frac{9}{28\sqrt{2}}\sin 2\sqrt{2}t\right) + \\ &\quad + \left(\cos 2t + \frac{1}{12}\sin 2t\right) + \frac{4}{21}\sin t. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Первые скобки в $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — слагаемые, соответствующие первой форме свободных колебаний, вторые скобки отвечают второй форме свободных колебаний, последние слагаемые — это вынужденные колебания, имеющие частоту возмущающей силы.

ГЛАВА XX

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 1. Примеры нелинейных систем

В главе VIII второго тома, а также в предыдущей главе были рассмотрены колебания материальной точки и материальной системы, которые описывались линейными дифференциальными уравнениями. Так, при колебаниях материальной точки сила упругости ($F = -cr$) и сила сопротивления движению ($R = -\beta v$) изменялись по линейному закону.

Во многих механических системах движение описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Значительному количеству электромеханических и электрических систем также соответствуют нелинейные уравнения. Появление в уравнениях нелинейных членов обусловлено, например, наличием силы упругости или силы сопротивления движению, либо тока, изменяющихся по нелинейному закону.

Линеаризация подобных дифференциальных уравнений движения, т. е. замена точных нелинейных приближенными линейными уравнениями, влияет не только на количественные результаты, но существенно искажает качественную сторону рассматриваемых явлений, присущих только нелинейным системам.

Так, изохронность, т. е. независимость частоты линейных колебаний маятника от начальных условий движения, отсутствует в случае нелинейных колебаний. Амплитуда линейных вынужденных колебаний при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, являющаяся однозначной непрерывной функцией коэффициента расстройки, изменяется скачкообразно в случае нелинейных вынужденных колебаний (явление «скачка»). Природу автоколебаний невозможно объяснить с помощью приближенных линеаризованных дифференциальных уравнений.

В связи с отсутствием общих методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений за последнее время были разработаны и получили широкое применение приближенные аналитические и графические методы.

Рассмотрим некоторые примеры нелинейных материальных систем, т. е. систем, движение которых описывается нелинейными дифференциальными уравнениями.

Обычно приближенно считают, что модуль силы упругости изменяется по закону Гука, т. е. по линейному закону в зависимости от смещения Δ (см. штриховую прямую на рис. 20.1). Это предположение приводит к линейному дифференциальному уравнению свободных колебаний

$$\ddot{x}+k^2x=0.$$

Вместе с тем законом Гука можно приближенно пользоваться лишь в определенных пределах. У ряда материалов, например у резины и кожи, сила упругости растет быстрее, чем по линейному закону (см. кривую $1-1$ на рис. 20.1). Соответствующая характеристика изменения силы упругости называется *«жесткой»*. У некоторых материалов, например у чугуна, сила упругости растет медленнее, чем по линейному закону (см. кривую $2-2$ на рис. 20.1). В этих случаях характеристика называется *«мягкой»*.

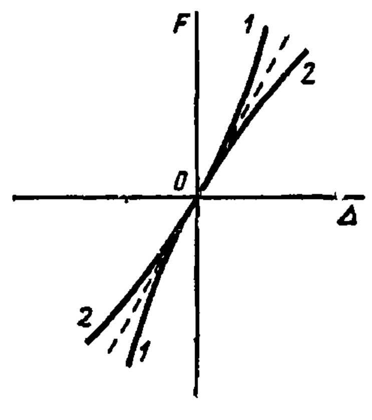


Рис. 20.1.

«Жесткой» характеристике соответствует проекция силы упругости $F_x = -c_1x - c_3x^3 - c_5x^5 - \ldots$, а «мягкой» $F_x = -c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + \ldots$, где $c_1 > 0$ и $c_3 > 0$. Если в дифференциальное уравнение движения $m\ddot{x} = F_x$ подставить эти значения F_x, то, приняв обозначения $k^2 = c_1/m$, $\gamma = c_3/m$, $\rho = c_5/m$, получим нелинейное дифференциальное уравнение; в случае «жесткой» характеристики силы упругости

$$\ddot{x}+k^2x+\gamma x^3+\rho x^5+\ldots=0 \qquad (\gamma>0).$$

а в случае «мягкой» характеристики

$$\ddot{x}+k^2x-\gamma x^3-\rho x^5-\ldots=0 \qquad (\gamma>0),$$

т. е., вообще говоря,

$$\ddot{x}+f(x)=0,$$

где $f(x)$ — некоторая нелинейная функция x.

Примером нелинейной системы является также маятник. Напомним, что дифференциальное уравнение колебаний маятника имеет вид

$$\ddot{\varphi}+k^2\cdot\sin\varphi=0.$$

Считая колебания малыми, заменяют $\sin\varphi$ на φ и затем приближенно интегрируют линейное дифференциальное уравнение $\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0$. При учете влияния нелинейности надо в разложении

$$\sin\varphi=\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^7}{7!}+\ldots$$

удержать несколько первых членов (не менее двух). Так, приближенное нелинейное дифференциальное уравнение при сохранении первых трех членов разложения примет вид

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi-\frac{k^2}{6}\varphi^3+\frac{k^2}{120}\varphi^5=0.$$

В некоторых случаях нелинейная характеристика силы упругости оказывается линейной на отдельных участках. На рис. 20.2, *а* изображена в плане система с зазорами. При движении груза A в границах зазора MN сила упругости отсутствует. За пределами зазора груз контактирует с правой или левой пружиной и появляется сила упругости. Характеристика этой силы, являясь линейной на отдельных участках, оказывается в целом нелинейной (рис. 20.2, *б*).

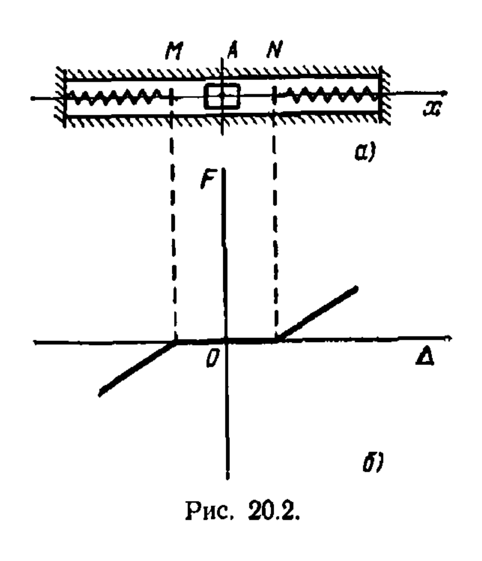


Рис. 20.2.

Источником нелинейности может также быть сила сопротивления движению. Так, проекция аэродинамической силы сопротивления приближенно изменяется по закону $R_x=-\beta\dot{x}\,|\dot{x}\,|$. Если материальная точка массы m совершает свободные колебания под действием силы упругости ($F_x=-cx$) и силы сопротивления ($R_x=-\beta\dot{x}\,|\dot{x}\,|$), то нелинейное дифференциальное уравнение движения имеет вид $\ddot{x}+\rho\dot{x}\,|\dot{x}\,|+k^2x=0$, где $\rho=\beta/m$, $k^2=c/m$.

Движение в автоколебательных системах (т. е. системах, совершающих незатухающие колебания, которые не зависят от начальных условий, см. задачи 20.24, 20.25, 20.26) описывается нелинейными дифференциальными уравнениями вида

$$\ddot{x}+f(\dot{x})+k^2x=0,$$

или

$$\ddot{x}+\dot{x}\cdot\varphi(x)+k^2x=0,$$

где $f(\dot{x})$ и $\varphi(x)$ — нелинейные функции $\dot{x}$ и x.

Многим электрическим и электромеханическим системам соответствуют нелинейные дифференциальные уравнения. Так, для электронной лампы-*триода* зависимость анодного тока i_a от напряжения u на сетке лампы является нелинейной. Также зависимость тока i от магнитного потока φ электрической цепи, которая в первом приближении считается линейной, при более точных расчетах принимается равной $i=\alpha\varphi-\beta\varphi^3$, где α и β — положительные постоянные. Подоб-

ным электрическим цепям соответствуют нелинейные дифференциальные уравнения.

В этой главе рассмотрены нелинейные колебания материальных систем с одной степенью свободы.

§ 2. Свободные колебания нелинейных систем (аналитические методы)

1°. Метод поэтапного интегрирования (метод припасовывания). Нередко встречаются нелинейные системы, являющиеся линейными на отдельных участках. Это, например, имеет место в случаях, когда характеристика силы упругости оказывается составленной из нескольких прямолинейных отрезков. Здесь можно получить точное решение на каждом участке, проведя интегрирование поэтапно. Для этого период колебаний надо разбить на части, каждая из которых соответствует прямолинейному участку характеристики силы упругости. На каждом этапе дифференциальное уравнение является линейным, и его интегрирование не представляет затруднений. Зная начальные условия движения, можно проинтегрировать уравнение на первом этапе и определить обобщенную координату, а также обобщенную скорость в конечный момент времени. Эти конечные значения координаты и скорости одновременно являются начальными для следующего — второго этапа. Поэтому, проведя интегрирование линейного дифференциального уравнения, соответствующего второму этапу, надо в качестве начальных условий движения использовать конечные значения координаты и скорости первого этапа. Этот прием следует распространить на все этапы.

В итоге нелинейные свободные колебания описываются несколькими линейными уравнениями, число которых равно числу линейных этапов. (Метод поэтапного интегрирования иногда называется *методом припасовывания* или *методом стыковки* *).)

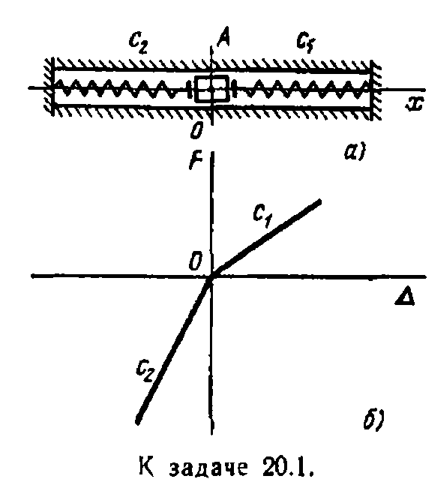
Задача 20.1. На рис. *а* изображен груз A массы m, который под действием двух пружин может двигаться в прямолинейных направляющих. Коэффициенты жесткости правой и левой пружин, не прикрепленных к грузу, соответственно равны c_1 и c_2. В начальный момент груз находился в крайнем правом положении, определенном координатой $x = x_0 > 0$, и был отпущен без начальной скорости. В положении равновесия O пружины не напряжены.

Написать уравнение движения груза и найти период его свободных колебаний, считая, что силы упругости пружин подчиняются закону Гука.

---

*) Вообще методом поэтапного интегрирования можно пользоваться в тех случаях, когда нелинейные дифференциальные уравнения интегрируются на отдельных участках.

Решение. В положении равновесия O пружины не напряжены и с грузом не скреплены. Поэтому при движении груза направо от нуля к нему приложена сила упругости одной правой пружины, а при движении налево от нуля — одной левой пружины. Эта нелинейная система оказывается линейной на отдельных этапах, ибо при $x=0$ имеем $c=0$, при $x>0$ имеем $c=c_1=\text{const}$, при $x<0$ имеем $c=c_2=\text{const}$. Поэтому характеристика силы упругости оказывается составленной из двух прямолинейных отрезков (рис. *б*).



К задаче 20.1.

Разобьем период колебаний на четыре этапа, соответствующие движению груза:

1) под действием правой пружины из крайнего правого положения в нулевое;

2) под действием левой пружины из нулевого положения в крайнее левое;

3) под действием левой пружины из крайнего левого положения в нулевое;

4) под действием правой пружины из нулевого в крайнее правое положение.

Рассмотрим движение на первом этапе из крайнего правого положения в нулевое. Движение описывается дифференциальным уравнением: $m\ddot{x}=-c_1x$, т. е.

$$\ddot{x}+k_1^2x=0, \tag{1}$$

где обозначено $k_1^2=c_1/m$.

Общее решение линейного уравнения (1) имеет вид

$$x=C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t. \tag{2}$$

Вычислим производную по времени:

$$\dot{x}=-C_1k_1\sin k_1t+C_2k_1\cos k_1t. \tag{3}$$

Согласно условию в начальный момент, т. е. при $t=0$, имеем $x=x_0$, $\dot{x}=0$. Подставив эти значения в уравнения (2) и (3) и решив их относительно C_1 и C_2, получим $C_1=x_0$, $C_2=0$. Внеся эти значения в уравнения (2) и (3), найдем закон движения груза под действием правой пружины из крайнего правого положения в нулевое:

$$x=x_0\cos k_1t, \tag{4}$$

$$\dot{x}=-k_1x_0\sin k_1t. \tag{5}$$

Движению груза, описываемому уравнением (4), соответствует промежуток времени

$$0\leqslant t\leqslant \tau_1,$$

где τ_1 — пока неизвестный момент времени, соответствующий приходу груза в нулевое положение.

Для нахождения координаты и проекции скорости в конце первого этапа подставим в уравнение (4) $t=\tau_1$, $x=x(\tau_1)=0$, а в (5): $t=\tau_1$, $\dot{x}=\dot{x}(\tau_1)$, где $\dot{x}(\tau_1)$ пока неизвестно. Получим

$$0=x_0\cos k_1\tau_1, \quad \dot{x}(\tau_1)=-k_1x_0\sin k_1\tau_1. \tag{6}$$

Из первого уравнения (6) найдем $k_1\tau_1=\pi/2$, т. е.

$$\tau_1=\frac{\pi}{2k_1}. \tag{7}$$

Внеся это значение τ_1 во второе уравнение (6), получим $\dot{x}(\tau_1)=-k_1x_0$.

Итак, в момент τ_1 окончания первого этапа, т. е. в момент прихода груза в нулевое положение, т. е. при $t=\tau_1=\pi/2k_1$, имеем

$$x=x(\tau_1)=0, \quad \dot{x}=\dot{x}(\tau_1)=-k_1x_0. \tag{8}$$

Эти значения для x и $\dot{x}$ являются начальными при движении груза на втором этапе под действием левой пружины из нулевого положения в крайнее левое.

Для упрощения последующих вычислений будем теперь отсчитывать время с момента начала второго этапа. Поэтому, использовав результаты (8), запишем начальные условия для второго этапа:

$$t=0, \quad x=0, \quad \dot{x}=-k_1x_0. \tag{9}$$

Движение на втором этапе описывается дифференциальным уравнением $m\ddot{x}=-c_2x$, т. е.

$$\ddot{x}+k_2^2x=0, \tag{10}$$

где обозначено $k_2^2=c_2/m$.

Общее решение линейного уравнения (10) имеет вид

$$x=C_3\cos k_2t+C_4\sin k_2t. \tag{11}$$

Вычислим производную по времени:

$$\dot{x}=-C_3k_2\sin k_2t+C_4k_2\cos k_2t. \tag{12}$$

Подставив в уравнения (11) и (12) начальные условия (9), найдем $C_3=0$, $C_4=-\frac{k_1}{k_2}x_0$. Внеся эти значения C_3 и C_4 в (11), получим уравнение

$$x=-\frac{k_1}{k_2}x_0\sin k_2t, \tag{13}$$

описывающее движение груза на втором этапе под действием левой пружины из нулевого положения в крайнее левое. Это движение происходит в промежутке времени $0\leqslant t\leqslant\tau_2$, где τ_2 — пока неизвестный момент времени, соответствующий приходу груза в крайнее левое положение.

Вычислим проекцию скорости груза на втором этапе, взяв производную (13) по времени:

$$\dot{x}=-k_1x_0\cos k_2t. \tag{14}$$

Для определения x и $\dot{x}$ в конце второго этапа, т. е. в момент τ_2, подставим в (13) $t=\tau_2$, $x=x(\tau_2)$, а в (14) $t=\tau_2$, $\dot{x}=\dot{x}(\tau_2)=0$. Получим

$$x(\tau_2)=-\frac{k_1}{k_2}x_0\sin k_2\tau_2,\quad 0=-k_1x_0\cos k_2\tau_2. \tag{15}$$

Из второго уравнения (15) найдем $k_2\tau_2=\pi/2$, т. е.

$$\tau_2=\frac{\pi}{2k_2}. \tag{16}$$

Подстановка этого значения τ_2 в первое уравнение (15) дает $x(\tau_2)=-\frac{k_1}{k_2}x_0$. Итак, в момент τ_2 окончания второго этапа, т. е. в момент прихода груза в крайнее левое положение, т. е. при $t=\tau_2=\pi/2k_2$, его координата и проекция скорости равны

$$x=x(\tau_2)=-\frac{k_1}{k_2}x_0,\quad \dot{x}=\dot{x}(\tau_2)=0. \tag{17}$$

Значения (17) одновременно являются начальными условиями движения груза на третьем этапе под действием левой пружины из крайнего левого положения в нулевое.

Последующее решение задачи нецелесообразно, ибо движению на третьем этапе соответствует дифференциальное уравнение (10) и уравнение движения (13), а движение груза на четвертом этапе из нулевого положения в крайнее правое описывается дифференциальным уравнением (1). Искомый период T свободных колебаний груза равен $2(\tau_1+\tau_2)$. Использовав формулы (7) и (16), получим

$$T=\pi\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}, \tag{18}$$

где $k_1=\sqrt{c_1/m}$, $k_2=\sqrt{c_2/m}$. Как следует из формулы (18), период рассматриваемых нелинейных колебаний не зависит от начальных условий движения, т. е. колебания изохронны.

2°. Метод малого параметра. Нелинейная материальная система называется *автономной*, если ее движение описывается дифференциальным уравнением, явно не зависящим от времени. Например:

$$\ddot{x}+k^2x=\mu f(x,\dot{x}), \tag{1*}$$

где μ — некоторый параметр, стоящий коэффициентом при нелинейной непрерывной дифференцируемой функции $f(x,\dot{x})$.

Ниже разыскивается периодическое решение уравнения (1*) в предположении, что параметр μ мал, а функция f зависит только от координаты x, *методом разложения в ряд по степеням малого параметра* μ. Этот метод, изложенный в трудах А. Пуанкаре, получил свое дальнейшее развитие в работах А. А. Андронова,

А. А. Витта*), Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского**).

Запишем искомое периодическое решение в виде

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots, \qquad (2^*)$$

где x_0, x_1, x_2 — неизвестные периодические функции круговой частоты p и частот, кратных p, подлежащих последующему определению. Одновремено разложим p^2 — квадрат искомой круговой частоты — также по степеням малого параметра μ:

$$p^2 = k^2 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \ldots, \qquad (3^*)$$

где α_1, α_2 — постоянные коэффициенты, определяемые в ходе интегрирования уравнения (1*). Значения α_1, α_2 выбираются такими, чтобы решение (2*) было периодическим, т. е. чтобы в нем отсутствовали так называемые «резонансные» или «вековые» члены, неограниченно возрастающие с течением времени. Для пояснения допустим, что в ходе решения задачи следует интегрировать дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}_i + p^2 x_i = M_i \sin pt + N_i \sin 3pt + \ldots,$$

причем коэффициент M_i зависит от α_i. Среди частных решений этого уравнения имеется неограниченно возрастающее «резонансное» решение $-\frac{M_i}{2p} t \cos pt$. Для того чтобы искомый закон движения был периодическим, надо считать M_i равным нулю. Из уравнения $M_i = 0$ определяется искомый коэффициент α_i.

Решать задачи указанным методом на определение закона свободных нелинейных колебаний рекомендуется в следующем порядке:

1) составить дифференциальное уравнение движения (1*), представив его в виде $\ddot{x} + k^2 x - \mu \cdot f(x) = 0$;

2) с помощью формул (2*) и (3*) записать искомый закон движения x и квадрат неизвестной круговой частоты p в разложении по степеням малого параметра μ;

3) использовав выражение (2*), вычислить $\dot{x}$ и $\ddot{x}$;

4) подставить значения x, $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ из пп. 2) и 3) в дифференциальное уравнение п. 1). Одновременно коэффициент k^2 заменить с помощью формулы (3*), т. е. написать $k^2 = p^2 - \alpha_1\mu - \alpha_2\mu^2 - \ldots$ В результате этих подстановок получится дифференциальное уравнение с членами, содержащими разные степени малого параметра μ, а также с членами, свободными от μ;

---

*) А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, 1959.

**) Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Изд-во АН УССР, Киев, 1937.

5) собрать в дифференциальном уравнении п. 4) члены, содержащие одинаковые степени малого параметра μ, а также члены, свободные от μ, т. е. представить уравнение в виде

$$A_0+\mu A_1+\mu^2 A_2+\ldots=0;$$

6) приравнять нулю коэффициенты, стоящие при разных степенях малого параметра μ, а также члены, свободные от μ, т. е. $A_0=0$, $A_1=0$, $A_2=0$, ... В результате получится система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_0+p^2x_0=0,\\
&\ddot{x}_1+p^2x_1=F_1(\alpha_1,\ x_0),\\
&\ddot{x}_2+p^2x_2=F_2(\alpha_1,\ \alpha_2,\ x_0,\ x_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

7) записать начальные условия движения для дифференциальных уравнений п. 6). Так, если по условию при $t=0$ мы имеем $x(0)=a$, $\dot{x}(0)=0$, то на основании выражений x и $\dot{x}$ п. 3) получим при $t=0$

$$\begin{aligned}
&x_0(0)=a, \quad x_1(0)=0, \quad x_2(0)=0, \ldots\\
&\dot{x}_0(0)=0, \quad \dot{x}_1(0)=0, \quad \dot{x}_2(0)=0, \ldots;
\end{aligned}$$

8) использовав начальные условия п. 7), проинтегрировать дифференциальное уравнение $\ddot{x}_0+p^2x_0=0$ и найти $x_0(t)$;

9) внести полученное выражение $x_0(t)$ в дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}_1+p^2x_1=F_1(\alpha_1,\ x_0),$$

которое после простых тригонометрических преобразований в его правой части примет вид

$$\ddot{x}_1+p^2x_1=M_1\cos pt+N_1\cos 3pt+\ldots$$

Для того чтобы x_1 с течением времени неограниченно не возрастало, надо считать M_1 равным нулю. Из уравнения $M_1=0$ определим α_1;

10) использовав начальные условия движения п. 7), проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}_1+p^2x_1=N_1\cos 3pt+\ldots$$

и определить $x_1(t)$;

11) внести значения $x_0(t)$, α_1 и $x_1(t)$, полученные в пп. 8), 9) и 10), в дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}_2+p^2x_2=F_2(\alpha_1,\alpha_2,\ x_0,\ x_1).$$

Повторив выкладки, аналогичные расчетам пп. 9) и 10), определить α_2 и $x_2(t)$ и т. д.;

12) определить искомые $x(t)$ и p^2 п. 2), внеся в них вычисленные значения $x_0(t)$, α_1, $x_1(t)$, α_2, $x_2(t)$ и т. д.

При решении задач ряды (2*) и (3*) обычно обрывают на членах, содержащих μ или μ^2. Например:

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2, \qquad p^2 = k^2 + \mu\alpha_1 + \mu^2\alpha_2.$$

Задача 20.2. Определить методом малого параметра уравнение и круговую частоту колебаний физического маятника конечной амплитуды, если P — его вес, l — расстояние от его оси подвеса z до центра тяжести (см. рисунок), I_z — момент инерции маятника относительно оси подвеса. В начальный момент маятник был отклонен от вертикали на угол, равный a_0, и отпущен без начальной скорости.

К задаче 20.2.

Решение. Применим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e).$$

Внешними силами являются P — сила тяжести, R_1, R_2 — составляющие реакции оси z.

Сумма моментов внешних сил равна $\sum m_z(F_k^e) = -Pl\sin\varphi$. Поэтому дифференциальное уравнение примет вид $I_z\ddot{\varphi} = -Pl\sin\varphi$, т. е.

$$\ddot{\varphi} + k^2\sin\varphi = 0, \tag{1}$$

где обозначено $k^2 = Pl/I_z$.

Уравнение (1) является нелинейным. Разложим $\sin\varphi$ в степенной ряд

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots \tag{2}$$

В случае малых колебаний, т. е. при $\sin\varphi \approx \varphi$, уравнение (1) оказывается линейным:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

При заданных начальных условиях $t = 0$, $\varphi = a_0$, $\dot{\varphi} = 0$, его решение имеет вид

$$\varphi = a_0\cos kt. \tag{3}$$

Для определения закона колебаний конечной амплитуды, сохраним в ряде (2) два первых члена, т. е. возьмем $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6}$. При этом уравнение (1) примет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi - \mu\varphi^3 = 0, \tag{4}$$

где малый параметр μ имеет значение

$$\mu = \frac{k^2}{6}. \tag{5}$$

Для определения закона колебаний маятника применим метод малого параметра. Будем вести расчеты с точностью до членов, содержащих μ в первой степени включительно. Поэтому искомый угол отклонения φ и квадрат неизвестной круговой частоты p^2 запишем в виде

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \mu\varphi_1(t), \tag{6}$$

$$p^2 = k^2 + \mu\alpha_1, \tag{7}$$

где $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ и постоянная α_1 подлежат последующему определению.

Использовав (6) и (7), внесем в уравнение (4) $\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_0 + \mu\ddot{\varphi}_1$ и $k^2 = p^2 - \mu\alpha_1$. Найдем

$$\ddot{\varphi}_0 + \mu\ddot{\varphi}_1 + (p^2 - \mu\alpha_1)(\varphi_0 + \mu\varphi_1) - \mu(\varphi_0 + \mu\varphi_1)^3 = 0.$$

С точностью до членов, содержащих малый параметр μ в первой степени включительно, это уравнение примет вид

$$\ddot{\varphi}_0 + p^2\varphi_0 + \mu(\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 - \alpha_1\varphi_0 - \varphi_0^3) = 0.$$

Приравняв нулю члены уравнения, свободные от μ, а также коэффициент, стоящий в скобке при μ, запишем

$$\ddot{\varphi}_0 + p^2\varphi_0 = 0, \tag{8}$$

$$\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 = \alpha_1\varphi_0 + \varphi_0^3. \tag{9}$$

Использовав заданные начальные условия $t = 0$, $\varphi = a_0$, $\dot{\varphi} = 0$ в уравнениях

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \mu\varphi_1(t)$$

и

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0(t) + \mu\dot{\varphi}_1(t),$$

запишем

$$a_0 = \varphi_0(0) + \mu\varphi_1(0), \qquad 0 = \dot{\varphi}_0(0) + \mu\dot{\varphi}_1(0).$$

Приравняв в каждом из этих уравнений слева и справа члены, свободные от μ, а также слагаемые, содержащие μ, получим начальные условия для функций $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$: при $t = 0$ имеем

$$\varphi_0(0) = a_0, \ \varphi_1(0) = 0, \ \dot{\varphi}_0(0) = 0, \ \dot{\varphi}_1(0) = 0. \tag{10}$$

Переходим к интегрированию дифференциального уравнения (8). Как известно, его общее решение имеет вид

$$\varphi_0(t) = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt,$$

а производная по времени равна

$$\dot{\varphi}_0 = -C_1 p \sin pt + C_2 p \cos pt.$$

Внеся в эти уравнения начальные условия (10) $t = 0$, $\varphi_0 = a_0$, $\dot{\varphi} = 0$, найдем $C_1 = a_0$, $C_2 = 0$. Следовательно,

$$\varphi_0(t) = a_0 \cos pt. \tag{11}$$

Это — первое приближение, в котором круговая частота p пока не определена.

Для интегрирования дифференциального уравнения (9) внесем в его правую часть результат (11) и используем формулу $\cos^3 pt = \frac{3}{4}\cos pt + \frac{1}{4}\cos 3pt$. Получим

$$\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 = a_0\left(\alpha_1 + \frac{3}{4}a_0^2\right)\cos pt + \frac{1}{4}a_0^3\cos 3pt. \qquad (12)$$

Частное решение этого уравнения, соответствующее первому слагаемому правой части, неограниченно возрастает (напомним, что дифференциальному уравнению $\ddot{x} + p^2x = h\cos pt$ соответствует частное решение $x = \frac{h}{2p}t\sin pt$). Так как искомый закон движения является периодическим, то коэффициент, стоящий в уравнении (12) при $\cos pt$, должен быть равен нулю, т. е. $\alpha_1 + \frac{3}{4}a_0^2 = 0$, откуда

$$\alpha_1 = -\frac{3}{4}a_0^2. \qquad (13)$$

Теперь уравнение (12) примет вид

$$\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 = \frac{1}{4}a_0^3\cos 3pt. \qquad (14)$$

Его общее решение φ_1 равно сумме

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)}, \qquad (15)$$

где $\varphi_1^{(2)}$ — частное решение уравнения (14), а $\varphi_1^{(1)}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения $\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 = 0$. В данном случае

$$\varphi_1^{(1)} = D_1\cos pt + D_2\sin pt, \quad \varphi_1^{(2)} = A\cos 3pt.$$

Подставив $\varphi_1^{(2)}$ и $\ddot{\varphi}_1^{(2)} = -9Ap^2\cos 3pt$ в уравнение (14), найдем $A = -a_0^3/32p^2$. Теперь общее решение (15) запишется в виде

$$\varphi_1 = D_1\cos pt + D_2\sin pt - \frac{a_0^3}{32p^2}\cos 3pt. \qquad (16)$$

Подставим в функцию (16) и в ее производную по времени

$$\dot{\varphi}_1 = -D_1p\sin pt + D_2p\cos pt + \frac{3a_0^3}{32p}\sin 3pt$$

начальные условия движения (10) $t = 0$, $\varphi_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$, найдем $D_1 = a_0^3/32p^2$, $D_2 = 0$. Внесем эти значения D_1 и D_2 в уравнение (16):

$$\varphi_1 = \frac{a_0^3}{32p^2}(\cos pt - \cos 3pt). \qquad (17)$$

Для определения искомого закона колебаний φ, а также круговой частоты p маятника используем результаты (11), (13) и (17)

в выражениях (6) и (7): $\varphi = a_0 \cos pt + \mu \frac{a_0^3}{32p^2}(\cos pt - \cos 3pt)$, $p^2 = k^2 - \frac{3}{4}\mu a_0^2$. Использовав значение (5) малого параметра μ, окончательно найдем второе приближение

$$\varphi = a_0 \cos pt + \frac{1}{192}\left(\frac{k}{p}\right)^2 a_0^3 (\cos pt - \cos 3pt), \tag{18}$$

$$p^2 = k^2\left(1 - \frac{1}{8}a_0^2\right), \tag{19}$$

где a_0 — начальный угол отклонения маятника от вертикали, а $k^2 = Pl/I_z$.

Из выражения (19) найдем $p = k\left(1 - \frac{1}{8}a_0^2\right)^{1/2}$. Приняв во внимание, что с точностью до членов, содержащих a_0^2 включительно, имеем $\left(1 - \frac{1}{8}a_0^2\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{16}a_0^2$, найдем искомую круговую частоту p:

$$p = k\left(1 - \frac{1}{16}a_0^2\right). \tag{20}$$

Как следует из формулы (20), маятник колеблется по закону (18) с круговой частотой p (20), зависящей от a_0 — начального отклонения маятника. Значит, колебания не изохронны, т. е. зависят от начальных условий движения.

Напомним, что приближенному линейному дифференциальному уравнению $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$ соответствовали изохронные гармонические колебания (3) $\varphi = a_0 \cos kt$, где круговая частота $k = \sqrt{Pl/I_z}$ не зависела от начальных условий движения. Таким образом, даже приближенное решение нелинейного уравнения, выполненное в этой задаче, дало возможность обнаружить отсутствие изохронности колебаний.

Влияние начального углового отклонения a_0 маятника на круговую частоту p незначительно. Так, при $a_0 = 30° = 0{,}52$ *рад* из формулы (20) получим $p = 0{,}983k$.

В заключение, использовав результат (20) в уравнении (18) и применив при этом приближенное равенство $\frac{1}{1 - \frac{1}{16}a_0^2} \approx 1 + \frac{1}{16}a_0^2$, найдем искомый закон колебаний маятника в виде

$$\varphi = a_0 \cos k\left(1 - \frac{1}{16}a_0^2\right)t + \frac{1}{192}\left(1 + \frac{1}{16}a_0^2\right)a_0^3\left[\cos k\left(1 - \frac{1}{16}a_0^2\right)t - \right.$$
$$\left. - \cos 3k\left(1 - \frac{1}{16}a_0^2\right)t\right]. \tag{21}$$

Если в уравнении (21) пренебречь членами, содержащими a_0^3, то придем к приближенному результату (3) $\varphi = a_0 \cos kt$, соответствующему линейному дифференциальному уравнению $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$*).

*) Ниже данная задача решена методом медленно меняющихся амплитуд (задача 20.3), а также методом эквивалентной линеаризации (задача 20.5) и приведена сравнительная оценка разных способов решения.

3°. Метод медленно меняющихся амплитуд (метод Ван-дер-Поля)*). Этим методом удобно пользоваться в случаях, когда движение материальной системы описывается дифференциальным уравнением с малой нелинейностью:

$$\ddot{x}+k^2x=\mu f(x,\ \dot{x}), \qquad (4^*)$$

где $f(x,\ \dot{x})$ — нелинейная функция x и $\dot{x}$, а μ — малый параметр.

При $f(x,\ \dot{x})=0$ уравнение (4*) обращается в линейное: $\ddot{x}+k^2x=0$, общее решение которого, как известно, имеет вид

$$x=a\sin(kt+\alpha), \text{ а } \dot{x}=ak\cos(kt+\alpha).$$

В 1926 г. Ван-дер-Поль предложил считать, что при малой нелинейности общее решение уравнения (4*) и его первая производная по времени имеют вид, соответствующий линейному уравнению $\ddot{x}+k^2x=0$, т. е.

$$x=a\sin(kt+\alpha), \qquad \dot{x}=ak\cos(kt+\alpha), \qquad (5^*)$$

где амплитуда a и начальная фаза α являются медленно меняющимися функциями времени

$$a=a(t), \quad \alpha=\alpha(t).$$

Этот метод получил в дальнейшем математическое обоснование в работах Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси**).

Можно показать, что данное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка (4*) эквивалентно двум нелинейным дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\left.\begin{aligned}\dot{a}&=\frac{\mu}{k}f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi),\\ \dot{\alpha}&=-\frac{\mu}{ak}f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi),\end{aligned}\right\} \qquad (6^*)$$

где введено обозначение $\psi=kt+\alpha$.

Было предложено вместо этих точных уравнений интегрировать приближенные — *«укороченные» уравнения*, которые получаются из (6*) путем замены их правых частей соответствующими усредненными значениями в пределах от 0 до 2π, т. е.

$$\dot{a}=\frac{\mu}{2\pi k}\int_0^{2\pi}f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\cos\psi\,d\psi, \qquad (7^*)$$

$$\dot{\alpha}=-\frac{\mu}{2\pi ka}\int_0^{2\pi}f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\sin\psi\,d\psi. \qquad (8^*)$$

*) B. Van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibration, Radio Review, 1, 701 (1926).

**) Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений, ЖЭТФ, т. IV, 1934.

При вычислении интегралов, стоящих в правых частях этих приближенных нелинейных уравнений, амплитуду a надо считать постоянной.

Интегрирование дифференциальных уравнений свободных колебаний с малой нелинейностью методом Ван-дер-Поля рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) составить дифференциальное уравнение свободных колебаний, записав его в виде (4*);

2) приняв $x = a\sin\psi$, $\dot{x} = ak\cos\psi$, вычислить определенные интегралы

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\cos\psi\,d\psi,\qquad \int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\sin\psi\,d\psi,$$

считая при этом a постоянной величиной;

3) внести результаты предыдущего пункта в правые части «укороченных» уравнений Ван-Дер-Поля (7*) и (8*);

4) проинтегрировать уравнение (7*) и вычислить общий интеграл

$$a = a(t,\ C_1);$$

5) подставив полученное значение $a(t,\ C_1)$ в «укороченное» дифференциальное уравнение (8*), проинтегрировать его и вычислить общий интеграл $\alpha = \alpha(t,\ C_1,\ C_2)$;

6) подставить полученные значения $a(t,\ C_1)$ и $\alpha(t,\ C_1,\ C_2)$ в уравнения (5*) и с помощью заданных начальных условий движения $t=0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ определить постоянные интегрирования C_1 и C_2;

7) внести полученные значения C_1 и C_2 в $a = a(t,\ C_1)$ и $\alpha = \alpha(t,\ C_1,\ C_2)$, вычисленные в пп. 4) и 5);

8) подставить в искомое уравнение движения

$$x = a(t)\sin[kt + \alpha(t)]$$

значения $a(t)$ и $\alpha(t)$, полученные в предыдущем пункте.

Задача 20.3. Решить задачу 20.2 методом медленно меняющихся амплитуд.

Решение. Запишем дифференциальное уравнение (4) задачи 20.2 в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = \mu\varphi^3, \tag{1}$$

где

$$\mu = \frac{k^2}{6}. \tag{2}$$

Будем искать решение уравнения (1) и его первую производную по времени в виде

$$\varphi = a(t)\sin[kt + \alpha(t)],\quad \dot{\varphi} = k\cdot a(t)\cos[kt + \alpha(t)], \tag{3}$$

где переменная амплитуда $a(t)$ и переменная начальная фаза $\alpha(t)$ подлежат последующему определению.

Сопоставив уравнения (1) и (4*), приведенное в обзоре теории, видим, что в данном случае при $x=\varphi$ мы получаем

$$f(\varphi,\ \dot\varphi)=\varphi^3.$$

Обозначив $\varphi=a\sin\psi$, и $\dot\varphi=ak\cos\psi$, запишем

$$f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)=a^3\sin^3\psi. \tag{4}$$

Для определения $a(t)$ и $\alpha(t)$ предварительно вычислим определенные интегралы

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\cos\psi\,d\psi \ \text{ и } \int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\sin\psi\,d\psi,$$

которые при наличии (4) и в предположении, что величина a постоянна, примут вид

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\cos\psi\,d\psi&=a^3\int_0^{2\pi}\sin^3\psi\cos\psi\,d\psi,\\ \int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\sin\psi\,d\psi&=a^3\int_0^{2\pi}\sin^4\psi\,d\psi.\end{aligned} \tag{5}$$

Использовав в первом интеграле (5) подстановку $\sin\psi=z$, а во втором интеграле (5) формулу $\sin^4\psi=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\psi+\frac{1}{8}\cos 4\psi$, найдем

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\cos\psi\,d\psi&=0,\\ \int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\sin\psi\,d\psi&=\frac{3}{4}\pi a^3.\end{aligned} \tag{6}$$

Внеся значения интегралов (6) в «укороченные» уравнения Ван-дер-Поля (7*) и (8*), приведенные в обзоре теории, и приняв во внимание (2), получим

$$\dot a=0,\quad \dot\alpha=-\frac{1}{16}ka^2. \tag{7}$$

Из первого уравнения (7) найдем

$$a(t)=C_1. \tag{8}$$

После подстановки (8) во второе уравнение (7) оно примет вид $\dot\alpha=-\frac{1}{16}kC_1^2$. Проинтегрировав его, получим

$$\alpha(t)=-\frac{1}{16}kC_1^2t+C_2. \tag{9}$$

Подстановка результатов (8) и (9) в уравнения (3) дает

$$\varphi = C_1 \sin\left[k\left(1-\frac{1}{16}C_1^2\right)t + C_2\right], \qquad (10)$$

$$\dot\varphi = kC_1 \cos\left[k\left(1-\frac{1}{16}C_1^2\right)t + C_2\right]. \qquad (11)$$

Внеся в (10) $t=0$, $\varphi=a_0$, а в (11) $t=0$, $\dot\varphi=0$, получим систему уравнений $a_0=C_1\sin C_2$, $0=kC_1\cos C_2$. Решив эту систему, найдем $C_1=a_0$, $C_2=\pi/2$ (при $C_1=0$ решение системы тождественно обращается в нуль). Подставив полученные значения C_1 и C_2 в (10), найдем искомое уравнение колебаний маятника

$$\varphi = a_0 \cos k\left(1-\frac{1}{16}a_0^2\right)t. \qquad (12)$$

Как видно из (12), круговая частота p колебаний маятника, зависящая от его начального углового отклонения a_0, равна

$$p = k\left(1-\frac{1}{16}a_0^2\right). \qquad (13)$$

Сопоставление формулы (12) с результатом (21) задачи 20.2, решенной методом разложения по малому параметру, показывает, что методом Ван-дер-Поля, при несколько меньшем объеме вычислений, получено первое — основное — слагаемое уравнения (21) задачи 20.2. Величина же круговой частоты p, найденная двумя методами, оказалась одинаковой (см. выражение (13) и формулу (20) задачи 20.2). Поэтому применение метода Ван-дер-Поля для определения первого приближения следует считать целесообразным и эффективным *).

Задача 20.4. Материальная точка массы m движется вдоль оси x под действием сил упругости и сопротивления, проекции которых соответственно равны $F_x=-cx$, $R_x=-\beta_1\dot x-\beta_3\dot x^3$, где c, β_1 и β_3 — положительные постоянные. В начальный момент точка находилась в крайнем положении, определяемом координатой $x=a_0$ и была отпущена без начальной скорости.

Найти уравнение движения точки методом Ван-дер-Поля.

Решение. Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot x = F_x + R_x.$$

При заданных значениях F_x и R_x запишем

$$m\ddot x = -cx - \beta_1\dot x - \beta_3\dot x^3,$$

или

$$\ddot x + k^2 x = -2n_1\dot x - n_3\dot x^3, \qquad (1)$$

*) Ниже эта задача решена методом эквивалентной линеаризации (задача 20.5) и дана сравнительная оценка разных способов решения.

где обозначено $k^2=c/m$, $2n_1=\beta_1/m$, $n_3=\beta_3/m$, причем n_1 и n_3 положительны.

Ищем решение x уравнения (1) и его первую производную $\dot{x}$ по времени в виде

$$x=a(t)\sin[kt+\alpha(t)],\qquad \dot{x}=ka(t)\cos[kt+\alpha(t)], \tag{2}$$

где $a(t)$ и $\alpha(t)$ — переменные амплитуда и начальная фаза, подлежащие последующему определению.

Сопоставив уравнения (1) и (4*), приведенные в обзоре теории, находим $\mu f(x,\ \dot{x})=-2n_1\dot{x}-n_3\dot{x}^3$. Обозначив $x=a\sin\psi$, а $\dot{x}=$ $=ak\cos\psi$, запишем

$$\mu f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)=-2n_1ak\cos\psi-n_3a^3k^3\cos^3\psi. \tag{3}$$

Для нахождения $a(t)$ и $\alpha(t)$ предварительно вычислим определенные интегралы

$$\int_0^{2\pi}\mu f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\cos\psi\,d\psi,\qquad \int_0^{2\pi}\mu f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\sin\psi\,d\psi,$$

которые при наличии равенства (3) и в предположении, что a — постоянно, примут вид

$$\int_0^{2\pi}\mu f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\cos\psi\,d\psi=$$
$$=-2n_1ak\int_0^{2\pi}\cos^2\psi\,d\psi-n_3a^3k^3\int_0^{2\pi}\cos^4\psi\,d\psi, \tag{4}$$

$$\int_0^{2\pi}\mu f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\sin\psi\,d\psi=$$
$$=-2n_1ak\int_0^{2\pi}\cos\psi\sin\psi\,d\psi-n_3a^3k^3\int_0^{2\pi}\cos^3\psi\sin\psi\,d\psi. \tag{5}$$

Использовав при вычислении интегралов (4) формулы

$$\cos^2\psi=\frac{1}{2}(1+\cos 2\psi),\qquad \cos^4\psi=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\psi+\frac{1}{8}\cos 4\psi$$

и сделав в интегралах (5) подстановку $\cos\psi=z$, найдем

$$\int_0^{2\pi}\mu f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\cos\psi\,d\psi=-2\pi n_1ak-\frac{3}{4}\pi n_3a^3k^3, \tag{6}$$

$$\int_0^{2\pi}\mu f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\sin\psi\,d\psi=0. \tag{7}$$

Внеся значения интегралов (6) и (7) в «укороченные» уравнения Ван-дер-Поля (7*) и (8*), приведенные в обзоре теории, получим

$$\dot{a} = -n_1 a\left(1 + \frac{3}{8}k^2\frac{n_3}{n_1}a^2\right), \tag{8}$$

$$\dot{\alpha} = 0. \tag{9}$$

Обозначив в уравнении (8)

$$\lambda^2 = \frac{3}{8}k^2\frac{n_3}{n_1} \tag{10}$$

и отделив переменные, найдем

$$\frac{da}{a(1+\lambda^2 a^2)} = -n_1 dt.$$

Приняв во внимание, что

$$\frac{1}{a(1+\lambda^2 a^2)} = \frac{1}{a} - \frac{\lambda^2 a}{1+\lambda^2 a^2},$$

запишем

$$\frac{da}{a} - \frac{\lambda^2 a\,da}{1+\lambda^2 a^2} = -n_1\,dt.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\ln a - \frac{1}{2}\ln(1+\lambda^2 a^2) + \ln C_1 = -n_1 t,$$

т. е.

$$\ln\frac{C_1 a}{\sqrt{1+\lambda^2 a^2}} = -n_1 t, \tag{11}$$

где постоянная интегрирования C_1 подлежит последующему определению.

Решив уравнение (11) относительно a, найдем

$$a = \frac{e^{-n_1 t}}{\sqrt{C_1^2 - \lambda^2 e^{-2n_1 t}}}. \tag{12}$$

Интегрирование уравнения (9) дает

$$\alpha = C_2. \tag{13}$$

Внесем результаты (12) и (13) в уравнения (2):

$$x = \frac{e^{-n_1 t}}{\sqrt{C_1^2 - \lambda^2 e^{-2n_1 t}}}\sin(kt + C_2), \tag{14}$$

$$\dot{x} = \frac{ke^{-n_1 t}}{\sqrt{C_1^2 - \lambda^2 e^{-2n_1 t}}}\cos(kt + C_2). \tag{15}$$

Подставив в равенство (14) начальные условия $t=0$, $x=a_0$, а в равенство (15) начальные условия $t=0$, $\dot{x}=0$, получим уравнения

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{C_1^2-\lambda^2}}\sin C_2, \qquad 0=\frac{k}{\sqrt{C_1^2-\lambda^2}}\cos C_2.$$

Решив эту систему, найдем $C_2=\pi/2$, $C_1=\sqrt{1+\lambda^2 a_0^2}/a_0$. Использовав эти значения C_1 и C_2, запишем искомое приближение в виде

$$x=\frac{a_0 e^{-n_1 t}}{\sqrt{1+\lambda^2 a_0^2-\lambda^2 a_0^2 e^{-2n_1 t}}}\cos kt. \tag{16}$$

Из равенства (16) следует, что при $t\to\infty$ получаем $x\to 0$, т. е. движение затухает *).

4°. Метод эквивалентной линеаризации (метод Крылова и Боголюбова) **). На основе работ Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова создан ряд приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений нелинейных колебаний ***). Здесь приводится метод *эквивалентной линеаризации.*

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}+k^2 x=\mu f(x, \dot{x}), \tag{9*}$$

где $f(x, \dot{x})$ — нелинейная функция от x и $\dot{x}$, а μ — малый параметр.

При $\mu=0$ уравнение (9*) вырождается в линейное дифференциальное уравнение свободных колебаний $\ddot{x}+k^2x=0$, решение которого имеет вид $x=a\sin\psi$, где $a=\text{const}$, $\psi=kt+\alpha$, $\alpha=\text{const}$, и, следовательно, $\dot{x}=ak\cos\psi$.

Метод эквивалентной линеаризации основан на предположении, что нелинейность в уравнении (9*) мала и колебания близки к гармоническим. Поэтому ищем x и $\dot{x}$ для уравнения (9*) в виде

$$x=a\sin\psi, \qquad \dot{x}=a\omega\cos\psi, \tag{10*}$$

где

$$\psi=\omega t+\alpha. \tag{11*}$$

Здесь $a=a(t)$ и $\omega=\omega[a(t)]$ — медленно меняющиеся функции времени, а α — постоянная, причем a, ω, ψ и α подлежат последующему определению.

Можно показать, что с точностью до членов, содержащих малый параметр μ в первой степени включительно, колебания, описываемые

*) Ниже эта задача решена методом эквивалентной линеаризации (задача 20.6) и приведена сравнительная оценка различных способов решения.

**) Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Изд-во АН УССР, Киев, 1937.

***) Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.

нелинейным дифференциальным уравнением (9*), эквивалентны колебаниям, описываемым линейным дифференциальным уравнением

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+\omega^2x=0, \qquad (12^*)$$

где

$$n=-\frac{\mu}{2\pi a\omega}\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi)\cos\psi\,d\psi, \qquad (13^*)$$

$$\omega^2=k^2-\frac{\mu}{\pi a}\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi)\sin\psi\,d\psi. \qquad (14^*)$$

Заметим, что n и ω являются функциями от a.

Как известно (см. п. 3° § 4 гл. VIII второго тома этой книги) линейное дифференциальное уравнение (12*) описывает свободные колебания при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости. Его решение имеет вид $x=a\sin\psi$, где $a=Ce^{-nt}$, $\psi=\sqrt{\omega^2-n^2}\,t+\alpha$. Так как n (см. 13*) является величиной порядка малости μ, то с принятой степенью точности запишем $\psi\approx\omega t+\alpha$ и, следовательно,

$$\dot{\psi}=\omega. \qquad (15^*)$$

Учтя, что $a=Ce^{-nt}$, получим $\dot{a}=-nCe^{-nt}$, т. е.

$$\dot{a}=-na. \qquad (16^*)$$

Таким образом, задача об интегрировании данного нелинейного дифференциального уравнения (9*) второго порядка сводится к интегрированию системы двух дифференциальных уравнений (16*) и (15*) первого порядка.

В заключение заметим, что с точностью до членов, содержащих малый параметр μ в первой степени включительно, результаты, полученные данным методом, эквивалентны результатам, найденным методом медленно меняющихся амплитуд (см. предыдущий п. 3° этого параграфа).

При интегрировании дифференциальных уравнений с малой нелинейностью методом эквивалентной линеаризации нет необходимости в составлении линейного уравнения (12*).

Рекомендуем следующую последовательность решения задач:

1) составить дифференциальное уравнение свободных колебаний, представив его в виде

$$\ddot{x}+k^2x=\mu f(x,\ \dot{x}),$$

где $f(x,\ \dot{x})$ — нелинейная функция от x и $\dot{x}$, а μ — малый параметр;

2) приняв $x=a\sin\psi$, $\dot{x}=a\omega\cos\psi$, записать

$$f(x,\ \dot{x})=f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi);$$

3) вычислить определенные интегралы

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi)\cos\psi\,d\psi,\quad \int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi)\sin\psi\,d\psi;$$

4) использовав результаты предыдущего пункта, вычислить n и ω^2 по формулам (13*) и (14*). При этом получим $n=n(a,\omega)$, $\omega=\omega(a)$;

5) внеся значение ω в n, найти $n=n(a)$;

6) полученные в пп. 4) и 5) выражения $\omega(a)$ и $n(a)$, подставить в дифференциальные уравнения (16*) и (15*);

7) проинтегрировав уравнение (16*), найти $a=a(t, C_1)$;

8) внести полученное значение $a=a(t, C_1)$ в уравнение (15*), проинтегрировать его и найти $\psi=\psi(t, C_1, C_2)$;

9) подставить результаты, полученные в пп. 7) и 8), в уравнения (10*) и с помощью начальных условий движения $t=0$, $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$ найти постоянные интегрирования C_1 и C_2;

10) внести значения C_1 и C_2 в a и ψ, вычисленные в пп. 7) и 8), и определить $a=a(t)$ и $\psi=\psi(t)$;

11) найти искомый закон движения, подставив $a(t)$ и $\psi(t)$ в первое уравнение (10*): $x=a\sin\psi$.

Если все силы потенциальны, а связи стационарны, то происходят незатухающие колебания с постоянной амплитудой a. При этом $da/dt=0$. Использовав (16*) и (13*), получим

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi)\cos\psi\,d\psi=0.$$

Это — условие наличия установившегося режима колебаний.

Задача 20.5. Решить задачу 20.2 методом эквивалентной линеаризации.

Решение. Определение закона движения физического маятника было выполнено дважды: методом малого параметра в задаче 20.2 и методом медленно меняющихся амплитуд в задаче 20.3. (*При ссылках на решение задачи 20.3 номера формул будем заключать в квадратные скобки.*)

Воспользовавшись формулами [1] и [2], решим дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=\mu\varphi^3, \tag{1}$$

где

$$\mu=\frac{k^2}{6}, \tag{2}$$

методом эквивалентной линеаризации.

Сопоставив уравнение (1) и уравнение (9*), приведенное в обзоре теории, находим

$$f(\varphi,\ \dot{\varphi})=\varphi^3. \tag{3}$$

Будем искать φ — решение уравнения (1) и его первую производную $\dot\varphi$ по времени в виде

$$\varphi = a\sin\psi,\quad \dot\varphi = a\omega\cos\psi, \tag{4}$$

где $a = a(t)$, $\psi = \psi(t)$ и $\omega = \omega[a(t)]$ подлежат последующему определению.

Подставив в (3) выражения (4), запишем

$$f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi) = a^3\sin^3\psi. \tag{5}$$

Вычислим определенные интегралы

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi)\cos\psi\, d\psi$$

и

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi)\sin\psi\, d\psi.$$

Использовав в подынтегральных выражениях формулу (5), получим

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi)\cos\psi\, d\psi = a^3\int_0^{2\pi}\sin^3\psi\cos\psi\, d\psi = 0, \tag{6}$$

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi)\sin\psi\, d\psi = a^3\int_0^{2\pi}\sin^4\psi\, d\psi = \frac{3}{4}\pi a^3. \tag{7}$$

При вычислении интеграла (6) была сделана подстановка $\sin\psi = z$, а в интеграле (7) была использована формула

$$\sin^4\psi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\psi + \frac{1}{8}\cos 4\psi.$$

Внеся результат (7) в формулу (14*), проведенную в обзоре теории, получим $\omega^2 = k^2 - \frac{3}{4}\mu a^2$. С точностью до членов, содержащих малый параметр μ в первой степени включительно, найдем

$$\omega = k\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\mu a^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx k\left(1 - \frac{3}{8}\frac{\mu a^2}{k^2}\right).$$

Приняв во внимание обозначение (2), получим

$$\omega = k\left(1 - \frac{a^2}{16}\right). \tag{8}$$

Внеся результат (6) в формулу (13*), данную в обзоре теории, найдем

$$n = 0. \tag{9}$$

Теперь на основании метода эквивалентной линеаризации, можно нелинейное дифференциальное уравнение (1) заменить системой двух

дифференциальных уравнений первого порядка (15*) и (16*), приведенной в обзоре теории. Воспользовавшись формулами (8) и (9), запишем эту систему в виде

$$\dot{a}=0, \quad (10)$$

$$\dot{\psi}=k\left(1-\frac{a^2}{16}\right). \quad (11)$$

Из уравнения (10) следует, что амплитуда a колебаний постоянна, т. е.

$$a=C_1. \quad (12)$$

При этом уравнение (11) примет вид

$$\dot{\psi}=k\left(1-\frac{C_1^2}{16}\right).$$

Проинтегрировав его, получим

$$\psi=k\left(1-\frac{C_1^2}{16}\right)t+C_2. \quad (13)$$

Подставив значения (12) и (13) в первое уравнение (4), найдем искомый закон движения физического маятника

$$\varphi=C_1\sin\left[k\left(1-\frac{C_1^2}{16}\right)t+C_2\right]. \quad (14)$$

Уравнения (14) и [10] тождественны. После определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 получим результат [12].

Из сопоставления решения этой задачи и задачи 20.3 следует, что объем вычислений и степень трудности примерно одинаковы.

Задача 20.6. Решить задачу 20.4 методом эквивалентной линеаризации.

Решение. Воспользуемся дифференциальным уравнением [1] задачи 20.4 (номера формул задачи 20.4 будем заключать в квадратные скобки):

$$\ddot{x}+k^2x=-2n_1\dot{x}-n_3\dot{x}^3. \quad (1)$$

Сопоставив уравнение (1) и уравнение (9*), приведенное в обзоре теории, запишем

$$\mu f(x,\ \dot{x})=-2n_1\dot{x}-n_3\dot{x}^3. \quad (2)$$

Будем искать решение x уравнения (1) и его первую производную $\dot{x}$ по времени в виде

$$x=a\sin\psi, \qquad \dot{x}=a\omega\cos\psi, \quad (3)$$

где $a=a(t)$, $\psi=\psi(t)$ и $\omega=\omega[a(t)]$ подлежат последующему определению.

Подставив (3) в (2), получим

$$\mu f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi) = -2n_1 a\omega\cos\psi - n_3 a^3\omega^3\cos^3\psi. \qquad (4)$$

Нетрудно видеть, что правые части формул (4) и [3] одинаковы. Поэтому, минуя вычисление определенных интегралов, воспользуемся результатами [6] и [7]:

$$\mu\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi)\cos\psi\,d\psi = -2\pi n_1 a\omega - \frac{3}{4}\pi n_3 a^3\omega^3, \qquad (5)$$

$$\mu\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi)\sin\psi\,d\psi = 0. \qquad (6)$$

Внеся выражения (5) и (6) в формулы (13*) и (14*), данные в обзоре теории, найдем

$$n = n_1 + \frac{3}{8}n_3 a^2 k^2, \qquad \omega = k. \qquad (7)$$

В данном случае параметр ω оказался постоянным.

Подставив значения ω и n из формул (7) в уравнения (16*) и (15*), приведенные в обзоре теории, получим систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{a} = -\left(n_1 + \frac{3}{8}n_3 a^2 k^2\right)a, \qquad (8)$$

$$\dot{\varphi} = k. \qquad (9)$$

Так как уравнения (8) и [8] одинаковы, то, воспользовавшись результатом интегрирования уравнения [8], приведенным в формуле [12], запишем

$$a = \frac{e^{-n_1 t}}{\sqrt{C_1^2 - \lambda^2 e^{-2n_1 t}}}, \qquad (10)$$

где λ^2 дано формулой [10], а C_1 — постоянная интегрирования.

Проинтегрировав уравнение (9), найдем

$$\psi = kt + C_2, \qquad (11)$$

где C_2 — постоянная интегрирования.

Подставив (10) и (11) в первое уравнение (3), получим искомый закон движения в виде

$$x = \frac{e^{-n_1 t}}{\sqrt{C_1^2 - \lambda^2 e^{-2n_1 t}}}\sin(kt + C_2). \qquad (12)$$

Уравнения (12) и [14] тождественны. После определения C_1 и C_2 (см. решение задачи 20.4), получим результат [16].

Степень трудности и объем вычислений в решениях этой задачи и задачи 20.4 примерно одинаковы.

§ 3. Вынужденные колебания нелинейных систем (аналитические методы)

1°. Метод поэтапного интегрирования. В п. 1° § 2 был рассмотрен метод поэтапного интегрирования в применении к свободным колебаниям нелинейных систем. Этим методом можно также пользоваться при исследовании вынужденных колебаний нелинейных систем в случаях, когда характеристика силы упругости или силы сопротивления составлена из нескольких прямолинейных отрезков *).

Решение задач сводится к интегрированию линейных дифференциальных уравнений, соответствующих прямолинейным участкам характеристики силы. При этом должны выполняться условия сопряжения уравнений; конечные условия движения на данном этапе должны быть равны соответствующим начальным условиям движения на следующем этапе.

В итоге вынужденные нелинейные колебания описываются системой уравнений, *число которых равно числу прямолинейных отрезков* характеристики силы упругости.

Применение метода поэтапного интегрирования к задачам на вынужденные колебания оказывается более сложным по сравнению с применением к соответствующим задачам на свободные колебания. При этом приходится решать довольно громоздкие трансцендентные уравнения.

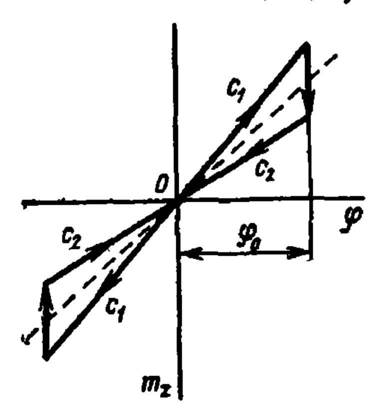
Задача 20.7 **). Вал, жестко заделанный одним концом и несущий на другом свободном конце массу с моментом инерции I_z, где z — ось симметрии вала, совершает крутильные колебания. К массе приложен возмущающий момент, изменяющийся по гармоническому закону с круговой частотой ω. Наибольшая величина возмущающего момента равна M_0. К валу подключен фрикционный демпфер (поглотитель) крутильных колебаний. Демпфер создает момент сил сопротивления, прямо пропорциональный углу поворота вала.

Суммарная, так называемая «треугольная» характеристика изменения момента сил упругости вала и момента сил сопротивления демпфера изображена на рисунке. При повороте колеблющейся системы из положения равновесия оба момента, имея одинаковый знак, складываются (ветвь c_1), а при ее возвращении в положение равновесия эти моменты, имея разные знаки, вычитаются (ветвь c_2). При этом происходит разрыв характеристики и уменьшение суммарного момента на величину $(c_1 - c_2)\varphi_0$, где φ_0 — максимальное значение φ, а c_1 и c_2 — коэффициенты упругости, соответствующие верхней

*) Вообще методом поэтапного интегрирования можно пользоваться в случаях, когда нелинейное дифференциальное уравнение интегрируется на отдельных участках.

**) М. И. Бать, Вынужденные колебания в системе с гистерезисом, ПММ, Новая серия, том IV, вып. 2, 1940.

и нижней ветвям характеристики. При повороте колеблющейся системы в другую сторону от положения равновесия суммарная характеристика получается аналогичной. В результате образуется гистерезисная петля в виде двух равных треугольников с общей вершиной и сторонами, служащими продолжением одна другой. Сумма площадей этих треугольников равна численному значению работы, поглощенной за один период колебаний. (Подобная «треугольная» характеристика имеет также место у листовых рессор железнодорожных вагонов.) В случае отсутствия демпфера характеристика изменения момента сил упругости вала была бы прямой (см. штриховую линию на рисунке) с коэффициентом упругости $c=\frac{1}{2}(c_1+c_2)$.



К задаче 20.7.

Найти уравнение крутильных колебаний, считая, что они совершаются по периодическому закону с круговой частотой ω, равной круговой частоте возмущающего момента.

Решение. Суммарная нелинейная «треугольная» характеристика моментов сил упругости и сопротивления является на отдельных участках линейной. Поэтому для исследования данной нелинейной системы целесообразно применить метод поэтапного интегрирования, разбив период колебаний $T=2\pi/\omega$ на четыре этапа:

1) поворот из ненапряженного — нулевого — положения в крайнее положение — против хода часовой стрелки,

2) возвращение из крайнего в нулевое положение,

3) поворот из нулевого положения в другое крайнее положение — по ходу часовой стрелки и

4) возвращение из крайнего в нулевое положение.

«Треугольная» характеристика симметрична относительно полупериода. Поэтому первый и второй этапы происходят за первый полупериод $T/2=\pi/\omega$, а второй и третий этапы — за второй полупериод π/ω.

Поворот из нулевого положения в крайнее происходит при коэффициенте c_1, а возвращение в нулевое положение — при c_2, причем $c_1>c_2$. Поэтому продолжительность отклонения из нулевого положения в крайнее не равна продолжительности возврата из крайнего положения в нулевое. Обозначим через τ пока неизвестную продолжительность отклонения из нулевого положения в крайнее. В связи с этим этапы будут происходить в следующие промежутки времени:

$$1)\ 0\leqslant t\leqslant\tau, \qquad 2)\ \tau\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{\omega},$$

$$3)\ \frac{\pi}{\omega}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{\omega}+\tau, \qquad 4)\ \frac{\pi}{\omega}+\tau\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{\omega}.$$

При наличии момента сил сопротивления имеет место отставание по фазе движения от возмущающего момента. Поэтому считая, что в начальный момент, т. е. при $t=0$, угол поворота равен нулю $\varphi=0$, введем некоторое опережение движения возмущающим моментом по фазе и обозначим его $\omega\beta$, где β пока неизвестно. В связи с этим запишем возмущающий момент в виде

$$M_z = M_0 \sin\omega(t+\beta).$$

Движение на первом этапе из нулевого положения в крайнее при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ соответствует верхней ветви c_1 «треугольной» характеристики. Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$I_z\ddot{\varphi}_1 = -c_1\varphi_1 + M_0\sin\omega(t+\beta),$$

т. е.

$$\ddot{\varphi}_1 + k_1^2\varphi_1 = m_0\sin\omega(t+\beta), \tag{1}$$

где обозначено $k_1^2 = c_1/I_z$, $m_0 = M_0/I_z$.

Движение на втором этапе — из крайнего положения в нулевое при $\tau \leqslant t \leqslant \pi/\omega$ соответствует нижней ветви c_2 «треугольной» характеристики и описывается дифференциальным уравнением $I_z\ddot{\varphi}_2 = -c_2\varphi_2 + M_0\sin\omega(t+\beta)$, т. е.

$$\ddot{\varphi}_2 + k_2^2\varphi_2 = m_0\sin\omega(t+\beta), \tag{2}$$

где обозначено $k_2^2 = c_2/I_z$, $m_0 = M_0/I_z$.

Третьему этапу соответствует дифференциальное уравнение (1), а четвертому — уравнение (2).

Общие решения дифференциальных уравнений (1) и (2) имеют вид

$$\varphi_1 = C_1\cos k_1t + C_2\sin k_1t + \frac{m_0}{k_1^2-\omega^2}\sin\omega(t+\beta), \tag{3}$$

$$\varphi_2 = C_3\cos k_2t + C_4\sin k_2t + \frac{m_0}{k_2^2-\omega^2}\sin\omega(t+\beta). \tag{4}$$

Случаи $k_1=\omega$ и $k_2=\omega$ ниже не рассматриваются.

Для определения шести неизвестных: четырех постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4, а также τ и β воспользуемся начальными и конечными условиями движения на отдельных этапах, а также условиями сопряжения.

Взяв производные функций (3) и (4) по времени, запишем

$$\dot{\varphi}_1 = -C_1k_1\sin k_1t + C_2k_1\cos k_1t + \frac{m_0\omega}{k_1^2-\omega^2}\cos\omega(t+\beta), \tag{5}$$

$$\dot{\varphi}_2 = -C_3k_2\sin k_2t + C_4k_2\cos k_2t + \frac{m_0\omega}{k_2^2-\omega^2}\cos\omega(t+\beta). \tag{6}$$

Подставим в уравнение (3) значения $t=0$, $\varphi_1=0$, в уравнение (4) значения $t=\pi/\omega$, $\varphi_2=0$, в уравнение (5) значения $t=\tau$, $\dot{\varphi}_1=0$,

в уравнение (6) значения $t=\tau$, $\varphi_2=0$. Решив полученную систему уравнений, найдем

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{m_0}{k_1^2-\omega^2}\sin\omega\beta,\\
C_2 &= -\frac{m_0}{k_1^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{\cos k_1\tau}\left[\frac{\omega}{k_1}\cos\omega(\tau+\beta)+\sin k_1\tau\sin\omega\beta\right],\\
C_3 &= \frac{m_0}{k_2^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{\cos k_2\left(\frac{\pi}{\omega}-\tau\right)}\times\\
&\qquad\times\left[\cos k_2\tau\sin\omega\beta+\frac{\omega}{k_2}\cos\omega(t+\beta)\sin k_2\frac{\pi}{\omega}\right],\\
C_4 &= \frac{m_0}{k_2^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{\cos k_2\left(\frac{\pi}{\omega}-\tau\right)}\times\\
&\qquad\times\left[\sin k_2\tau\sin\omega\beta-\frac{\omega}{k_2}\cos\omega(t+\beta)\cos k_2\frac{\pi}{\omega}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

После внесения этих значений (7) в уравнения (3) и (4) в уравнениях остаются неизвестными τ и β, для определения которых воспользуемся условиями сопряжения:

$$1)\ \varphi_1(\tau)=\varphi_2(\tau);\qquad 2)\ \dot\varphi_1(0)=-\dot\varphi_2\left(\frac{\pi}{\omega}\right).$$

Для применения первого условия сопряжения подстааим в уравнения (3) и (4) значение $t=\tau$ и приравняем их правые части

$$\begin{aligned}
&C_1\cos k_1\tau+C_2\sin k_1\tau+\frac{m_0}{k_1^2-\omega^2}\sin\omega(\tau+\beta)=\\
&\qquad=C_3\cos k_2\tau+C_4\sin k_2\tau+\frac{m_0}{k_2^2-\omega^2}\sin\omega(\tau+\beta).
\end{aligned}\tag{8}$$

Для использования второго условия сопряжения подставим в уравнение (5) значение $t=0$, в уравнение (6) значение $t=\pi/\omega$ и приравняем их правые части, предварительно помеияв в (6) знаки на обратные. Получим

$$\begin{aligned}
&C_2k_1+\frac{m_0\omega}{k_1^2-\omega^2}\cos\omega\beta=\\
&\qquad=C_3k_2\sin k_2\frac{\pi}{\omega}-C_4k_2\cos k_2\frac{\pi}{\omega}+\frac{m_0\omega}{k_2^2-\omega^2}\cos\omega\beta.
\end{aligned}\tag{9}$$

Заметим, что в уравнениях (8) и (9) постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 определяются по формулам (7).

После ряда несложных преобразований уравнения (8) и (9) принимают вид

$$\operatorname{tg}\omega\beta=\frac{K\sin\omega\tau-B\sqrt{p}\cos\omega\tau}{A-B\sqrt{p}\sin\omega\tau-K\cos\omega\tau}, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg}\omega\beta=\frac{K-A\cos\omega\tau}{\frac{C}{\sqrt{p}}-A\sin\omega\tau}, \tag{11}$$

где приняты обозначения

$$p=\frac{\omega^2}{k_2^2},\qquad q=\frac{k_1^2}{k_2^2}=\frac{c_1}{c_2},$$

$$A=\frac{1}{q-p}\cdot\frac{1}{\cos\sqrt{\frac{q}{p}}\,\omega\tau}+\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{\sqrt{p}}(\pi-\omega\tau)},$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{q}\,(q-p)}\cdot\operatorname{tg}\sqrt{\frac{q}{p}}\,\omega\tau+\frac{1}{1-p}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{p}}(\pi-\omega\tau),$$

$$C=\frac{\sqrt{q}}{q-p}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{q}{p}}\,\omega\tau+\frac{1}{1-p}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{p}}(\pi-\omega\tau),\qquad K=\frac{1-q}{(q-p)(1-p)}.$$

Из системы трансцендентных уравнений (10) и (11) можно найти искомые значения τ и $\operatorname{tg}\omega\beta$ для фиксированной пары значений p и q, т. е. для заданного соотношения между c_1, c_2 и ω. Решив эту систему уравнений, например, графически, найдем $\operatorname{tg}\omega\beta$ и $\omega\tau$. Напомним, что через τ обозначен промежуток времени отклонения от нулевого положения в крайнее. Поэтому $\omega\tau$ — это фаза, т. е. угол, соответствующий моменту τ. В связи с этим величину $\omega\tau$ будем впредь называть «углом наибольшего отклонения». Для определения $\operatorname{tg}\omega\beta$ и $\omega\tau$ используем декартовы оси координат. На оси абсцисс будем откладывать значения $\omega\tau$, а на оси ординат—величины $\operatorname{tg}\omega\beta$. Задавая ряд значений $\omega\tau$ и определяя по (10) и (11) соответствующие значения $\operatorname{tg}\omega\beta$, строим по точкам кривые

$$\operatorname{tg}\omega\beta=f_1(\omega\tau),\qquad \operatorname{tg}\omega\beta=f_2(\omega\tau),$$

соответствующие уравнениям (10) и (11). Координаты точки пересечения этих кривых фиксируют искомые значения $\omega\tau$ и $\operatorname{tg}\omega\beta$. Внеся их в уравнения (3) и (4), получим искомый закон крутильных колебаний.

Для определения угловой амплитуды колебаний φ_0 можно воспользоваться любым из этих уравнений, ибо при $t=\tau$ мы имеем $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_0$. Например, из уравнения (3) получим

$$\varphi_0=C_1\cos k_1\tau+C_2\sin k_1\tau+\frac{m_0}{k_1^2-\omega^2}\sin\omega(\tau+\beta), \tag{12}$$

причем $\omega\tau$ и $\omega\beta$ определены в результате графического решения системы трансцендентных уравнений (10) и (11), а C_1 и C_2 — формулами (7).

На практике крутильные колебания валов часто происходят при величине m_0, пропорциональной ω^2. Поэтому будем считать $m_0 = \sigma\omega^2$, где σ — некоторый положительный постоянный коэффициент. В этом случае формула (12) примет вид

$$\varphi_0 = -\frac{\sigma p}{q-p}\cdot\frac{1}{\cos\sqrt{\frac{q}{p}}\,\omega\tau}\times$$
$$\times\left[\sin\omega\beta+\sqrt{\frac{p}{q}}\sin\sqrt{\frac{q}{p}}\,\omega\tau\cos\omega(\tau+\beta)+\sin\omega(t+\beta)\right], \quad (13)$$

где $p=\omega^2/k_2^2$, $q=k_1^2/k_2^2=c_1/c_2$.

Как следует из анализа формулы (13), по мере увеличения q, т. е. момента сил сопротивления, амплитуда колебаний φ_0 убывает. При $p=q$ амплитуда φ_0 неограниченно возрастает.

Условимся в этой нелинейной задаче понимать под резонансом явление вынужденных колебаний, имеющее место при равенстве круговой частоты ω возмущающего момента круговой частоте k собственных колебаний. Круговая частота k определяется при отсутствии момента сил сопротивления, т. е. при вырождении «треугольной» характеристики в прямую линию (см. штриховую линию на рисунке) с коэффициентом жесткости, равным $c=\frac{1}{2}(c_1+c_2)$. Разделив c на момент инерции I_x, получим $k^2=\frac{k_1^2+k_2^2}{2}$, т. е.

$$k=\sqrt{\frac{k_1^2+k_2^2}{2}}.$$

Значит, при резонансе, т. е. при $\omega=k$, получим $q=k_1^2/k_2^2=c_1/c_2=1$, $p=\omega^2/k_2^2=\omega^2/k^2=1$. Подставив значения $q=p=1$ в формулу (13), найдем, что резонансная амплитуда φ_0 неограниченно возрастает.

Вместе с тем с появлением и по мере увеличения момента сил сопротивления, т. е. при $q>1$ наибольшие амплитуды колебаний имеют место уже не при $\omega/k=1$, а несколько смещаются в сторону увеличения ω/k.

Как показывают подсчеты, «угол наибольшего отклонения» $\omega\tau$ сравнительно близок к 90°. Так, для случая колебаний с большим сопротивлением $q=3$ угол $\omega\tau$ равен $\omega\tau\approx77°$ при резонансе и затем монотонно возрастает с увеличением ω, приближаясь к 90°; уже при $\omega/k=2{,}1$ имеем $\omega\tau\approx87°$. При малых значениях момента силы сопротивления, т. е. при $1<q<1{,}25$, угол наибольшего отклонения $\omega\tau$ колеблется при резонансе ($\omega/k=1$) в пределах $88°<\omega\tau<90°$, приближаясь к 90° по мере увеличения ω/k *).

---

*) Ниже эта задача решена вариационным методом (задачи 20.10 и 20.11) и приведена сравнительная оценка разных способов решения.

2°. Метод последовательных приближений. Интегрирование нелинейного дифференциального уравнения вынужденных колебаний можно выполнить с помощью приближенного метода последовательных приближений.

Многочисленные опыты и наблюдения за действующими установками, совершающими нелинейные вынужденные колебания, указывают на наличие установившихся периодических движений. Поэтому, применяя метод последовательных приближений, будем искать периодические решения с круговой частотой, равной круговой частоте возмущающей силы.

Поясним идею этого метода на примере дифференциального уравнения

$$\ddot{x}+k^2x=\mu f(x)+h\sin pt,$$

где μ и h — малые параметры, $f(x)$ — непрерывная нелинейная нечетная функция x.

В первом приближении, опустив в этом уравнении нелинейную часть $\mu f(x)$, находят частное решение x_1 соответствующего линейного дифференциального уравнения

$$\ddot{x}_1+k^2x_1=h\sin pt.$$

Нетрудно видеть, что решение

$$x_1=a_1\sin pt$$

удовлетворяет этому уравнению.

Затем, для отыскания второго приближения x_2, подставляют полученное значение x_1 в нелинейную функцию $\mu f(x)$, т. е. вычисляют $\mu f(x_1)$ и затем интегрируют дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}_2+k^2x_2=\mu f(x_1)+h\sin pt.$$

Решив это уравнение, определяют второе приближение

$$x_2=b_1\sin pt+b_3\sin 3pt+b_5\sin 5pt+\ldots$$

Внеся x_2 в нелинейную функцию $\mu f(x)$, т. е. вычислив $\mu f(x_2)$, переходят к нахождению третьего приближения x_3. Его можно получить, проинтегрировав уравнение

$$\ddot{x}_3+k^2x_3=\mu f(x_2)+h\sin pt.$$

Аналогично определяются последующие приближения.

Ниже приведена последовательность решения задач на вынужденные колебания нелинейной системы с помощью несколько видоизмененного метода Дуффинга*), в основе которого лежит метод последовательных приближений.

---

*) G. Duffing, Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeütung, Braunschweig 1918.

1) составить дифференциальное уравнение вынужденных колебаний нелинейной системы

$$\ddot{x}+k^2x=\mu f(x)+h\sin pt,$$

где μ и h — малые параметры, а $f(x)$ — непрерывная нелинейная функция x. Здесь рассмотрен случай, когда $f(x)$ является нечетной функцией, т. е. $f(-x)=-f(x)$, а проекция возмущающей силы равна $h\sin pt$;

2) определить первое приближение x_1, считая $\mu=0$, т. е. интегрируя линейное уравнение $\ddot{x}+k^2x=h\sin pt$. В качестве x_1 принять частное решение

$$x_1=a_1\sin pt,$$

где коэффициент a_1 подлежит последующему определению;

3) добавить слагаемое p^2x в левую и правую части уравнения п. 1) и записать его в виде

$$\ddot{x}+p^2x=(p^2-k^2)x+\mu f(x)+h\sin pt;$$

4) для определения второго приближения x_2 внести значение $x_1=a_1\sin pt$ п. 2) в правую часть уравнения п. 3), т. е.

$$\ddot{x}+p^2x=(p^2-k^2)x_1+\mu f(x_1)+h\sin pt;$$

5) использовав простейшие формулы, выразить нечетную функцию $f(x_1)=f(a_1\sin pt)$ в виде тригонометрического ряда $\sum\lambda_i\sin ipt$, т. е. $f(x_1)=\sum\lambda_i\sin ipt$, где $i=1, 3, 5, \ldots$;

6) внести этот результат в дифференциальное уравнение п. 4), представив его в виде

$$\ddot{x}+p^2x=[(p^2-k^2)a_1+\mu\lambda_1+h]\sin pt+\mu\sum\lambda_i\sin ipt,$$

где $i=3, 5, \ldots$;

7) в связи с отысканием периодического решения этого уравнения принять коэффициент при $\sin pt$ равным нулю и, решив уравнение $(p^2-k^2)a_1+\mu\lambda_1+h=0$, определить значение a_1 (заметим, что при $(p^2-k^2)a_1+\mu\lambda_1+h\neq 0$ одно из частных решений дифференциального уравнения предыдущего пункта неограниченно возрастает по закону $-\dfrac{(p^2-k^2)a_1+\mu\lambda_1+h}{2p}t\cos pt$ и искомое решение оказывается непериодическим);

8) при выполнении условия $(p^2-k^2)a_1+\mu\lambda_1+h=0$ дифференциальное уравнение п. 6) принимает вид

$$\ddot{x}+p^2x=\mu\sum\lambda_i\sin ipt,$$

где $i=3, 5, 7, \ldots$ Проинтегрировав это уравнение, найти второе приближение

$$x_2=b_1\sin pt+b_3\sin 3pt+b_5\sin 5pt+\ldots$$

Здесь первое слагаемое $b_1\sin pt$ является общим решением соответствующего однородного уравнения $\ddot{x}+p^2x=0$, а все остальные слагаемые — частными решениями данного неоднородного уравнения;

9) следуя Дуффингу, приравнять коэффициенты b_1 и a_1, стоящие коэффициентами в первом (п. 2) и втором приближениях п. 8) при $\sin pt$, т. е. считать

$$x_2 = a_1^* \sin pt + b_3 \sin 3pt + b_5 \sin 5pt + \ldots,$$

где a_1^* определено в п. 7);

10) определить x_3 — третье и последующие приближения, согласно последовательности вычислений, изложенных в пп. 4) — 9).

Метод последовательных приближений Дуффинга является одним из весьма распространенных приближенных способов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений вынужденных колебаний.

Если требуется определить одно лишь первое приближение $x_1 = a_1 \sin pt$, то все же надо составить дифференциальное уравнение второго приближения, приравнять в нем нулю коэффицент при $\sin pt$ (см. п. 7)) и вычислить амплитуду a_1. После этого вычисление второго приближения не составляет большого труда (см. пп. 8) и 9)).

Заметим, что при переходе от второго к третьему приближению (и особенно ко всем последующим) объем вычислений резко возрастает при незначительном повышении точности результата. Поэтому обычно ограничиваются определением второго приближения.

Задача 20.8. Найти периодический закон вынужденных колебаний материальной точки массы m, движущейся вдоль оси x под действием нелинейной силы упругости F, имеющей «жесткую» характеристику, и возмущающей силы S. Проекции этих сил на ось x равны $F_x = -c_1 x - c_3 x^3$, $S_x = H \sin pt$, где c_1, c_3 и H — постоянные положительные коэффициенты, причем c_3 и H являются малыми параметрами.

Задачу решить методом последонательных приближений Дуффинга, изложенным в обзоре теории. Найти первое и второе приближения.

Решение. Дифференциальное уравнение движения материальной точки $m\ddot{x} = F_x + S_x$ после подстановки значений F_x и S_x принимает вид

$$m\ddot{x} = -c_1 x - c_3 x^3 + H \sin pt,$$

т. е.

$$\ddot{x} = -k^2 x - \gamma x^3 + h \sin pt, \tag{1}$$

где обозначено $k^2 = c_1/m$, $\gamma = c_3/m$, $h = H/m$.

Заметим, что подобно c_3 и H, коэффициенты γ и h являются малыми параметрами, причем $\gamma > 0$ и $h > 0$.

При определении первого приближения x_1 будем в уравнении (1) считать $\gamma = 0$. Нетрудно видеть, что линейному дифференциальному уравнению $\ddot{x} = -k^2 x + h \sin pt$ удовлетворяет решение

$$x_1 = a_1 \sin pt, \tag{2}$$

где a_1 — постоянная, подлежащая последующему определению.

Выражение (2) примем в качестве первого приближения нелинейного дифференциального уравнения (1).

Переходим к определению второго приближения. Для этого добавим в левую и правую части уравнения (1) слагаемое p^2x:

$$\ddot{x}+p^2x=(p^2-k^2)\,x-\gamma x^3+h\sin pt. \tag{3}$$

Вычисление второго приближения сводится к интегрированию дифференциального уравнения (3), в правую часть которого вместо x подставлено первое приближение (2), т. е.

$$\ddot{x}+p^2x=a_1(p^2-k^2)\sin pt-\gamma a_1^3\sin^3 pt+h\sin pt.$$

Приняв во внимание, что $\sin^3 pt=\frac{1}{4}(3\sin pt-\sin 3pt)$, представим это уравнение в виде

$$\ddot{x}+p^2x=A\sin pt+\frac{1}{4}\gamma a_1^3\sin 3pt, \tag{4}$$

где обозначено

$$A=a_1(p^2-k^2)-\frac{3}{4}\gamma a_1^3+h. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что дифференциальному уравнению (4) соответствует случай резонанса, ибо в правой части содержится слагаемое $A\sin pt$. Действительно, одним из его частных решений является $x=-\frac{A}{2p}t\cos pt$, которое с течением времени неограниченно возрастает. По условию же разыскивается периодический закон движения точки. Поэтому в правой части уравнения (4) должно отсутствовать слагаемое $A\sin pt$, т. е. коэффицент A должен быть равен нулю. Использовав выражение (5), найдем

$$a_1(p^2-k^2)-\frac{3}{4}\gamma a_1^3+h=0. \tag{6}$$

Уравнение (6) дает возможность определить величину амплитуды a_1 первого приближения в зависимости от круговой частоты p возмущающей силы. Графический метод решения этого уравнения будет приведен ниже.

При выполнении условия (6) дифференциальное уравнение (4) принимает вид

$$\ddot{x}+p^2x=\frac{1}{4}\gamma a_1^3\sin 3pt. \tag{7}$$

Общее решение x_2 уравнения (7), которое является искомым вторым приближением, определяется по формуле

$$x_2=x_2^{(1)}+x_2^{(2)}, \tag{8}$$

где $x_2^{(1)}$ — решение соответствующего однородного уравнения, а $x_2^{(2)}$ — частное решение уравнения (7).

Нетрудно видеть, что

$$x_2^{(1)}=b_1\sin pt \tag{9}$$

является одним из решений однородного уравнения $\ddot{x}+p^2x=0$. Параметр b_1 будет определен ниже.

В соответствии с правой частью уравнения (7) ищем частное решение $x_2^{(2)}$ в виде

$$x_2^{(2)}=D\sin 3pt. \tag{10}$$

Подставив функцию (10) и ее вторую производную по времени $\ddot{x}_2^{(2)}=-9Dp^2\sin 3pt$ в уравнение (7), найдем $D=-\gamma a_1^3/32p^2$, затем внесем это значение D в частное решение (10):

$$x_2^{(2)}=-\frac{\gamma a_1^3}{32p^2}\sin 3pt. \tag{11}$$

Использовав результаты (9) и (11) в (8), получим второе приближение

$$x_2=b_1\sin pt-\frac{\gamma a_1^3}{32p^2}\sin 3pt. \tag{12}$$

Следуя Дуффингу, приравняем коэффициенты a_1 и b_1, стоящие при $\sin pt$ в первом (2) и втором (12) приближениях. Тогда окончательно получим второе приближение искомого периодического движения

$$x_2=a_1\sin pt-\frac{\gamma a_1^3}{32p^2}\sin 3pt. \tag{13}$$

Сопоставив первое (2) и второе (13) приближения, видим, что их разность x_2-x_1 является величиной порядка малости параметра γ

$$x_2-x_1=-\frac{\gamma a_1^3}{32p^2}\sin 3pt.$$

В заключение займемся графическим решением уравнения (6) для определения зависимости амплитуды a_1 первого приближения от круговой частоты p возмущающей силы. Заметим, что уравнение (6), которое запишем в виде

$$\frac{h}{k^2}+\left(\frac{p^2}{k^2}-1\right)a_1=\frac{3}{4}\frac{\gamma}{k^2}a_1^3, \tag{14}$$

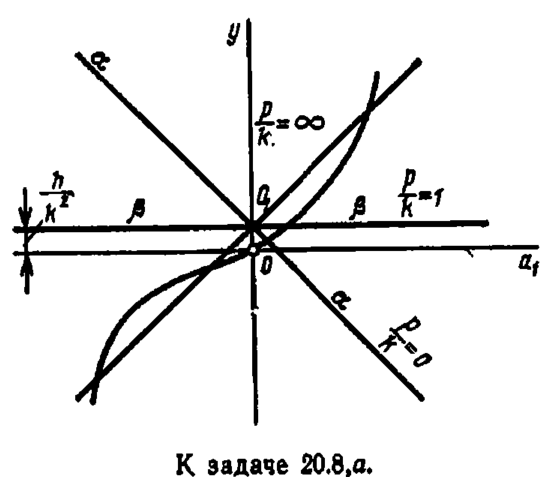
является кубичным относительно a_1. Поэтому некоторой области значений p соответствуют три значения a_1.

Обозначив левую и правую части уравнения (14) через y, запишем

$$y=\frac{h}{k^2}+\left(\frac{p^2}{k^2}-1\right)a_1,\quad y=\frac{3}{4}\frac{\gamma}{k^2}a_1^3. \tag{15}$$

На рис. *а* изображены декартовы оси координат, причем на оси абсцисс отложены значения a_1, а на оси ординат — значения y. Функции $y=\frac{3}{4}\frac{\gamma}{k^2}a_1^3$ соответствует кубическая парабола, не зависящая от

величины p/k. Функции $y=\frac{h}{k^2}+\left(\frac{p^2}{k^2}-1\right)a_1$ соответствует пучок прямых, проходящих через точку $O_1\left(0, \frac{h}{k^2}\right)$. Угловые коэффициенты этих прямых, равные $\frac{p^2}{k^2}-1$ зависят от отношения круговых частот p/k возмущающей силы и свободных колебаний. Так, значению $p/k=0$ соответствует прямая $\alpha-\alpha$ с угловым коэффициентом, равным минус единица, значению $p/k=1$ — прямая $\beta-\beta$ с угловым коэффициентом, равным нулю; значению $p/k=\infty$ — прямая, совмещенная с осью y, с угловым коэффициентом, равным бесконечности. Значит, при непрерывном изменении p/k от нуля до бесконечности прямая $\alpha-\alpha$ поворачивается в направлении против хода часовой стрелки вплоть до совмещения с осью y. При $p/k=0$ прямая $\alpha-\alpha$ пересекает параболу в одной точке (см. рис. *а*). Затем при некотором значении p/k прямая касается одной ветви параболы и пересекает ее другую ветвь. При дальнейшем увеличении p/k, сопровождаемом поворотом прямой, прямая пересекает параболу в трех точках. Абсциссы точек пересечения прямой и параболы фиксируют искомые величины a_1, которые впредь будем называть амплитудами нелинейных вынужденных колебаний. (Это название условно, но достаточно оправдано тем, что в формуле (13) $a_1 \gg \gamma a_1^3/32p^2$.)



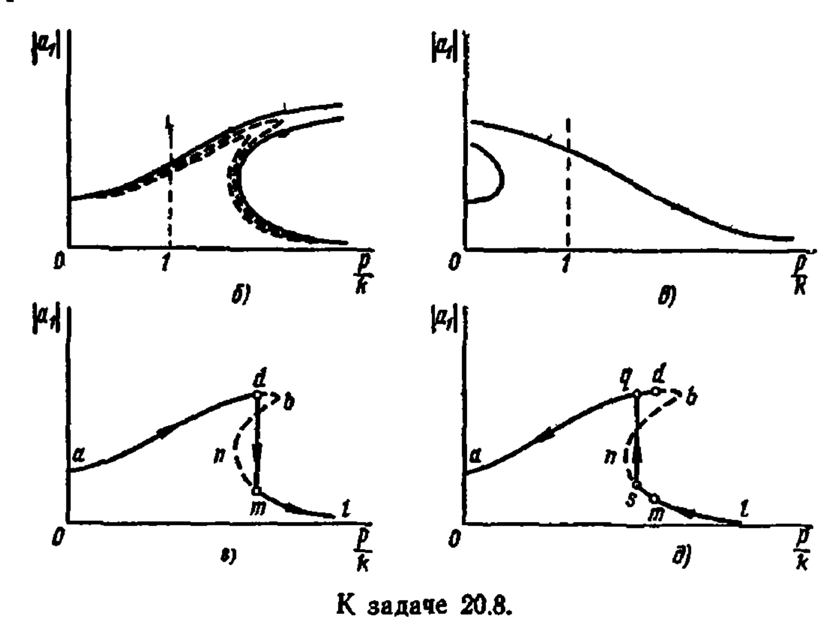
К задаче 20.8,*а*.

На рис. *б* построены кривые $|a_1|=f(p/k)$. Как видно, некоторой области значений p/k соответствует не одно, а три значения амплитуды a_1. По сравнению с соответствующим графиком для линейной силы упругости (см. рис. 8.14 на стр. 111 второго тома) амплитудная кривая в случае «жесткой» характеристики (см. кривую $1-1$ на рис. 20.1 на стр. 373), оставаясь разрывной, наклоняется в сторону увеличения p/k (отметка 1 на оси абсцисс на рис. *б* соответствует резонансу при линейной силе упругости).

Если решить соответствующую задачу с учетом силы сопротивления, пропорциональной скорости, то кривая станет непрерывной (см. штриховые кривые на рис. *б*). При этом по мере увеличения силы сопротивления область трех значений амплитуд уменьшается. Подобное движение рассмотрено ниже в задаче 20.9.

Если решить данную задачу для случая «мягкой» характеристики силы упругости (см. кривую $2-2$ на рис. 20.1 на стр. 373), т. е.

при $F_x = -c_1x + c_3x^3$, где $c_1 > 0$ и $c_3 > 0$, то амплитудная кривая (см. рис. *в*) наклоняется в сторону уменьшения p/k. При наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, кривая становится непрерывной.



К задаче 20.8.

Рассмотрим случай, когда при нелинейных вынужденных колебаниях турбины, при «жесткой» характеристике силы упругости, источником возмущающей силы оказывается неуравновешенность турбинного диска. В простейшем случае круговая частота p возмущающей силы равна угловой скорости ω вращения турбинного диска. При включении турбины и постепенном увеличении угловой скорости величины амплитуд растут по ветви ab (см. рис. *г*) до некоторой точки d, затем скачкообразно уменьшаются в положение m, переходя с ветви ab на ветвь nl и далее убывают по ветви nl. Это резкое изменение величины амплитуды называется *«явлением скачка»*. Оно характерно для нелинейных вынужденных колебаний и связано с попаданием колеблющейся системы в зону неустойчивости.

При выключении турбины (см. рис. *д*) величины амплитуд возрастают по ветви ln до некоторой точки s, затем происходит «скачок» — резкое увеличение величины амплитуды в точку q и далее непрерывное убывание по ветви ba.

3°. Метод медленно меняющихся амплитуд (метод Ван-дер-Поля). В п. 3° § 2 этой главы при интегрировании дифференциальных уравнений свободных нелинейных колебаний был применен метод Ван-дер-Поля. Этим методом можно с успехом пользоваться при изучении вынужденных колебаний нелинейных систем. Читателю следует ознакомиться с обзором теории п. 3° § 2.

При определении закона вынужденных нелинейных колебаний, происходящих с круговой частотой изменения возмущающей силы, рекомендуется следующая последовательность решения задач:

1) составить дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}+k^2x=\mu f(x,\ \dot{x})+h\sin pt,$$

где слагаемое $h\sin pt$ соответствует возмущающей силе, μ — малый параметр, а $f(x,\ \dot{x})$ — нелинейная функция x и $\dot{x}$;

2) представить посредством добавления к левой и правой частям члена p^2x уравнение п. 1) в виде

$$\ddot{x}+p^2x=F(x,\ \dot{x},\ t),$$

где $F(x,\ \dot{x},\ t)=(p^2-k^2)x+\mu f(x,\ \dot{x})+h\sin pt$;

3) искать закон вынужденных колебаний в виде

$$x=a\sin\psi=a\sin(pt+\alpha),$$

где постоянная амплитуда a и постоянная начальная фаза α подлежат последующему определению;

4) подставить в правую часть уравнения п. 2) функции $x=a\sin\psi$, $\dot{x}=ap\cos\psi$, $t=\dfrac{\psi-\alpha}{p}$, т. е.

$$F(x,\ \dot{x},\ t)=F\left(a\sin\psi,\ ap\cos\psi,\ \frac{\psi-\alpha}{p}\right);$$

5) составить систему уравнений

$$\int\limits_0^{2\pi}F\left(a\sin\psi,\ ap\cos\psi,\ \frac{\psi-\alpha}{p}\right)\cos\psi\,d\psi=0, \qquad (1^*)$$

$$\int\limits_0^{2\pi}F\left(a\sin\psi,\ ap\cos\psi,\ \frac{\psi-\alpha}{p}\right)\sin\psi\,d\psi=0; \qquad (2^*)$$

6) вычислив определенные интегралы, алгебраически решить систему уравнений (1^*) и (2^*) относительно a и α;

7) подставить полученные значения a и α в искомый закон движения, записанный в п. 3).

Применение метода Ван-дер-Поля является эффективным приемом определения первого приближения решения дифференциального уравнения вынужденных колебаний нелинейной системы.

Задача 20.9. Вал, защемленный одним концом и несущий на другом, свободном, конце уравновешенный диск с моментом инерции I_z, где z — ось симметрии вала, совершает крутильные колебания.

К диску приложены: момент сил упругости $m_{1z}=-c_1\varphi-c_3\varphi^3$, момент сил сопротивления $m_{2z}=-\beta\dot{\varphi}$, возмущающий момент $m_{3z}=$ $=M_0\sin pt$, где c_1, c_3, β, M_0, p — положительные постоянные, причем c_3 — малый параметр, а φ — угол поворота вала. Массой вала пренебречь.

Применив метод медленно меняющихся амплитуд Ван-дер-Поля, найти закон вынужденных колебаний диска, происходящих с круговой частотой изменения возмущающей силы.

Решение. Использовав дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z, запишем

$$I_z\ddot{\varphi} = m_{1z} + m_{2z} + m_{3z}.$$

Подставив заданные значения m_{1z}, m_{2z} и m_{3z}, представим это уравнение в виде

$$\ddot{\varphi} = -k^2\varphi - \gamma\varphi^3 - 2n\dot{\varphi} + h\sin pt,$$

где обозначено $k^2 = c_1/I_z$, $\gamma = c_3/I_z$, $2n = \beta/I_z$, $h = M_0/I_z$, причем, подобно c_3, γ является малым параметром.

Добавив к левой и правой частям этого уравнения $p^2\varphi$, получим

$$\ddot{\varphi} + p^2\varphi = F(\varphi,\ \dot{\varphi},\ t), \tag{1}$$

где

$$F(\varphi,\ \dot{\varphi},\ t) = (p^2 - k^2)\,\varphi - \gamma\varphi^3 - 2n\dot{\varphi} + h\sin pt. \tag{2}$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\varphi = a\sin(pt + \alpha), \tag{3}$$

где a и α — постоянные амплитуда и начальная фаза, подлежащие последующему определению, а p — круговая частота изменения возмущающего момента.

Для определения a и α подставим в (2) функции $\varphi = a\sin\psi$, $\dot{\varphi} = ap\cos\psi$, $t = \frac{\psi - \alpha}{p}$; найдем

$$F(\varphi,\ \dot{\varphi},\ t) = F\left(a\sin\psi,\ ap\cos\psi,\ \frac{\psi-\alpha}{p}\right) = [(p^2 - k^2)\,a + h\cos\alpha]\sin\psi - \\ - (2anp + h\sin\alpha)\cos\psi - \gamma a^3\sin^3\psi. \tag{4}$$

В данном случае, в соответствии с (4), система уравнений (1*), (2*) имеет вид

$$[(p^2 - k^2)\,a + h\cos\alpha]\int_0^{2\pi}\sin\psi\cos\psi\,d\psi - (2anp + h\sin\alpha)\int_0^{2\pi}\cos^2\psi\,d\psi - \\ - \gamma a^3\int_0^{2\pi}\sin^3\psi\cos\psi\,d\psi = 0, \tag{5}$$

$$[(p^2 - k^2)\,a + h\cos\alpha]\int_0^{2\pi}\sin^2\psi\,d\psi - (2anp + h\sin\alpha)\int_0^{2\pi}\cos\psi\sin\psi\,d\psi - \\ - \gamma a^3\int_0^{2\pi}\sin^4\psi\,d\psi = 0. \tag{6}$$

При вычислении определенных интегралов применим формулы $\cos^2\psi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\psi)$, $\sin^2\psi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\psi)$, $\sin^4\psi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\psi + \frac{1}{8}\cos 4\psi$, а в первом и третьем интегралах уравнения (5) и во втором интеграле уравнения (6) воспользуемся подстановкой $\sin\psi = z$.

После вычисления интегралов в уравнениях (5) и (6) получим

$$2anp + h\sin\alpha = 0, \tag{7}$$

$$(p^2 - k^2)a + h\cos\alpha - \frac{3}{4}\gamma a^3 = 0. \tag{8}$$

Заметим, что при отсутствии силы сопротивления, т. е. при $n=0$ из (7) найдем $\alpha = 0$. При этом уравнение (8) примет вид формулы (14) аналогичной задачи 20.8, решенной методом Дуффинга для случая отсутствия силы сопротивления.

Для решения системы (7), (8) представим эти уравнения в виде

$$h\sin\alpha = -2anp, \quad h\cos\alpha = (k^2 - p^2)a + \frac{3}{4}\gamma a^3. \tag{9}$$

После возведения уравнений (9) в квадрат и сложения их найдем

$$h^2 = [(k^2-p^2)^2 + 4n^2p^2]a^2 + \frac{3}{2}\gamma(k^2-p^2)a^4 + \frac{9}{16}\gamma^2 a^6, \tag{10}$$

т. е.

$$\left(\frac{h}{k^2}\right)^2 - \left\{\left[1-\left(\frac{p}{k}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{k}\right)^2\left(\frac{p}{k}\right)^2\right\}a^2 = \frac{3}{2}\frac{\gamma}{k^2}\left[1-\left(\frac{p}{k}\right)^2\right]a^4 + \frac{9}{16}\left(\frac{\gamma}{k^2}\right)^2 a^6. \tag{11}$$

Для определения искомой амплитуды a решаем уравнение (11) графически.

Введя обозначения $a^2 = x$ и приравняв y левую и правую части уравнения (11), получаем

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{h}{k^2}\right)^2 - \left\{\left[1-\left(\frac{p}{k}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{k}\right)^2\left(\frac{p}{k}\right)^2\right\}x, \\ y &= \frac{3}{2}\frac{\gamma}{k^2}\left[1-\left(\frac{p}{k}\right)^2\right]x^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{\gamma}{k^2}\right)^2 x^3. \end{aligned} \tag{12}$$

Затем в системе осей xy строим по точкам кривую, соответствующую второму уравнению (12), а также проводим прямую, описанную первым уравнением (12). Абсциссы точек их пересечения фиксируют искомые значения $x = a^2$. При построении кривой и прямой надо сохранять постоянными параметры h, k, n, γ и изменять величину отношения p/k. При этом окажется, что определенной области значений p/k соответствует одна точка пересечения прямой и кривой, некоторому одному значению p/k отвечают две точки пересечения, наконец, остальной области значений p/k соответствуют три точки

пересечения. Для уяснения вышесказанного рекомендуем ознакомиться с графическим решением уравнения (14), подробно описанном в решении задачи 20.8 (см. стр. 407—408) и с графиком $|a_1| = f(p/k)$, построенным на рис. *б* задачи 20.8 для случая аналогичного движения, но при отсутствии силы сопротивления.

Выполнив в данной задаче графическое решение уравнения (11), получим зависимость $|a| = f(p/k)$ для фиксированного значения n. Если же провести ряд графических решений уравнения (11) при разных значениях n, то можно получить семейство кривых $|a| = f(p/k)$, каждая из которых соответствует определенной величине параметра n, характеризующего момент силы сопротивления. Эти кривые изображены штриховыми линиями на рис. *б* задачи 20.8. В данном случае также имеет место явление «скачка», описанного в задаче 20.8.

Зная величину a амплитуды, найдем из первого уравнения (9) соответствующее значение начальной фазы α, являющейся сдвигом между фазами возмущающего момента и вынужденных колебаний. Получим

$$\alpha = -\arcsin\frac{2anp}{h}. \tag{13}$$

Знак минус в формуле (13) указывает на отставание по фазе вынужденных колебаний от возмущающего момента.

Использовав формулу (13) в уравнении (3), запишем искомый закон вынужденных колебаний:

$$\varphi = a\sin\left(pt - \arcsin\frac{2anp}{h}\right),$$

где амплитуда a является корнем уравнения (11), решенного графически.

В заключение заметим, что при отсутствии нелинейности, т. е. при $\gamma = 0$ из уравнения (10) получим известный результат

$$a = \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}.$$

4°. Вариационный метод (метод Бубнова—Галеркина). Рассмотрим нелинейные вынужденные колебания материальной системы с одной степенью свободы, описываемые дифференциальным уравнением в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} - Q = 0,$$

где T — кинетическая энергия материальной системы, q — обобщенная координата, Q — обобщенная сила, имеющая период $2\pi/p$.

Применение интегрального принципа Гамильтона — Остроградского

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A)\, dt = 0$$

является одним из наиболее распространенных приближенных методов отыскания периодического решения данного дифференциального уравнения. Интегральным принципом следует пользоваться в виде

$$\int_{t_1}^{t_1+2\pi/p}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}-\frac{\partial T}{\partial q}-Q\right)\delta q\,dt=0. \qquad (3^*)$$

В качестве движения, сравниваемого с искомым периодическим движением, обычно выбираются периодические движения того же периода $2\pi/p$.

Так, если при отсутствии силы сопротивления возмущающая сила изменяется по закону $H\sin pt$, то искомое приближенное решение ищется в виде

$$q=a_1\sin pt+a_3\sin 3pt+a_5\sin 5pt+\ldots, \qquad (4^*)$$

где параметры a_1, a_3, a_5, ... подлежат последующему определению.

Подставив это значение q, а также его вариацию

$$\delta q=\delta a_1\sin pt+\delta a_3\sin 3pt+\delta a_5\sin 5pt+\ldots$$

в уравнение (3*), получим

$$\delta a_1\int_{t_1}^{t_1+2\pi/p}\Phi\sin pt\,dt+\delta a_3\int_{t_1}^{t_1+2\pi/p}\Phi\sin 3pt\,dt+$$
$$+\delta a_5\int_{t_1}^{t_1+2\pi/p}\Phi\sin 5pt+\ldots=0,$$

где буквой Φ обозначен результат подстановки q (4*) в выражение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}-\frac{\partial T}{\partial q}-Q.$$

Учитывая независимость вариаций δa_1, δa_3, δa_5, ... получим систему уравнений

$$\int_{t_1}^{t_1+2\pi/p}\Phi\sin pt\,dt=0,\quad \int_{t_1}^{t_1+2\pi/p}\Phi\sin 3pt\,dt=0,$$
$$\int_{t_1}^{t_1+2\pi/p}\Phi\sin 5pt\,dt=0,\ \ldots$$

Решив эту систему уравнений, определим a_1, a_3, a_5, ... и, следовательно, приближенный закон движения

$$q=a_1\sin pt+a_3\sin 3pt+a_5\sin 5pt+\ldots$$

В первом приближении можно искать решение в виде $q=a_1\sin pt$, последовательно добавляя во втором, третьем и последующих приближениях члены ряда (4*). По мере уточнения решения, т. е. при переходе от первого приближения ко второму, от второго к третьему

и т. д., объем вычислений резко возрастает. Вместе с тем уже первое приближение обычно приводит к достаточно точным результатам. Поэтому часто при решении нелинейных задач вариационным методом ограничиваются первым приближением.

Заметим, что использование метода Бубнова—Галеркина не связано с малой нелинейностью системы (например, с малостью параметра μ). Это обстоятельство значительно расширяет рамки его применения.

Решать задачи на вынужденные колебания нелинейных систем вариационным методом Бубнова—Галеркина рекомендуется в следующей последовательности:

1) составить дифференциальное уравнение вынужденных колебаний, перенеся в его левую часть все члены, отличные от нуля, т. е.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}-Q=0$$

(в частных случаях получаем $m\ddot{x}-\sum F_{kx}^{e}=0, I_z\ddot{\varphi}-\sum m_z\left(F_k^e\right)=0$ и т. д.);

2) выбрать уравнение искомого периодического решения $q=q(t)$, которое должно иметь круговую частоту p, равную круговой частоте возмущающей силы (возмущающего момента). Это уравнение содержит неизвестные параметры;

3) вычислить вариацию δq искомого решения $q=q(t)$. Эта вариация оказывается выраженной в зависимости от вариаций неизвестных параметров;

4) подставив искомое решение q и его вариацию δq в уравнение

$$\int_{t_1}^{t_1+2\pi/p}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}-Q\right)\delta q\,dt=0,$$

представить его левую часть в виде суммы произведений независимых вариаций параметров на некоторые коэффициенты;

5) приравняв нулю все коэффициенты, упомянутые в предыдущем пункте, составить систему уравнений в числе, равном числу вариаций параметров;

6) вычислив интегралы, стоящие в составленной системе уравнений, алгебраически решить эту систему и определить неизвестные параметры;

7) подставив полученные значения параметров в $q=q(t)$ (см. п. 2)), найти искомое приближенное решение данного дифференциального уравнения.

Задача 20.10. Ознакомившись с решением задачи 20.7 методом поэтапного интегрирования, решить ее вариационным методом Бубнова—Галеркина.

Найти в первом приближении уравнение крутильных колебаний вала *).

Решение. Крутильные колебания происходят под действием возмущающего момента $M_0 \sin \omega t$. При решении задачи методом поэтапного интегрирования, который впредь будем называть точным методом, было предположено, что продолжительность τ отклонения из нулевого положения в крайнее не равна продолжительности $\frac{\pi}{\omega}-\tau$ возврата из крайнего положения в нулевое.

Решая задачу в первом приближении вариационным методом, предположим, что время отклонения равно времени возврата и, следовательно, равно четверти периода колебаний, т. е. $\tau = T/4 = \pi/2\omega$. Будем также в первом приближении считать, что колебания происходят по гармоническому закону с круговой частотой ω, равной круговой частоте возмущающего момента и с отставанием по фазе на $\omega\beta$ искомого закона движения от возмущающего момента $M_0 \sin \omega t$, т.е.

$$\varphi = \varphi_1 \sin \omega (t - \beta), \tag{1}$$

где φ_1 — угловая амплитуда колебаний вала, а β — момент времени, соответствующий ненапряженному состоянию вала, т. е. $\varphi = 0$. Параметры φ_1 и β подлежат последующему определению.

Поворот вала против хода часовой стрелки из нулевого положения в крайнее соответствует ветви c_1 «треугольной» характеристики (см. рис. к задаче 20.7). Он происходит в промежуток времени $\beta \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2\omega} + \beta$ и описывается дифференциальным уравнением

$$I_z\ddot{\varphi} = -c_1\varphi + M_0 \sin \omega t,$$

т. е.

$$\ddot{\varphi} + k_1^2\varphi - m_0 \sin \omega t = 0, \tag{2}$$

где обозначено: $k_1^2 = c_1/I_z$, $m_0 = M_0/I_z$.

Возврат из крайнего положения в нулевое происходит согласно ветви c_2 «треугольной» характеристики. Ему соответствует дифференциальное уравнение

$$I_z\ddot{\varphi} = -c_2\varphi + M_0 \sin \omega t,$$

т. е.

$$\ddot{\varphi} + k_2^2\varphi - m_0 \sin \omega t = 0, \tag{3}$$

где обозначено $k_2^2 = c_2/m$, $m_0 = M_0/I_z$.

Это движение происходит за промежуток времени $\frac{\pi}{2\omega} + \beta \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{\omega} + \beta$.

---

*) См. вторую сноску на стр. 397.

Затем поворот по ходу часовой стрелки из нулевого положения в крайнее происходит по ветви c_1 в течение $\frac{\pi}{\omega}+\beta \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2\omega}+\beta$. Ему соответствует дифференциальное уравнение (2).

Наконец, возврат из крайнего положения в нулевое происходит по ветви c_2 в течение $\frac{3\pi}{2\omega}+\beta \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{\omega}+\beta$ и описывается дифференциальным уравнением (3).

Применив вариационный метод, вычислим вариацию функции (1):

$$\delta\varphi = \delta\varphi_1 \sin\omega(t-\beta) - \delta\beta\cdot\varphi_1\omega\cos\omega(t-\beta). \tag{4}$$

Выражение $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}-\frac{\partial T}{\partial q}-Q$, стоящее в скобке уравнения (3*), равное в данной задаче, на соответствующих промежутках времени, левым частям уравнений (2) и (3), обозначим через $A_{1,2}$. Внесем в $A_{1,2}$ значение φ из формулы (1):

$$A_{1,2} = \ddot\varphi + k_{1,2}^2\varphi - m_0\sin\omega t = \varphi_1(k_{1,2}^2-\omega^2)\sin\omega(t-\beta) - m_0\sin\omega t. \tag{5}$$

Кроме того, δq, t_1 и p, которые значатся в уравнении (3*), приведенном в обзоре теории, в данной задаче равны $\delta q=\delta\varphi$ (см. формулу (4)), $t_1=\beta$, $p=\omega$.

Поэтому уравнение (3*) принимает вид

$$\int\limits_{\beta}^{\frac{\pi}{2\omega}+\beta} A_1\delta\varphi\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{2\omega}+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\beta} A_2\delta\varphi\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{\omega}+\beta}^{\frac{3\pi}{2\omega}+\beta} A_1\delta\varphi\,dt + \int\limits_{\frac{3\pi}{2\omega}+\beta}^{\frac{2\pi}{\omega}+\beta} A_2\delta\varphi\,dt = 0.$$

В связи с симметричностью движения относительно полупериода π/ω нечетные и четные слагаемые в этом уравнении соответственно равны. Следовательно,

$$\int\limits_{\beta}^{\frac{\pi}{2\omega}+\beta} A_1\delta\varphi\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{2\omega}+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\beta} A_2\delta\varphi\,dt = 0, \tag{6}$$

где A_1 и A_2 даны формулой (5).

Внеся в уравнение (6) выражение вариации (4) и собрав члены, содержащие $\delta\varphi$ и $\delta\beta$, запишем

$$\delta\varphi_1\left[\int\limits_{\beta}^{\frac{\pi}{2\omega}+\beta} A_1\sin\omega(t-\beta)\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{2\omega}+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\beta} A_2\sin\omega(t-\beta)\,dt\right] -$$

$$-\delta\beta\cdot\varphi_1\omega\left[\int\limits_{\beta}^{\frac{\pi}{2\omega}+\beta} A_1\cos\omega(t-\beta)\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{2\omega}+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\beta} A_2\cos\omega(t-\beta)\,dt\right] = 0. \tag{7}$$

Вариации $\delta\varphi_1$ и $\delta\beta$ независимы. Поэтому оба коэффициента, стоящие в (7) при этих вариациях, должны быть равны нулю, т. е.

$$\int\limits_{\beta}^{\frac{\pi}{2\omega}+\beta} A_1 \sin\omega(t-\beta)\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{2\omega}+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\beta} A_2 \sin\omega(t-\beta)\,dt = 0, \tag{8}$$

$$\int\limits_{\beta}^{\frac{\pi}{2\omega}+\beta} A_1 \cos\omega(t-\beta)\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{2\omega}+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\beta} A_2 \cos\omega(t-\beta)\,dt = 0. \tag{9}$$

Использовав формулу (5) в уравнениях (8) и (9) и вычислив интегралы в уравнениях (8) и (9), получим

$$\varphi_1(k^2-\omega^2) = m_0\cos\omega\beta, \tag{10}$$

$$\varphi_1(k_1^2-k_2^2) = \pi m_0 \sin\omega\beta, \tag{11}$$

где обозначено $k^2 = \frac{1}{2}(k_1^2+k_2^2)$.

Решив систему уравнений (10) и (11) относительно φ_1 и $\operatorname{tg}\omega\beta$, найдем

$$\varphi_1 = \frac{\pi m_0}{\sqrt{(k_1^2-k_2^2)^2+\pi^2(k^2-\omega^2)^2}}, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}\omega\beta = \frac{1}{\pi}\frac{k_1^2-k_2^2}{k^2-\omega^2}. \tag{13}$$

Внеся эти значения в (1), получим искомое уравнение крутильных колебаний

$$\varphi = \frac{\pi m_0}{\sqrt{(k_1^2-k_2^2)^2+\pi^2(k^2-\omega^2)^2}}\sin\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{k_1^2-k_2^2}{k^2-\omega^2}\right), \tag{14}$$

где $k_1^2 = c_1/I_z$, $k_2^2 = c_2/I_z$, $k^2 = \frac{1}{2}(k_1^2+k_2^2)$, $m_0 = M_0/I_z$.

(Нетрудно видеть, что при отсутствии момента силы сопротивления, когда «треугольная» характеристика вырождается в линейную с коэффициентом жесткости c, т. е. при $k_1^2 = k_2^2$, уравнение (14) принимает вид, обычный для соответствующей линейной задачи: $\varphi = \frac{m_0}{k^2-\omega^2}\sin\omega t$.)

Можно, воспользовавшись формулами (12) и (13), построить кривые изменения амплитуды φ_1 и угловой разности фаз $\omega\beta$ в зависимости от ω, при разных величинах момента силы сопротивления, определяемых параметром $q = k_1^2/k_2^2 = c_1/c_2$. При этом обнаруживается аналогия с подобными кривыми, построенными для силы сопротивления, пропорциональной скорости, и линейной силы упругости. Правда, наибольшие амплитуды колебаний по мере увеличения момента силы сопротивления и, следовательно q, сдвигаются по отношению к так

называемому резонансу ($\omega/k=1$) в сторону увеличения ω/k. Так, при $q=2$ имеем $\omega/k=1,02$, а при $q=3$ имеем $\omega/k=1,05$. (Напомним, что при силе сопротивления, пропорциональной скорости, и линейной силе упругости наибольшие значения амплитуд вынужденных колебаний смещались в сторону уменьшения ω/k, т. е. имели место при $\omega/k<1$.

Задача 20.11. Ознакомившись с условием и решением предыдущей задачи, выполнить второе приближение вариационным методом Бубнова — Галеркина *).

Решение. При рассмотрении в предыдущей задаче первого приближения было сделано предположение о том, что продолжительность отклонения колеблющейся системы из нулевого положения в крайнее равно продолжительности возврата в это положение, т. е. четверти периода колебаний $T/4=\pi/2\omega$. В действительности же продолжительность отклонения меньше продолжительности возврата, так как $c_1>c_2$. Учтем эту особенность колебаний во втором приближении.

Искомая функция $\varphi=\varphi(t)$ должна удовлетворять следующим условиям:

1) $\varphi\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\varphi(t)$; 2) при $t=\beta$ имеем $\varphi=0$; 3) при $t=\frac{\pi}{\omega}+\beta$ имеем $\varphi=0$; 4) $\dot\varphi(\beta)=-\dot\varphi\left(\frac{\pi}{\omega}+\beta\right)$; 5) при $t=\tau+\beta$, причем $0<\tau<\frac{\pi}{2\omega}$, имеем $\dot\varphi=0$.

Нетрудно видеть, что всем этим условиям удовлетворяет функция

$$\varphi=\varphi_1\sin\omega(t-\beta)+\varphi_3[\cos\omega(t-\beta)-\cos 3\omega(t-\beta)], \tag{1}$$

где φ_1, φ_3 и β — три постоянных, пока неизвестных параметра. Сопоставив функцию (1) с первым приближением $\varphi=\varphi_1\sin\omega(t-\beta)$ (см. формулу (1) предыдущей задачи), видим, что функция (1) отличается от первого приближения слагаемым $\varphi_3[\cos\omega(t-\beta)-\cos 3\omega(t-\beta)]$.

Примем функцию (1) за второе приближение при решении дифференциальных уравнений (2) и (3) предыдущей задачи, которые можно записать в виде

$$\ddot\varphi+k_{1,2}^2\varphi-m_0\sin\omega t=0, \tag{2}$$

причем $k_1^2=c_1/I_z$ надо брать при

$$\beta\leqslant t\leqslant\tau+\beta \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\omega}+\beta\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{\omega}+\tau+\beta, \tag{3}$$

а $k_2^2=c_2/I_z$ при

$$\tau+\beta\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{\omega}+\beta \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\omega}+\tau+\beta\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{\omega}+\beta. \tag{4}$$

---

*) См. вторую сноску на стр. 397.

Применяя вариационный метод Бубнова — Галеркина (3*), в данной задаче запишем

$$\int\limits_{\beta}^{\frac{2\pi}{\omega}+\beta} (\ddot{\varphi} + k_{1,2}^2\varphi - m_0 \sin\omega t)\,\delta\varphi\,dt = 0. \tag{5}$$

Подставив из (1) значение φ в $\ddot{\varphi} + k_{1,2}^2\varphi - m_0\sin\omega t$ и обозначив результат подстановки через A_1 для k_1^2 и через A_2 для k_2^2, получим

$$A_{1,2} = \varphi_1 (k_{1,2}^2 - \omega^2)\sin\omega (t-\beta) + \varphi_3 (k_{1,2}^2 - \omega^2)\cos\omega (t-\beta) - \\ - \varphi_3 (k_{1,2}^2 - 9\omega^2)\cos 3\omega (t-\beta) - m_0 \sin\omega t. \tag{6}$$

Вычислив вариацию $\delta\varphi$ функции φ (см. (1)), найдем

$$\delta\varphi = \delta\varphi_1 \sin\omega (t-\beta) + \delta\varphi_3 [\cos\omega (t-\beta) - \cos 3\omega (t-\beta)] + \\ + \delta\beta\cdot\omega\,[\varphi_3 \sin\omega (t-\beta) - 3\varphi_3 \sin 3\omega (t-\beta) - \varphi_1 \cos\omega (t-\beta)],$$

или

$$\delta\varphi = \delta\varphi_1\cdot a + \delta\varphi_3\cdot b + \delta\beta\cdot\omega\cdot c, \tag{7}$$

где обозначено

$$\left.\begin{aligned} a &= \sin\omega (t-\beta), \quad b = \cos\omega (t-\beta) - \cos 3\omega (t-\beta), \\ c &= \varphi_3 \sin\omega (t-\beta) - 3\varphi_3 \sin 3\omega (t-\beta) - \varphi_1 \cos\omega (t-\beta). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Использовав формулы (6) и (7) в уравнении (5), разбив интеграл от β до $\frac{2\pi}{\omega}+\beta$ на ряд интегралов в соответствии с (3) и (4) и собрав члены, содержащие вариации $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_3$ и $\delta\beta$, найдем

$$\delta\varphi_1 \left[\int\limits_{\beta}^{\tau+\beta} A_1\cdot a\,dt + \int\limits_{\tau+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\beta} A_2\cdot a\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{\omega}+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\tau+\beta} A_1\cdot a\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{\omega}+\tau+\beta}^{\frac{2\pi}{\omega}+\beta} A_2\cdot a\,dt \right] + \\ + \delta\varphi_3 \left[\int\limits_{\beta}^{\tau+\beta} A_1\cdot b\,dt + \int\limits_{\tau+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\beta} A_2\cdot b\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{\omega}+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\tau+\beta} A_1\cdot b\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{\omega}+\tau+\beta}^{\frac{2\pi}{\omega}+\beta} A_2\cdot b\,dt \right] + \\ + \delta\beta\cdot\omega \left[\int\limits_{\beta}^{\tau+\beta} A_1\cdot c\,dt + \int\limits_{\tau+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\beta} A_2\cdot c\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{\omega}+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\tau+\beta} A_1\cdot c\,dt + \right. \\ \left. + \int\limits_{\frac{\pi}{\omega}+\tau+\beta}^{\frac{2\pi}{\omega}+\beta} A_2\cdot c\,dt \right] = 0. \tag{9}$$

Вариации $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_3$, $\delta\beta$ независимы. Поэтому все коэффициенты, стоящие при этих вариациях, равны нулю.

Так как движение симметрично относительно полупериода π/ω, то нечетные и четные слагаемые, стоящие в каждой из квадратных скобок уравнения (9), соответственно равны. Поэтому имеем

$$\int_{\beta}^{\tau+\beta} A_1 \cdot a\,dt + \int_{\tau+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\beta} A_2 \cdot a\,dt = 0, \tag{10}$$

$$\int_{\beta}^{\tau+\beta} A_1 \cdot b\,dt + \int_{\tau+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\beta} A_2 \cdot b\,dt = 0, \tag{11}$$

$$\int_{\beta}^{\tau+\beta} A_1 \cdot c\,dt + \int_{\tau+\beta}^{\frac{\pi}{\omega}+\beta} A_2 \cdot c\,dt = 0. \tag{12}$$

Подставив в уравнения (10), (11), (12) значения A_1 и A_2 из формулы (6), а также a, b и c из (8), после вычисления интегралов и ряда преобразований соответственно получим

$$\varphi_1\left[\omega\tau - \frac{1}{2}\sin 2\omega\tau + \frac{\pi(k_2^2-\omega^2)}{k_1^2-k_2^2}\right] + \\ + 2\varphi_3\sin^4\omega\tau - \frac{\pi m_0}{k_1^2-k_2^2}\cos\omega\beta = 0, \tag{13}$$

$$\varphi_1\sin^4\omega\tau + \varphi_3\left[\omega\tau - \frac{1}{4}\sin 2\omega\tau - \frac{1}{4}\sin 4\omega\tau + \right. \\ \left. + \frac{1}{12}\sin 6\omega\tau + \frac{\pi(k_2^2-5\omega^2)}{k_1^2-k_2^2}\right] - \frac{\pi m_0}{2(k_1^2-k_2^2)}\sin\omega\beta = 0, \tag{14}$$

$$\sin^2\omega\tau(\varphi_1 + 2\varphi_3\sin 2\omega\tau)^2 - \frac{\pi m_0}{k_1^2-k_2^2}(\varphi_1\sin\omega\beta - \varphi_3\cos\omega\beta) = 0. \tag{15}$$

В трех уравнениях (13), (14) и (15) содержится четыре неизвестных параметра φ_1, φ_3, β и τ. Поэтому, составляя четвертое уравнение, используем условие: при $t=\tau+\beta$ имеем $\dot\varphi=0$. Вычислив производную (1) по времени и подставив $t=\tau+\beta$, $\dot\varphi=0$, найдем

$$\varphi_1\cos\omega\tau - \varphi_3(\sin\omega\tau - 3\sin 3\omega\tau) = 0. \tag{16}$$

Решение системы уравнений (13), (14), (15) и (16) проводим в следующем порядке: из уравнений (13) и (14) определим $\cos\omega\beta$ и $\sin\omega\beta$, затем полученные значения $\cos\omega\beta$ и $\sin\omega\beta$ подставим в уравнение (15). Найдем

$$\sin^2\omega\tau(\varphi_1 + 2\varphi_3\sin 2\omega\tau)^2 - \\ - \left\{2\varphi_1^2\sin^4\omega\tau + 2\varphi_1\varphi_3\left[\omega\tau + \frac{\pi(k_2^2-5\omega^2)}{k_1^2-k_2^2} - \right.\right. \\ \left. - \frac{1}{3}\sin 3\omega\tau\cos\omega\tau(2-\cos 2\omega\tau)\right] - \\ \left. - \varphi_1\varphi_3\left[\omega\tau + \frac{\pi(k_2^2-\omega^2)}{k_1^2-k_2^2} - \frac{1}{2}\sin 2\omega\tau\right] - 2\varphi_3^2\sin^4\omega\tau\right\} = 0. \tag{17}$$

Выразим из уравнения (16)

$$\varphi_3 = \varphi_1 \frac{\cos \omega\tau}{\sin \omega\tau - 3 \sin 3\omega\tau}, \tag{18}$$

подставляем это значение φ_3 в уравнение (17). После сокращения на φ_1^2 найдем

$$\sin^2 \omega\tau \left[1 + \frac{2 \cos \omega\tau \cdot \sin 2\omega\tau}{\sin \omega\tau - 3 \sin 3\omega\tau}\right]^2 - 2 \sin^4 \omega\tau -$$
$$- \frac{\cos \omega\tau}{\sin \omega\tau - 3 \sin 3\omega\tau} \left[\omega\tau + \frac{\pi (k_2^2 - \omega^2)}{k_1^2 - k_2^2} + \frac{1}{4} \sin 2\omega\tau -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{8} \sin 4\omega\tau + \frac{1}{6} \sin 6\omega\tau\right] + \frac{2 \cos^2 \omega\tau \cdot \sin^4 \omega\tau}{(\sin \omega\tau - 3 \sin 3\omega\tau)^2} = 0. \tag{19}$$

Отделив в левую часть уравнения (19) все слагаемые, содержащие тригонометрические функции $\omega\tau$, а в правую — слагаемые, зависящие от ω и $\omega\tau$, получим трансцендентное уравнение относительно $\omega\tau$

$$\frac{2 \sin^4 \omega\tau}{\cos \omega\tau (\sin \omega\tau - 3 \sin 3\omega\tau)} [8 \cos^2 2\omega\tau + \cos^2 \omega\tau - (\sin \omega\tau - 3 \sin 3\omega\tau)^2] +$$
$$+ \frac{1}{2} \sin 4\omega\tau - \frac{1}{6} \sin 6\omega\tau = \omega\tau + \frac{\pi (k^2 - 9\omega^2)}{k_1^2 - k_2^2}. \tag{20}$$

Уравнение (20) решаем графически. Обозначив левую часть этого уравнения через y_1, а правую часть — через y_2, запишем:

$$y_1 = f_1(\omega\tau), \qquad y_2 = f_2(\omega\tau).$$

Возьмем декартовы оси координат и отложим на оси абсцисс $\omega\tau$, а на оси ординат y_1 и y_2. Построим кривую $y_1 = f_1(\omega\tau)$ и прямую $y_2 = f_2(\omega\tau)$. Абсцисса их точки пересечения фиксирует искомое значение $\omega\tau$, а значит, и τ при заданных значениях k_1, k_2 и ω.

Для определения φ_1 решаем уравнение (13) относительно $\frac{\pi m_0}{k_1^2 - k_2^2} \cos \omega\beta$, уравнение (14) — относительно $\frac{\pi m_0}{k_1^2 - k_2^2} \sin \omega\beta$, возводим каждое из них в квадрат и складываем:

$$\frac{\pi^2 m_0^2}{(k_1^2 - k_2^2)^2} = \varphi_1^2 \left\{\left[\omega\tau + \frac{\pi (k_2^2 - \omega^2)}{k_1^2 - k_2^2} - \frac{1}{2} \sin 2\omega\tau\right]^2 + 4 \sin^6 \omega\tau\right\} +$$
$$+ 4\varphi_1\varphi_3 \left\{\sin^4 \omega\tau \left[\omega\tau + \frac{\pi (k_2^2 - \omega^2)}{k_1^2 - k_2^2} - \frac{1}{2} \sin 2\omega\tau\right] +\right.$$
$$\left. + 2 \sin^4 \omega\tau \left[\omega\tau + \frac{\pi (k_2^2 - 5\omega^2)}{k_1^2 - k_2^2} - \frac{1}{3} \sin 3\omega\tau \cos \omega\tau (2 - \cos 2\omega\tau)\right]\right\} +$$
$$+ 4\varphi_3^2 \left\{\left[\omega\tau + \frac{\pi (k_2^2 - 5\omega^2)}{k_1^2 - k_2^2} - \frac{1}{3} \sin 3\omega\tau \cos \omega\tau (2 - \cos 2\omega\tau)\right]^2 + \sin^6 \omega\tau\right\}.$$

Подставив в это уравнение значение φ_3 из (18), после ряда преобразований получим

$$\varphi_1 = \frac{\pi\sigma p}{s(q-1)}, \tag{21}$$

где

$$p = \omega^2/k_2^2, \qquad q = k_1^2/k_2^2, \qquad \sigma = m_0/\omega^2,$$

$$s = \left[E + \frac{\pi}{q-1}\left(\frac{\pi}{q-1}L + F\right) - \frac{\pi p}{q-1}\left(\frac{2\pi}{q-1}M + K\right) + \frac{\pi^2 p^2}{(q-1)^2}N\right]^{1/2}$$

и в свою очередь

$$L = 1 + 4A^2, \qquad M = 1 + 20A^2, \qquad N = 1 + 100A^2,$$
$$E = (B + 2AC)^2 + 4(C + AD)^2, \qquad F = 2(B + 6AC + 4A^2D),$$
$$K = 2(B + 22AC + 20A^2D),$$

где

$$A = \frac{\cos\omega\tau}{\sin\omega\tau - 3\sin 3\omega\tau}, \qquad B = \omega\tau - \frac{1}{2}\sin 2\omega\tau,$$

$$C = \sin^4\omega\tau, \qquad D = \omega\tau - \frac{1}{4}\sin 2\omega\tau - \frac{1}{4}\sin 4\omega\tau + \frac{1}{12}\sin 6\omega\tau.$$

Определив таким образом φ_1, значение φ_3 вычисляем по формуле (18).

Теперь из уравнения (13) можно определить $\omega\beta$:

$$\omega\beta = \arccos\left[\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\pi\sigma}\left\{\varphi_1\left[\pi + (q-1)\left(\omega\tau - \frac{1}{2}\sin\omega\tau\right)\right] + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2\varphi_3(q-1)\sin^4\omega\tau\right\} - \frac{\varphi_1}{\sigma}\right]. \tag{22}$$

Таким образом, задача отыскания второго приближения в виде (1) решена.

Подсчеты следует начинать с определения $\omega\tau$ графическим методом, затем вычислить φ_1 по формуле (21), φ_3 — по (18) и, наконец, $\omega\beta$ — по (22).

Теперь нетрудно определить амплитуду колебаний φ_0, внеся в уравнение (1) выражения $t = \tau + \beta$, $\varphi = \varphi_0$.

Находим

$$\varphi_0 = \varphi_1 \sin\omega\tau + \varphi_3(\cos\omega\tau - \cos 3\omega\tau). \tag{23}$$

Для оценки величины φ_3, по сравнению с φ_1, были проведены подсчеты, которые показали, что даже при большом моменте силы сопротивления ($q = c_1/c_2 = 3$) величина φ_3 составляет при разных значениях ω всего лишь от трех до одного процента от φ_1.

Вместе с тем объем вычислений, связанный с определением второго приближения, в несколько раз превышает объем, соответствующий подсчетам при отыскании первого приближения (см. предыдущую задачу).

Таким образом, при определении амплитуды колебаний φ_0 нецелесообразно заниматься громоздкими вычислениями для определения второго приближения и следует ограничиться вычислением первого приближения.

Подсчеты, проведенные для сопоставления точного решения, полученного *методом поэтапного* интегрирования (см. задачу 20.7), с первым и вторым приближениями, найденными вариационным методом Бубнова — Галеркина, показали следующее: даже при большом моменте силы сопротивления ($q = c_1/c_2 = 3$) величины углов поворота $\varphi = f(t)$, полученные точным решением, отличаются в меньшую сторону в пределах 5% от соответствующих результатов, найденных в первом приближении. Результаты, вычисленные по второму приближению, ложатся между соответствующими значениями, найденными точным решением и первым приближением. Таким образом, сопоставление этих подсчетов показывает целесообразность использования первого приближения.

Напомним, что в случаях точного решения и второго приближения приходится графически решать трансцендентное уравнение относительно $\omega\tau$, что значительно усложняет решение.

Конечно, при необходимости определить угол наибольшего отклонения $\omega\tau$ приходится пользоваться точным решением (см. задачу 20.7), либо вторым приближением. При этом надо, бесспорно, отдать предпочтение менее громоздкому точному решению.

§ 4. Краткий обзор аналитических методов решения задач нелинейных колебаний

1°. Вводные замечания. В настоящее время все еще отсутствуют общие методы интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений. В связи с этим за последнее время получили большое развитие точные и приближенные аналитические методы: поэтапного интегрирования, разложения по малому параметру, медленно меняющихся амплитуд, эквивалентной линеаризации, последовательных приближений, вариационный метод и многие другие.

При решении задач возникают трудности, связанные с отсутствием навыков в выборе того или иного метода интегрирования. Для приобретения подобных навыков надо продумать и сопоставить различные методы и приемы решения нелинейных задач.

В данном параграфе приведен краткий обзор некоторых аналитических методов решения задач динамики свободных и вынужденных нелинейных колебаний материальных систем с одной степенью свободы.

2°. Свободные нелинейные колебания. Здесь рассмотрены и сопоставлены методы поэтапного интегрирования, малого параметра, медленно меняющихся амплитуд и эквивалентной линеаризации.

Методом поэтапного интегрирования (стыковки, припасовывания) удобно пользоваться в случаях, когда нелинейные дифференциальные уравнения движения интегрируются на отдельных участках. В частности, данный метод целесообразно применять когда нелинейная система является линейной на отдельных этапах. Это, например, имеет место при нелинейной характеристике силы упругости, составленной из нескольких состыкованных прямолинейных отрезков. В этом случае можно получить точные решения линейных дифференциальных уравнений на отдельных этапах движения. Припасовывание этих решений совершается на основе равенства обобщенных координат и обобщенных скоростей в точках стыковки движений.

Методом малого параметра удобно пользоваться при интегрировании автономных нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{x}+k^2x=\mu\cdot f(x),$$

где $f(x)$ — нелинейная функция x, а μ — малый параметр. Достоинством этого метода является возможность отыскания периодического решения, вычисленного с точностью до членов, содержащих малый параметр в требуемой степени (μ, μ^2, μ^3, ...). Искомое решение ищется в виде разложения по степеням малого параметра μ:

$$x=x_0+\mu x_1+\mu^2x_2+\mu^3x_3+\ldots,$$

где x_0, x_1, x_2, x_3 — периодические функции некоторой круговой частоты p и кратных ей круговых частот, подлежащих последующему определению.

Квадрат искомой круговой частоты p также записывается в разложении по степеням малого параметра μ:

$$p^2=k^2+\mu\alpha_1+\mu^2\alpha_2+\mu^3\alpha_3+\ldots$$

Значения постоянных α_1, α_2, α_3, ... выбираются так, чтобы в решении уравнения отсутствовали неограниченно возрастающие (резонансные) члены.

Метод малого параметра дает хорошие приближения при малом числе членов разложения искомого периодического решения. Обычно оказывается достаточным решение задачи с точностью до членов, содержащих малый параметр в первой степени.

Методами медленно меняющихся амплитуд и эквивалентной линеаризации пользуются при интегрировании нелинейного дифференциального уравнения движения $\ddot{x}+k^2x=\mu\cdot f(x, \dot{x})$, где $f(x, \dot{x})$ — нелинейная функция x и $\dot{x}$, а μ — малый параметр.

Оба метода эквивалентны друг другу и дают возможность получить первое приближение в виде $x=a\sin\psi$, где $a=a(t)$ — медленно меняющаяся функция времени.

Применяя метод медленно меняющихся амплитуд Ван-дер-Поля, фазу колебаний ищут в виде $\psi(t)=kt+\alpha(t)$, где k — постоянная,

в случае же метода эквивалентной линеаризации Крылова, Боголюбова — в виде $\psi(t)=\omega t+\alpha$, где $\omega=\omega[a(t)]$, а α — постоянная.

Решение уравнения $\ddot{x}+k^2x=\mu\cdot f(x,\dot{x})$ сводится к интегрированию системы двух приближенных дифференциальных уравнений:

а) метод медленно меняющихся амплитуд:

$$\dot{a}=\frac{\mu}{2\pi k}\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\cos\psi\,d\psi,$$

$$\dot{\alpha}=-\frac{\mu}{2\pi ka}\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ ak\cos\psi)\sin\psi\,d\psi;$$

б) метод эквивалентной линеаризации:

$$\dot{a}=\frac{\mu}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi)\cos\psi\,d\psi,$$

$$\dot{\psi}=\omega,$$

где

$$\omega=\left[k^2-\frac{\mu}{\pi a}\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi)\sin\psi\,d\psi\right]^{1/2}.$$

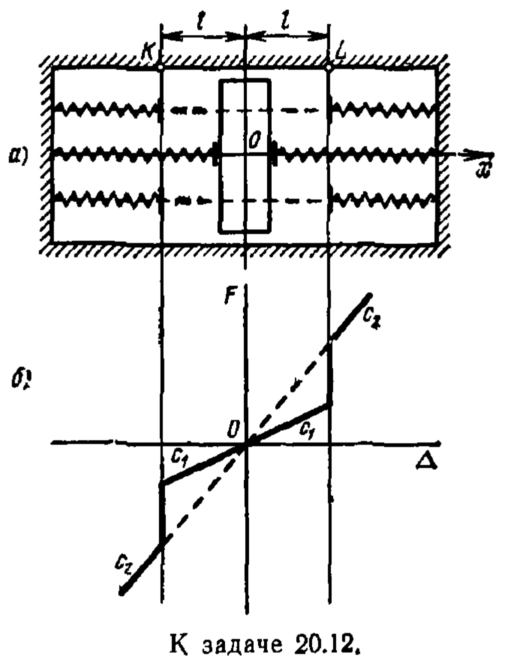
Степень трудности и объем вычислений при решении этими методами примерно одинаковы.

Хотя изложенный ранее метод малого параметра дает возможность найти решение не только в первом и втором приближениях, но также с точностью до членов, содержащих μ^2, μ^3, ..., но при этом объем вычислений резко возрастает, не изменяя существенно результатов. Надо помнить, что метод малого параметра применяется при нелинейности, зависящей только от координаты $[\ddot{x}+k^2x=\mu\cdot f(x)]$, в то время как два данных метода можно использовать при нелинейности, зависящей как от координаты, так и ее производной по времени $[\ddot{x}+k^2x=\mu\cdot f(x,\dot{x})]$. Например, при интегрировании дифференциального уравнения движения $\ddot{x}+k^2x=-\mu(1+\beta\dot{x}^2)\dot{x}$ можно применить метод медленно меняющихся амплитуд или эквивалентной линеаризации, но нельзя воспользоваться методом малого параметра.

Задача 20.12. Груз массы m (на рис. a он изображен в плане) движется в прямолинейных направляющих. В среднем положении он соприкасается с двумя ненапряженными и неприкрепленными к нему пружинами. Коэффициент упругости каждой из них равен c_1. Колебания груза в границах $KL=2l$ происходят попеременно под действием одной из этих пружин. Если колебания выходят за пределы $KL=2l$, то груз входит дополнительно в соприкосновение с боко-

выми пружинами, имеющими предварительный натяг. Суммарный коэффициент упругости основной и двух боковых пружин равен c_2. Силы упругости всех пружин изменяются по закону Гука. На рис. *б* изображена характеристика сил упругости. Она составлена из прямолинейных участков с коэффициентами упругости c_1 и c_2.

Определить амплитуду и период колебаний груза, если в начальный момент ему в среднем положении была сообщена слева направо скорость v_0.



К задаче 20.12.

Решение. Нелинейная характеристика силы упругости является линейной на отдельных участках. Поэтому можно применить метод поэтапного интегрирования.

Для описания движения груза следует воспользоваться двумя дифференциальными уравнениями. Одно из них, $\ddot{x}+k_1^2x=0$, где $k_1^2=c_1/m$, соответствует движению груза под действием одной из средних пружин при $|x|\leqslant l$, а второе, $\ddot{x}+k_2^2x=0$, где $k_2^2=c_2/m$, — при $|x|\geqslant l$, т. е. при одновременном действии трех левых или трех правых пружин.

При заданных начальных условиях движению груза в пределах $|x|\leqslant l$ соответствует уравнение

$$x=\frac{v_0}{k_1}\sin k_1t.$$

Груз придет в соприкосновение с боковыми пружинами в момент

$$\tau_1=\frac{1}{k_1}\arcsin\frac{lk_1}{v_0}.$$

При $|x|\geqslant l$ уравнение движения имеет вид

$$x=l\cos k_2t+\frac{1}{k_2}\sqrt{v_0^2-l^2k_1^2}\sin k_2t$$

(с момента стыковки $t=\tau_1$ отсчет времени начат вновь от нуля). Для припасовывания этих двух уравнений движения выполнены условия равенства координат и проекций скорости при $t=\tau_1$.

Груз придет в крайнее положение через τ_2 секунд после момента стыковки при

$$\tau_2=\frac{1}{k_2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{v_0^2-l^2k_1^2}}{lk_2}.$$

Амплитуда колебаний равна

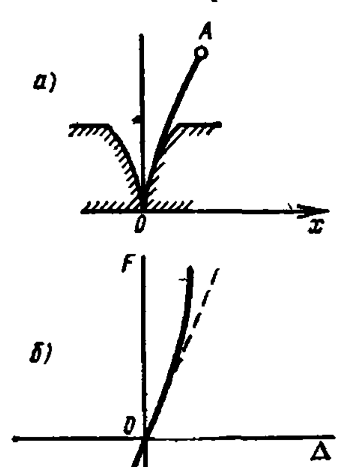
$$a = \frac{1}{k_2}\sqrt{v_0^2 + l^2(k_2^2 - k_1^2)},$$

а период колебаний равен

$$T = 4(\tau_1 + \tau_2) = 4\left(\frac{1}{k_1}\arcsin\frac{lk_1}{v_0} + \frac{1}{k_2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{v_0^2 - l^2k_1^2}}{lk_2}\right).$$

В заключение заметим, что для решения этой задачи нельзя использовать методы малого параметра, медленно меняющихся амплитуд и эквивалентной линеаризации, так как нелинейность системы не является малой.

Задача 20.13. Упругая невесомая балка (рис. *а*), защемленная концом *O*, при колебаниях соприкасается с криволинейными направляющими. При этом часть балки, не контактирующая с направляющими, становится короче и жестче. К концу балки прикреплен груз *A* массы *m*. Проекция на горизонтальную ось x силы упругости, приложенной к грузу, равна $F_x = -cx - \gamma cx^3$ (рис. *б*), где $0 < \gamma \ll 1$.



К задаче 20.13.

Найти уравнение движения груза $x = f(t)$, если в начальный момент он был отклонен из вертикального положения равновесия на $x = a$ и отпущен без начальной скорости.

Решение. Запишем дифференциальное уравнение движения $m\ddot{x} = F_x$ при $F_x = -cx - \gamma cx^3$ в виде

$$\ddot{x} + k^2x = -\mu x^3, \qquad (1)$$

где обозначено $k^2 = c/m$, $\mu = \gamma c/m = \gamma k^2$.

При наличии малой нелинейности (μ — малый параметр) уравнение (1) может быть решено любым из трех методов: малого параметра, медленно меняющихся амплитуд и эквивалентной линеаризации.

Решая задачу методом малого параметра, будем искать периодическое решение уравнения (1) с точностью до членов разложения, содержащих первую степень малого параметра μ

$$x = x_0 + \mu x_1,$$

где x_0, x_1 — пока неизвестные периодические функции круговой частоты p и кратных ей круговых частот, причем

$$p^2 = k^2 + \mu\alpha_1.$$

Здесь α_1 — постоянная, подлежащая последующему определению.

Дифференциальное уравнение (1) сводится к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_0+p^2x_0&=0,\\ \ddot{x}_1+p^2x_1&=\alpha_1x_0-x_0^3. \end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Найдем их периодические решения:

$$\begin{aligned} x_0&=a\cos pt,\\ x_1&=\frac{a^3}{32p^2}(\cos 3pt-\cos pt), \end{aligned}\qquad(3)$$

причем $\alpha_1=\frac{3}{4}a^2$. Формула (3) определяет первое приближение решения уравнения (1).

Искомый закон движения с точностью до членов, содержащих первую степень μ, т. е. второе приближение, имеет вид

$$x=x_0+\mu x_1=a\cos pt+\mu\frac{a^3}{32p^2}(\cos 3pt-\cos pt),\qquad(4)$$

где $\mu=\gamma k^2$, а круговая частота p равна

$$p=k\left(1+\mu\cdot\frac{3}{8}\frac{a^2}{k^2}\right).\qquad(5)$$

Если перейти от второго к третьему приближению, т. е. искать решение x и круговую частоту p в виде

$$x=x_0+\mu x_1+\mu^2x_2,\qquad p^2=k^2+\mu\alpha_1+\mu^2\alpha_2,$$

где x_2 — неизвестная периодическая функция, а α_2 — неизвестная постоянная, то к системе уравнений (2) добавляется уравнение

$$\ddot{x}_2+p^2x_2=\alpha_1x_1+\alpha_2x_0-3x_0^2x_1.$$

Найдем его периодическое решение

$$x_2=\frac{a^5}{1024p^4}(\cos 5pt-\cos pt),$$

причем $\alpha_2=-\frac{3}{128}\frac{a^4}{p^2}$. Искомое третье приближение, содержащее вторую степень малого параметра μ, имеет вид

$$x=a\cos pt+\mu\cdot\frac{a^3}{32p^2}(\cos 3pt-\cos pt)+$$
$$+\mu^2\cdot\frac{a^5}{1024p^4}(\cos 5pt-\cos pt),\qquad(6)$$

где малый параметр $\mu=\gamma k^2$, а круговая частота равна

$$p=k\left(1+\mu\cdot\frac{3}{8}\frac{a^2}{k^2}-\mu^2\cdot\frac{3}{256}\frac{a^4}{k^4}\right).\qquad(7)$$

Если принять $a = 1$ *см*, $\mu = \gamma k^2 = 0{,}1k^2$, то с точностью до членов, содержащих μ в первой степени, круговая частота за счет нелинейности системы возрастет на 3,75 % (см. формулу (5)). Переход от второго к третьему приближению с точностью до μ^2 (см. формулу (7)) при двукратном увеличении объема вычислений изменит предыдущий результат лишь на 0,01 %. Поэтому целесообразно ограничиться отысканием второго приближения, т. е. решения, содержащего первую степень малого параметра μ (формулы (4) и (5)).

При решении этой задачи методом медленно меняющихся амплитуд ищем закон движения в виде

$$x = a(t)\sin[kt + \alpha(t)]. \tag{8}$$

Интегрирование дифференциального уравнения (1) сводится к решению системы уравнений

$$\dot{a} = 0, \qquad \dot{\alpha} = \mu \frac{3}{8}\frac{a^2}{k}.$$

Следовательно, $a(t) = C_1$, $\alpha = \mu \frac{3}{8}\frac{a^2}{k} t + C_2$, т. е. $x = C_1 \sin\left[k\left(1 + \mu \frac{3}{8}\frac{a^2}{k^2}\right)t + C_2\right]$. Подстановка начальных условий движения $t = 0$, $x = a$, $\dot{x} = 0$ дает $C_1 = a$, $C_2 = \pi/2$, т. е. окончательно искомое решение (7) примет вид

$$x = a\cos pt, \tag{9}$$

где обозначено

$$p = k\left(1 + \mu \frac{3}{8}\frac{a^2}{k^2}\right). \tag{10}$$

Решая эту задачу методом эквивалентной линеаризации, ищем закон движения

$$x = a(t)\sin\psi(t). \tag{11}$$

Интегрирование дифференциального уравнения (1) сводится к решению системы уравнений

$$\dot{a} = 0, \qquad \dot{\psi} = k\left(1 + \mu \frac{3}{8}\frac{a^2}{k^2}\right).$$

Следовательно,

$$a(t) = C_1, \qquad \psi(t) = k\left(1 + \mu \frac{3}{8}\frac{a^2}{k^2}\right)t + C_2.$$

После подстановки $a(t)$ и $\psi(t)$ в уравнение (11) и вычисления постоянных C_1 и C_2 получим результаты (9) и (10), найденные методом медленно меняющихся амплитуд.

Сопоставив формулы (10) и (5), а затем (9) и (3), видим, что значение круговой частоты и закон движения груза, определенные тремя разными методами, одинаковы. Уравнение движения (9), определенное методами медленно меняющихся амплитуд и эквивалентной

линеаризации, входит в качестве основного слагаемого во второе (4) и третье (6) приближения, полученные методом малого параметра с точностью до членов, содержащих μ в первой и второй степенях.

3°. Вынужденные нелинейные колебания. Решение задач на вынужденные нелинейные колебания является более громоздким и сложным по сравнению с решениями соответствующих задач на свободные колебания.

Здесь рассмотрены и сопоставлены методы поэтапного интегрирования, последовательных приближений Дуффинга, медленно меняющихся амплитуд Ван-дер-Поля и вариационный метод Бубнова—Галеркина.

Методом поэтапного интегрирования (стыковки, припасовывания) можно пользоваться в случаях, когда нелинейное дифференциальное уравнение интегрируется на отдельных участках. Достоинство метода заключается в том, что он является точным, если нелинейная в целом система оказывается линейной на отдельных участках (например, при характеристике силы упругости, составленной из нескольких состыкованных прямолинейных отрезков). Припасовывание точных решений совершается на основе равенства обобщенных координат и обобщенных скоростей в точках стыковки. Серьезным недостатком этого метода является громоздкость, обычно связанная с необходимостью решения ряда трансцендентных уравнений.

Методом последовательных приближений Дуффинга удобно пользоваться при интегрировании дифференциального уравнения движения

$$\ddot{x}+k^2x=\mu\cdot f(x)+h\sin pt,$$

где $f(x)$ — непрерывная нелинейная функция x, а μ и h — малые параметры.

Этот метод позволяет найти периодическое решение с круговой частотой p изменения возмущающей силы и кратными ей частотами.

Первое приближение ищется в виде $x_1=a_1\sin pt$ решения соответствующего линейного уравнения $\ddot{x}+k^2x=h\sin pt$. В последующих приближениях x_2, x_3, ..., помимо основной гармоники круговой частоты p, появляются гармоники частот кратных p. При этом полагают, что в силу малой нелинейности уравнения основная гармоника $a_1\sin pt$, полученная в первом приближении, остается неизменной.

В зависимости от требуемой степени точности можно найти любое число последовательных приближений. Однако если два первых приближения вычисляются достаточно просто, то при переходе к третьему приближению объем вычислений резко возрастает при незначительном уточнении результатов. Поэтому целесообразно ограничиться определением двух первых приближений.

Метод медленно меняющихся амплитуд Ван-дер-Поля, рассмотренный выше при изучении свободных нелинейных колебаний, дает возможность найти приближенное уравнение установившихся вынужденных нелинейных колебаний.

Этот метод применяют при интегрировании дифференциального уравнения $\ddot{x}+k^2x=\mu\cdot f(x,\ \dot{x},\ t)$, например в частном случае

$$\ddot{x}+k^2x=\mu\cdot f(x,\ \dot{x})+h\sin pt,$$

где $f(x,\ \dot{x})$ — непрерывная нелинейная функция x и $\dot{x}$, а μ и h — малые параметры. Записав это уравнение в виде

$$\ddot{x}+p^2x=F(x,\ \dot{x},\ t),$$

где $F(x,\ \dot{x},\ t)=(p^2-k^2)x+\mu\cdot f(x,\ \dot{x})+h\sin pt$, ищут его периодическое решение в виде $x=a\sin\psi$, причем $\psi=pt+\alpha$, а a и α — постоянные. Значения a и α находят из системы уравнений

$$\int_0^{2\pi} F\left(a\sin\psi,\ ap\cos\psi,\ \frac{\psi-\alpha}{p}\right)\cos\psi\,d\psi=0,$$

$$\int_0^{2\pi} F\left(a\sin\psi,\ ap\cos\psi,\ \frac{\psi-\alpha}{p}\right)\sin\psi\,d\psi=0.$$

Метод Ван-дер-Поля эффективен и достаточно прост. Полученные им приближенные результаты соответствуют первому приближению по методу Дуффинга. Область применения метода Ван-дер-Поля шире, так как им пользуются при нелинейных функциях $f(x,\ \dot{x})$, зависящих как от x, так и от $\dot{x}$. (Напомним, что метод Дуффинга применяется при нелинейных функциях $f(x)$, зависящих только от x.) Вместе с тем, вычисляя методом Дуффинга второе и последующие приближения, можно получить более точные результаты, чем методом Ван-дер-Поля.

Так, если движение описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x+\mu x^3+\nu\dot{x}^3=h\sin pt,$$

где μ, ν и h — малые параметры, то его можно решить методом Ван-дер-Поля, но нельзя пользоваться методом Дуффинга. К уравнению же

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi+\mu\cdot\varphi^3=h\cos\omega t,$$

где μ и h — малые параметры, можно применить любой из этих двух методов.

Вариационный метод Бубнова — Галеркина является в настоящее время одним из наиболее распространенных приближенных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений вынужденных колебаний.

Он основан на вариационном принципе Гамильтона — Остроградского, записываемом в виде

$$\int_{t_1}^{t_1+\frac{2\pi}{p}} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}-Q\right)\delta q\,dt=0,$$

где δq — вариация искомой обобщенной координаты q, а p — круговая частота изменения возмущающей силы.

Если возмущающая сила изменяется по закону $S = H \sin pt$, а нелинейная функция является нечетной, то обобщенная координата q ищется в виде

$$q = a_1 \sin pt + a_3 \sin 3pt + a_5 \sin 5pt + \ldots,$$

где параметры a_1, a_3, a_5 подлежат последующему определению. Для первого приближения принимают $q = a_1 \sin pt$, для второго $q = a_1 \sin pt + a_3 \sin 3pt$ и т. д.

Вариационный метод имеет широкую область применения, так как его использование не связано с малой нелинейностью системы. (Напомним, что методы Дуффинга и Ван-дер-Поля применимы только в уравнениях, содержащих при нелинейной функции малый параметр μ, т. е. в уравнениях с членами $\mu \cdot f(x)$ или $\mu \cdot f(x, \dot{x})$.) Обычно при определении вариационным методом второго и последующих приближений объем вычислений резко возрастает при незначительном уточнении результатов. Поэтому большей частью целесообразно ограничиваться отысканием первого приближения.

Задача 20.14. Решить задачу 20.12 дополнительно, считая, что на груз действует возмущающая сила, проекция которой на ось x равна $S_x = H \sin pt$. Случай резонанса не рассматривать.

Решение. Данная нелинейная система является на отдельных участках линейной. Поэтому применим метод поэтапного интегрирования.

Движение груза описывается двумя линейными дифференциальными уравнениями:

а) под действием средних пружин при $|x| \leqslant l$

$$\ddot{x} + k_1^2 x = h \sin pt, \tag{1}$$

где $k_1^2 = c_1/m$, $h = H/m$;

б) под действием средней и боковых пружин при $|x| \geqslant l$

$$\ddot{x} + k_2^2 x = h \sin pt, \tag{2}$$

где $k_2^2 = c_2/m$, $h = H/m$.

Проинтегрируем эти уравнения и выполним условия их припасовывания: при $t = \tau_1$ имеем $x = l$, $\dot{x} = \dot{x}_\tau$; в результате мы найдем закон движения груза:

а) при $|x| \leqslant l$

$$x = \frac{1}{k_1}\left(v_0 - \frac{hp}{k_1^2 - p^2}\right)\sin k_1 t + \frac{h}{k_1^2 - p^2}\sin pt,$$

б) при $|x| \geqslant l$ (отсчет времени с момента стыковки начат от нуля)

$$x = l \cos k_2 t + \frac{1}{k_2}\left(\dot{x}_{\tau_1} - \frac{hp}{k_2^2 - p^2}\right)\sin k_2 t + \frac{h}{k_2^2 - p^2}\sin pt,$$

где $\dot{x}_{\tau_1}$ — проекция скорости груза в момент стыковки, равна

$$\dot{x}_{\tau_1}=\left(v_0-\frac{hp}{k_1^2-p^2}\right)\cos k_1\tau_1+\frac{hp}{k_1^2-p^2}\cos p\tau_1,$$

а момент стыковки τ_1 определяется из трансцендентного уравнения

$$\frac{1}{k_1}\left(v_0-\frac{hp}{k_1^2-p^2}\right)\sin k_1\tau_1+\frac{h}{k_1^2-p^2}\sin p\tau_1-l=0. \qquad (3)$$

Продолжительность движения τ_2 от стыковки до прихода груза в крайнее положение находится из трансцендентного уравнения

$$-lk_2\sin k_2\tau_2+\left(\dot{x}_{\tau_1}-\frac{hp}{k_2^2-p^2}\right)\cos k_2\tau_2+\frac{hp}{k_2^2-p^2}\cos p\tau_2=0. \qquad (4)$$

Искомая амплитуда колебаний груза равна

$$a=l\cos k_2\tau_2+\frac{1}{k_2}\left(\dot{x}_{\tau_1}-\frac{hp}{k_2^2-p^2}\right)\sin k_2\tau_2+\frac{h}{k_2^2-p^2}\sin p\tau_2.$$

Искомый период колебаний груза равен

$$T=4(\tau_1+\tau_2),$$

причем τ_1 и τ_2 находятся из уравнений (3) и (4). Итак, в ходе решения задачи методом поэтапного интегрирования приходится решать два трансцендентных уравнения (3) и (4). Решение является точным, но громоздким, и целесообразнее применить один из приближенных методов. В данном случае нелинейность не является малой. Поэтому нельзя воспользоваться методами Дуффинга или Ван-дер-Поля и следует применить вариационный метод.

Будем считать, что период колебаний груза равен периоду T изменения возмущающей силы, т. е. $T=2\pi/p$.

В первом приближении ищем закон движения в виде

$$x=a\sin pt, \qquad (5)$$

где амплитуда a подлежит последующему определению.

В момент τ_1 стыковки груза с боковыми пружинами $x=l$, т. е. $l=a\sin p\tau_1$, откуда

$$a=\frac{l}{\sin p\tau_1}. \qquad (6)$$

Для определения τ_1 решим уравнение

$$\int_0^{\tau_1}(\ddot{x}+k_1^2x-h\sin pt)\,\delta x\,dt+\int_{\tau_1}^{\pi/2p}(\ddot{x}+k_2^2x-h\sin pt)\,\delta x\,dt=0. \qquad (7)$$

Подставив в уравнение (7) $x=a\sin pt$, $\delta x=\delta a\sin pt$, найдем

$$\int_0^{\tau_1}[a(k_1^2-p^2)-h]\sin^2 pt\,dt+\int_{\tau_1}^{\pi/2p}[a(k_2^2-p^2)-h]\sin^2 pt\,dt=0.$$

Вычислив интегралы и использовав формулу (6), получим трансцендентное уравнение

$$\frac{l}{\sin p\tau_1}\left[(k_1^2-p^2)(2p\tau_1-\sin 2p\tau_1)+(k_2^2-p^2)(\pi-2p\tau_1+\sin 2p\tau_1)-\pi h=0,\right.$$

из которого следует найти τ_1. Затем искомую амплитуду колебаний и уравнение движения груза определим по формулам (6) и (5).

Этому приближенному решению вариационным методом следует отдать предпочтение по сравнению с точным решением методом поэтапного интегрирования.

Задача 20.15. Найти закон периодических вынужденных колебаний груза, рассмотренного в задаче 20.13, если дополнительно действует возмущающая сила, проекция которой на ось x равна $S_x = H\sin pt$, где $0 < H \ll 1$.

Решение. В правую часть дифференциального уравнения (1) задачи 20.13 добавляется слагаемое $h\sin pt$, где $h=H/m$, как и μ, является малым параметром, т. е.

$$\ddot{x}+k^2x=-\mu x^3+h\sin pt. \tag{1}$$

Это уравнение можно приближенно проинтегрировать наиболее общим — вариационным методом. Наличие малых параметров μ и h дает возможность применить метод Ван-дер-Поля. Учитывая, что при малых параметрах μ и h нелинейный член x^3 зависит только от x, можно также использовать метод Дуффинга.

Уравнение (1) при $\mu=\gamma$ проинтегрировано методом Дуффинга в задаче 20.8 (см. стр. 405—407) и получены два первых приближения.

Первое приближение:

$$x_1=a_1\sin pt, \tag{2}$$

причем амплитуда a_1 определяется из кубического уравнения

$$a_1(p^2-k^2)-\frac{3}{4}\mu a_1^3+h=0. \tag{3}$$

Второе приближение:

$$x_2=a_1\sin pt-\mu\cdot\frac{a_1^3}{32p^2}\sin 3pt. \tag{4}$$

Покажем, что решение задачи значительно усложняется при переходе от второго к третьему приближению. Записав уравнение (1) в виде

$$\ddot{x}+p^2x=(p^2-k^2)x-\mu x^3+h\sin pt, \tag{5}$$

заменим в его правой части x на x_2 из формулы (4) и представим эту правую часть в виде суммы гармоник круговой частоты p и кратных ей круговых частот:

$$\ddot{x}+p^2x=B\sin pt+K\sin 3pt+L\sin 5pt+M\sin 7pt+N\sin 9pt, \tag{6}$$

где обозначено

$$
\begin{aligned}
&B = a_1(p^2-k^2) - \frac{3}{4}\mu a_1^3 + h - \frac{3}{4}\mu^2\frac{a_1^5}{32p^2} - \frac{3}{2}\mu^3\frac{a_1^7}{32^2p^4},\\
&K = \mu\frac{a_1^3}{4}\left(1-\frac{p^2-k^2}{8p^2}\right) + \frac{3}{2}\mu\frac{a_1^5}{32p^2} + \frac{3}{4}\mu^3\frac{a_1^9}{32^2p^6},\\
&L = -\frac{3}{4}\mu^2\frac{a_1^5}{32p^2}\left(1+\mu\frac{a_1^2}{32p^2}\right), \quad M = \frac{3}{4}\mu^3\frac{a_1^7}{32^2p^4},\\
&N = -\frac{1}{4}\mu^4\frac{a_1^9}{32^3p^6}.
\end{aligned} \qquad (7)
$$

Для того чтобы решение уравнения (6) было периодическим, надо считать $B=0$, т. е.

$$
a_1(p^2-k^2) - \frac{3}{4}\mu a_1^3 + h - \frac{3}{4}\mu^2\frac{a_1^5}{32p^2} - \frac{3}{2}\mu^3\frac{a_1^7}{32^2p^4} = 0. \qquad (8)
$$

Итак, для определения a_1 надо, вместо кубического уравнения (3), решить уточненное уравнение (8) седьмой (!) степени, которое отличается от него лишь на члены второго и третьего порядков малости параметра μ, т. е. $-\frac{3}{4}\mu^2\frac{a_1^5}{32p^2} - \frac{3}{2}\mu^3\frac{a_1^7}{32^2p^4}$.

Проинтегрировав уравнение (6), получим третье приближение в виде

$$
x_3 = a_1\sin pt + d_3\sin 3pt + d_5\sin 5pt + d_7\sin 7pt + d_9\sin 9pt, \qquad (9)
$$

причем

$$
d_3 = -K/8p^2, \quad d_5 = -L/24p^2, \quad d_7 = -M/48p^2, \quad d_9 = -N/80p^2,
$$

где K, L, M и N приведены в формулах (7), а амплитуда a_1 первого приближения определяется из уравнения (8).

Нетрудно видеть, что при переходе от второго к третьему приближению объем вычислений увеличился в несколько раз при незначительных уточнениях результатов. Поэтому целесообразно ограничиться вычислением второго приближения.

Применяя метод Ван-дер-Поля, ищем решение уравнения (5) в виде

$$
x = a_1\sin\psi = a_1\sin(pt+\alpha), \qquad (10)
$$

где a_1 и α — постоянные, подлежащие определению.

Для отыскания a_1 и α составим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} F\left(a\sin\psi, \frac{\psi-\alpha}{p}\right)\cos\psi\, d\psi = 0,\\
&\int_0^{2\pi} F\left(a\sin\psi, \frac{\psi-\alpha}{p}\right)\sin\psi\, d\psi = 0,
\end{aligned}
$$

где через $F\left(a\sin\psi, \frac{\psi-\alpha}{p}\right)$ обозначен результат подстановки $x = a\sin\psi$ и $t=\frac{\psi-\alpha}{p}$ в правую часть уравнения (5), т. е.

$$F\left(a\sin\psi, \frac{\psi-\alpha}{p}\right)=a_1(p^2-k^2)\sin\psi-\mu a_1^3\sin^3\psi+h\sin(\psi-\alpha).$$

После вычисления интегралов получим

$$h\sin\alpha=0,$$
$$(p^2-k^2)a_1+h\cos\alpha-\frac{3}{4}\mu a_1^3=0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем

$$\left.\begin{aligned}\alpha=0,\\ (p^2-k^2)a_1+h-\frac{3}{4}\mu a_1^3=0.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Искомое решение (10) при $\alpha=0$ примет вид $x=a_1\sin pt$ первого приближения (2), полученного выше методом Дуффинга. Кубические уравнения (3) и (11), из которых находится a_1, тоже одинаковы.

Итак методами Ван-дер-Поля и Дуффинга в первом приближении получены тождественные результаты. Объем вычислений примерно одинаков. Заметим, что методом Ван-дер-Поля определяется только одно приближение, в то время как методом Дуффинга можно найти и последующие. В частности, при незначительном увеличении объема вычислений находится второе приближение.

При решении данной задачи вариационным методом ищем первое приближение в виде $x=a_1\sin pt$. Для определения a_1 подставим в уравнение

$$\int_0^{2\pi/p}(\ddot{x}+k^2x+\mu x^3-h\sin pt)\,\delta x\,dt=0 \tag{12}$$

значения $x=a_1\sin pt$ и $\delta x=\delta a_1\sin pt$. После вычисления интегралов уравнение (12) примет вид кубических уравнений (3) и (11).

Итак, применение трех методов привело к одинаковым результатам. Определение первого приближения вариационным методом эффективнее по сравнению с методами Дуффинга и Ван-дер-Поля.

Вместе с тем уже определение второго приближения вариационным методом значительно усложняет решение задачи.

Действительно, подставив в уравнение (12) искомый закон второго приближения $x=a_1\sin pt+a_3\sin 3pt$ и его вариацию $\delta x = \delta a_1\sin pt+\delta a_3\sin 3pt$, где a_1 и a_3 подлежат последующему определению, получим

$$\delta a_1\int_0^{2\pi/p}R\sin pt\,dt+\delta a_3\int_0^{2\pi/p}R\sin 3pt\,dt=0. \tag{13}$$

Здесь обозначено

$$R=[a_1(k^2-p^2)-h]\sin pt+a_3(k^2-9p^2)\sin 3pt+\mu a_1^3\sin^3 pt+$$
$$+3\mu a_1^2a_3\sin^2 pt\sin 3pt+3\mu a_1a_3^2\sin pt\sin^2 3pt+\mu a_3^3\sin^3 3pt.$$

Ввиду независимости вариаций δa_1 и δa_3 из уравнения (13) найдем

$$\int_0^{2\pi/p} R\sin pt\,dt=0,\qquad \int_0^{2\pi/p} R\sin 3pt\,dt=0.$$

Подставив значение R и вычислив интегралы, получим

$$\left.\begin{aligned} a_1(k^2-p^2)-h-\frac{3}{4}\mu a_1^2a_3+\frac{3}{2}\mu\cdot a_1a_3^2=0,\\ a_3(k^2-9p^2)-\frac{1}{4}\mu a_1^3+\frac{3}{2}\mu a_1^2a_3+\frac{3}{4}\mu a_3^3=0.\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

Для определения a_1 и a_3, входящих в искомый закон движения $x=a_1\sin pt+a_3\sin 3pt$, надо решить громоздкую систему кубических уравнений (14). Поэтому вычисление второго приближения вариационным методом нецелесообразно. В этой задаче для второго приближения лучше воспользоваться методом Дуффинга. Вместе с тем не следует забывать, что использование вариационного метода не связано с малой нелинейностью, что значительно расширяет рамки его применения.

§ 5. Исследование нелинейных колебаний на фазовой плоскости

1° Основные определения. Среди различных методов исследования нелинейных колебаний одним из наиболее распространенных и детально разработанных является представление движения на фазовой плоскости или в фазовом пространстве.

Этот метод позволяет, не интегрируя дифференциальные уравнения движения, ответить на наиболее важные вопросы, характеризующие движение системы. Это существенно, так как во многих случаях нелинейные дифференциальные уравнения не могут быть проинтегрированы в замкнутом виде.

Представление движения на фазовой плоскости позволяет найти возможные состояния равновесия и определить устойчивость равновесия системы.

С помощью построения на фазовой плоскости можно найти периодические движения системы и исследовать переходные процессы к устойчивому состоянию движения в зависимости от различных параметров и начальных условий движения.

В тех случаях, когда нелинейные дифференциальные уравнения могут быть проинтегрированы в замкнутой форме, представление движения на фазовой плоскости позволяет ответить на вопросы об устойчивости возможных состояний равновесия и движения системы

и установить влияние различных параметров и начальных условий движения на устойчивость этих состояний.

Изучая ранее колебания материальной точки, мы строили отклонение точки от положения равновесия как функцию времени. В тех случаях, когда такие графики снимаются экспериментально с регистрацией измеренных отклонений на специальном приборе, они называются осциллограммами.

Эти графики позволяют определить положение точки (или системы) в любой момент времени, однако не дают представления о зависимости скорости от координаты.

Рассмотрим положения, лежащие в основе исследования движения системы с помощью фазовой плоскости. Дифференциальное уравнение движения при нелинейных колебаниях системы с одной степенью свободы может быть записано в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=f(x,\ \dot{x},\ t), \tag{1*}$$

где x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ — обобщенная координата системы и соответственно ее первая и вторая производные по времени, k — круговая частота системы, t — время, f — некоторая нелинейная функция указанных в скобке аргументов.

Если функция f зависит явно от времени t, то система называется *неавтономной*. Если же время в явном виде в функцию f не входит, то система называется *автономной*.

Обозначив

$$\frac{dx}{dt}=y,$$

можно представить уравнение (1*) в виде системы, состоящей из двух уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=f(x,\ y,\ t)-k^2x,\\ \frac{dx}{dt}&=y.\end{aligned}\right\} \tag{2*}$$

Ограничиваясь в данном пункте рассмотрением автономных систем, запишем систему (2*) в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=F(x,\ y),\\ \frac{dx}{dt}&=y.\end{aligned}\right\} \tag{3*}$$

Плоскость переменных x и $y=dx/dt$, где x и y — декартовы прямоугольные координаты, называется фазовой плоскостью.

Будем полагать состояние нелинейной системы *определенным*, если известны в некоторый момент времени ее координата x и скорость y. Тогда *каждой точке на фазовой плоскости соответствует*

одно-единственное состояние системы. Поэтому фазовую плоскость называют иногда *плоскостью состояний*, а точку на фазовой плоскости называют *изображающей точкой*.

При изменении состояния системы изображающая точка будет перемещаться по фазовой плоскости. Траектория, которую опишет при этом изображающая точка, называется *фазовой траекторией*.

Если движение системы периодическое, то фазовая траектория будет замкнутой кривой. Начало координат на фазовой плоскости, где $x=0$ и $y=0$, является положением равновесия.

Изменяя начальные условия движения, можно получить семейство фазовых траекторий, заполняющих фазовую плоскость.

Такая совокупность фазовых траекторий называется *фазовым портретом системы* и позволяет ответить на многие вопросы, касающиеся характера движения системы.

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий находится из (3*):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{F(x,\ y)}{y}. \tag{4*}$$

Интегральная кривая, отвечающая уравнению (4*), в простейших случаях является фазовой траекторией, а в более сложных случаях соответствует нескольким фазовым траекториям.

Уравнение фазовой траектории определяет зависимость координаты от скорости движения исходной механической системы.

Скорость движения изображающей точки на фазовой плоскости называется фазовой скоростью. Модуль фазовой скорости равен

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{y^2+F^2(x,\ y)}. \tag{5*}$$

Важное значение при исследовании движения системы имеют ее состояния равновесия. Система будет находиться в равновесии, если одновременно ее скорость $dx/dt=y$ и ускорение $dy/dt=F(x,\ y)$ обращаются в нуль, так как в этом случае сила обращается в нуль. Сопоставляя эти условия с выражением (5*) для модуля фазовой скорости, замечаем, что при равновесии системы фазовая скорость равна нулю.

Через каждую точку фазовой плоскости проходит одна фазовая траектория. Исключением являются точки равновесия, называемые *особыми точками*. В этих точках одновременно обращаются в нуль числитель и знаменатель уравнения (4*) и, следовательно, направление касательной к фазовой траектории становится неопределенным. Таким образом, нарушается одно из условий теоремы Коши об единственности решения дифференциального уравнения (4*). Все точки фазовой плоскости, кроме особых, называют *регулярными*.

Поведение фазовых траекторий вблизи особой точки зависит от параметров системы и от начальных условий движения. Наиболее

часто встречающиеся случаи поведения фазовых траекторий вблизи особой точки представлены на рисунках.

На рис. 20.3 представлены фазовые траектории вокруг особой точки, совпадающей с началом координат. Колебания системы являются периодическими, фазовые траектории в окрестности особой точки являются замкнутыми кривыми. Особая точка обладает областью окружения и называется в этом случае *центром*.

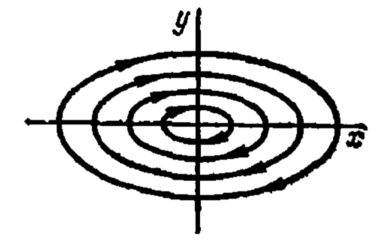


Рис. 20.3. Центр.

На рис. 20.4 и 20.5 показаны фазовые траектории в окрестности особой точки, называемой *фокусом*.

Точки пересечения фазовой траектории (рис. 20.4) с осями координат неограниченно, асимптотически и монотонно приближаются к особой точке, началу координат, не достигая ее за конечное время. Колебания системы неограниченно затухают. Особая точка имеет область притяжения. Особая точка является устойчивым фокусом. Фазовые траектории — скручивающиеся спирали.

Фазовые траектории на рис. 20.5 — раскручивающиеся спирали. Колебания исходной механической системы монотонно и неограниченно

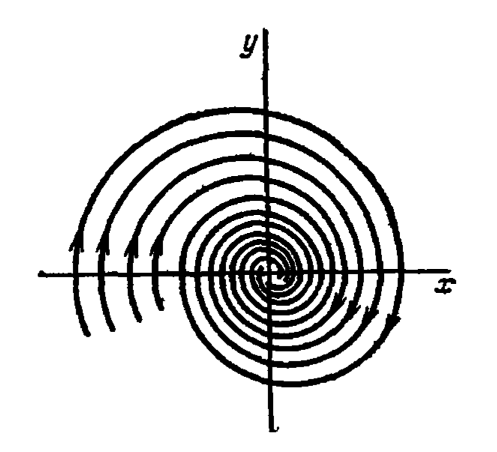


Рис. 20.4. Фокус со скручивающимися спиралями.

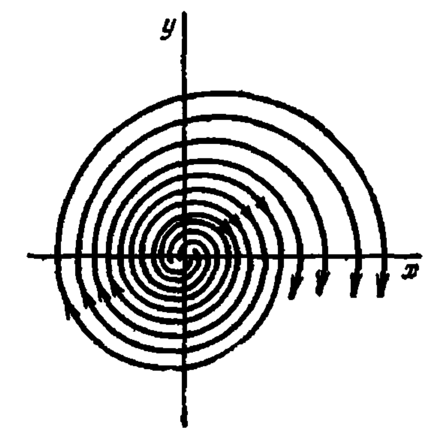


Рис. 20.5. Фокус с раскручивающимися спиралями.

возрастают. Особая точка — неустойчивый фокус, не имеющий области притяжения.

На рис. 20.6 показан фазовый портрет с особой точкой, называемой *седлом*. Каждая ветвь фазовых кривых пересекает ось x только один раз или ни одного раза, и следовательно, движение исходной системы не является колебательным. Кроме криволинейных фазовых траекторий (не проходящих через особую точку), имеется две прямолинейные фазовые траектории, проходящие через особую точку,

являющиеся асимптотами криволинейных фазовых траекторий. Одна из *прямолинейных фазовых траекторий является при этом сближающей*, изображающая точка пробегает ее в направлении к началу координат, вторая — удаляющей, изображающая точка пробегает ее, удаляясь от особой точки.

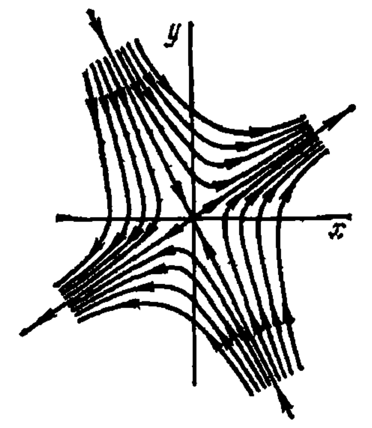


Рис. 20.6. Седло.

На рис. 20.7 и 20.8 показаны фазовые портреты с особыми точками — устойчивым и неустойчивым *узлом*. Устойчивый узел (рис. 20.7) имеет область притяжения, неустойчивый узел (рис. 20.8) не имеет области притяжения.

Каждая из фазовых траекторий пересекает ось абсцисс только один раз, фазовые траектории — незамкнутые кривые, движение системы не колебательное.

В первом и втором квадрантах скорость y положительна, поэтому абсцисса x в этих квадрантах будет возрастать, в третьем и четвертом квадрантах, наоборот, скорость y отрицательна и абсцисса x будет убывать. Следовательно, касательная к фазовой траектории в точках пересечения с осью абсцисс перпендикулярна последней.

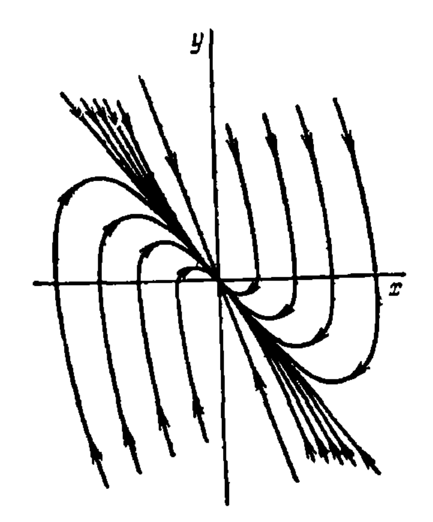


Рис. 20.7. Узел с двумя проходящими через него прямыми и фазовые траектории, направленные к узлу.

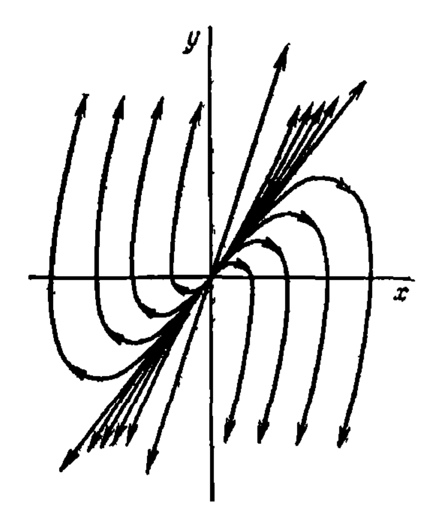


Рис. 20.8. Узел с двумя проходящими через него прямыми и фазовые траектории, направленные от узла.

Важное значение при исследовании нелинейных колебаний имеют фазовые траектории, которые, начиная с определенного момента времени, остаются в пределах некоторой конечной области, не приближаясь сколь угодно близко к особой точке. Такие фазовые траектории

пересекают бесчисленное число раз ось абсцисс. Возможные формы таких фазовых траекторий — спирали и замкнутые кривые. Замкнутые кривые в этом случае называются *предельными циклами*. Для скручивающейся спирали предельный цикл лежит внутри спирали, а для раскручивающейся спирали — вне ее.

Предельные циклы могут быть устойчивыми и неустойчивыми (рис. 20.9). На рисунке показаны два предельных цикла: большего радиуса — устойчивый — и меньшего радиуса — неустойчивый.

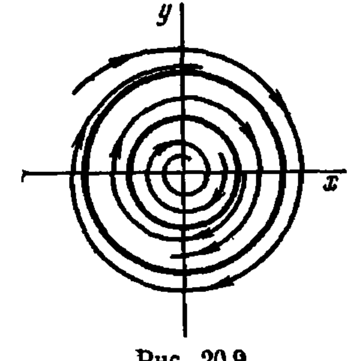


Рис. 20.9.

Устойчивый предельный цикл характеризуется тем, что при небольших начальных отклонениях от него изображающая точка асимптотически по спирали приближается к предельному циклу.

Устойчивому предельному циклу соответствуют автоколебания системы.

Если предельный цикл неустойчив, то при небольших отклонениях от него изображающая точка будет удаляться от предельного цикла.

В следующем пункте будут показаны примеры построения фазовых портретов для линейных систем с одной степенью свободы.

В п. 3° построение фазовых портретов будет приведено для нелинейных систем с одной степенью свободы. Из многочисленных приближенных приемов построения фазовых траекторий (метод изоклин, метод Дробова, метод Льенара, метод Пелла и др.) будет применен универсальный и получивший наибольшее распространение в последнее время дельта-метод.

2°. Фазовые портреты линейных систем. Рассмотрим в этом пункте фазовые траектории и фазовые портреты линейных систем.

При решении задач на построение фазовых портретов линейных систем следует придерживаться такой последовательности действий:

1) выбрать систему координат так, чтобы ее начало совпадало с положением равновесия системы;

2) составить дифференциальное уравнение движения;

3) исключить из уравнения время и, проинтегрировав полученное дифференциальное уравнение фазовых траекторий, найти зависимость между отклонением (обобщенной координатой) системы и ее обобщенной скоростью;

4) построив на фазовой плоскости интегральные кривые при различных начальных условиях движения, найти фазовый портрет системы;

5) по фазовому портрету определить характер движения и равновесия системы.

Задача 20.16. Построить фазовый портрет незатухающего гармонического осциллятора.

Решение. В гармоническом незатухающем осцилляторе колебания, называемые свободными, возникают под действием *восстанавливающей силы*, пропорциональной отклонению системы от положения равновесия, стремящейся все время вернуть систему в положение равновесия. Примерами гармонического незатухающего осциллятора являются груз, подвешенный на пружине, математический и физический маятники при малых углах отклонения (без учета сил сопротивления), электрический колебательный контур, состоящий из емкости и индуктивности, но не обладающий сопротивлением.

Во всех этих случаях дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x}+k^2x=0, \tag{1}$$

где x — отклонение системы от положения равновесия или заряд в электрическом колебательном контуре (см. гл. 8), $k^2=c/m$ — для груза, подвешенного на пружине (c — коэффициент жесткости, m — масса), $k^2=g/l$ — для математического маятника (l — длина маятника, g — ускорение силы тяжести), $k^2=Pa/I_z$ — для физического маятника (P — вес маятника, a — расстояние от оси подвеса до центра тяжести, I_z — момент инерции маятника относительно оси подвеса), $k^2=1/CL$ — для электрического колебательного контура (L — индуктивность, C — емкость).

Положив

$$y=\frac{dx}{dt}=\dot{x},$$

представим уравнение (1) в виде системы

$$\frac{dy}{dt}=-k^2x, \qquad \frac{dx}{dt}=y.$$

Исключив из этой системы время, находим

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{k^2x}{y}. \tag{2}$$

Единственной особой точкой этого дифференциального уравнения является положение равновесия, начало координат $x=0$, $y=0$, когда правая часть (2) обращается в неопределенность. Отделив переменные, находим

$$y\,dy=-k^2x\cdot dx. \tag{3}$$

Проинтегрировав, получим

$$y^2+k^2x^2=C, \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная интегрирования, определяемая по начальным условиям движения.

Уравнение (4) представляет фазовый портрет системы. Это семейство эллипсов (см. *рис.* 20.3), симметричных относительно особой точки — начала координат. Каждый эллипс является фазовой траекторией. Особая точка — центр — находится из (4) как эллипс, выродившийся в точку при начальных условиях, соответствующих $C=0$.

Какой из эллипсов соответствует данному периодическому движению системы? Его параметры зависят только от начальных условий движения. Если начальные условия определены, то изображающая точка будет описывать один и тот же эллипс в течение всего времени движения системы. Таким образом, каждая из интегральных кривых в данном случае является целой фазовой траекторией. Период колебания не зависит от начальных условий движения. Следовательно, любой из эллипсов изображающая точка описывает со скоростью

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{y^2+k^4x^2}$$

за один и тот же промежуток времени, перемещаясь по ходу часовой стрелки. Заметим, что уравнение (4) одновременно является законом сохранения механической энергии (кинетической и потенциальной) для рассматриваемой консервативной системы.

Задача 20.17. Найти фазовый портрет гармонического осциллятора с вязким трением.

Решение. В гармоническом осцилляторе с вязким трением к восстанавливающей силе добавляется сила сопротивления (вязкое трение, электрическое сопротивление), пропорциональная первой степени скорости и направленная в сторону, противоположную скорости. С учетом силы сопротивления дифференциальное уравнение движения системы будет

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0, \tag{1}$$

где $2n=\alpha/m$, а α — коэффициент пропорциональности силы сопротивления ($R_x=-\alpha\dot{x}$). Величина n имеет такую же размерность, как и k, т. е. *сек*$^{-1}$, если время измеряется в секундах. Обозначив, как и ранее, $\dot{x}=y$, перепишем уравнение (1) в виде системы двух уравнений

$$\frac{dy}{dt}=-2ny-k^2x, \tag{2}$$

$$\frac{dx}{dt}=y. \tag{3}$$

Исключив из этой системы время, находим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2ny-k^2x}{y}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что особой точкой уравнения (4) является начало координат — положение равновесия, где правая часть обращается в неопределенность вида 0/0.

Чтобы отделить переменные в уравнении (4), произведем замену

$$y = zx.$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{z^2+2nz+k^2}. \tag{5}$$

Интеграл этого уравнения зависит от вида корней квадратного полинома в знаменателе правой части. Поэтому рассмотрим отдельно два случая: $n<k$ — случай *малого сопротивления* и $n>k$ — случай *большого сопротивления*, к которому примыкает и граничный случай $n=k$.

Случай малого сопротивления. В этом случае $n<k$ и интеграл (5) имеет вид

$$x(z^2+2nz+k^2)^{1/2} = C\exp\left[\frac{n}{k_1}\operatorname{arctg}\frac{z+n}{k_1}\right], \tag{6}$$

где $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$, C — произвольная постоянная интегрирования. Возвратившись к старым переменным, т. е. заменив $z=y/x$, находим уравнение интегральных кривых

$$\sqrt{y^2+2n\,xy+k^2x^2} = C\exp\left[\frac{n}{k_1}\operatorname{arctg}\frac{y+nx}{k_1x}\right]. \tag{7}$$

Полученному уравнению интегральных кривых можно придать более обозримый вид, если перейти к новым переменным, которые будут новыми прямоугольными координатами:

$$x_1=k_1x, \qquad y_1=y+nx;$$

тогда после преобразования

$$y^2+2n\,xy=k^2x^2=(y+nx)^2+k_1^2x^2=x_1^2+y_1^2$$

вместо (7) мы получим

$$x_1^2+y_1^2=C_1\exp\left[2\frac{n}{k_1}\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}\right]. \tag{8}$$

Введем полярные координаты ρ и φ:

$$x_1=\rho\cos\varphi, \qquad y_1=\rho\sin\varphi.$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$\rho=C_1e^{\frac{n}{k_1}\varphi}. \tag{9}$$

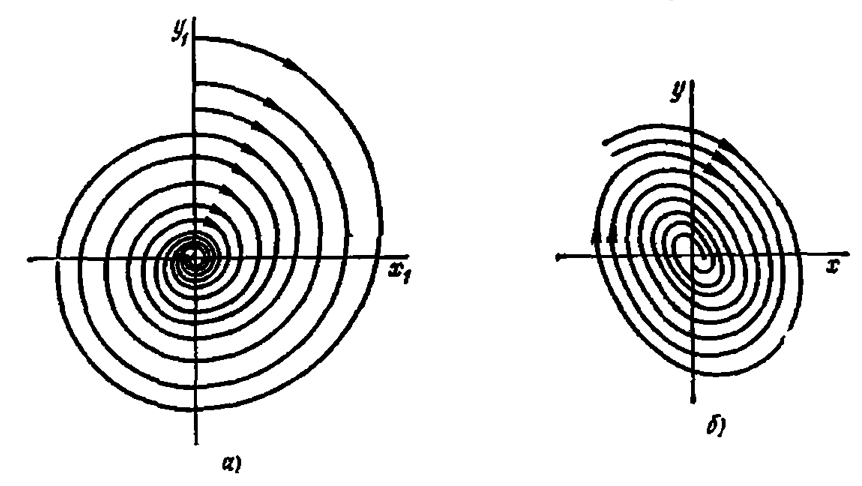
Направление движения изображающей точки (рис. *a*) соответствует ходу часовой стрелки. Угол φ отсчитывается в обратном направлении. Следовательно, в уравнении (9) угол φ непрерывно уменьшается, а значит, неограниченно уменьшается и радиус-вектор изображающей

точки ρ. Интегральные кривые — скручивающиеся спирали (рис. *а*), навивающиеся на начало координат. Каждая интегральная кривая является в этом случае фазовой траекторией.

Фазовая скорость равна по модулю

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{y^2+(2ny+k^2x)^2}. \qquad (10)$$

Так как фазовая скорость по мере приближения изображающей точки к положению равновесия неограниченно уменьшается, то изображающая точка не может достигнуть начала координат за конечное



К задаче 20.17.

время, хотя и приближается к нему асимптотически. Особая точка в этом случае называется *устойчивым фокусом.*

При любых начальных условиях изображающая точка стремится к началу координат, следовательно, равновесие системы, соответствующее началу координат, будет устойчивым.

Линейное преобразование $x_1=k_1x$, $y_1=y+nx$ не изменяет характера интегральных кривых. Действительно при малой величине n/k_1 на плоскости x_1y_1 спирали близки к окружности

$$x_1^2+y_1^2=C_1.$$

Эта окружность, если вернуться к исходным переменным, превращается при малой величине n/k_1 в эллипс

$$y^2+2n\,xy+k^2x^2=\text{const}.$$

Таким образом, на плоскости xy спирали фазовых траекторий близки к этому эллипсу (рис. *б*).

Перейдем к определению шага спирали (рис. *а*). Из рисунка видно, что шаг спирали равен x_n-x_{n+1}. С другой стороны, как

известно, решением исходного дифференциального уравнения (1) является

$$x = Ae^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\beta\right), \tag{11}$$

где A и β определяются по начальным условиям движения. Период колебания равен

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}; \tag{12}$$

тогда шаг спирали будет равен

$$x_n - x_{n+1} = A - Ae^{-nT} = A\left(1-e^{-nT}\right). \tag{13}$$

Если $nT \ll 1$, то равенство (13) можно приближенно представить, разложив функцию в ряд

$$\left(1-e^{-nT}\right)=1-\left(1-nT+\frac{(nT)^2}{2}+\ldots\right)=nT-\frac{(nT)^2}{2}+\ldots$$

Тогда шаг представится следующей приближенной формулой:

$$x_n - x_{n+1} = AnT.$$

Таким образом, при $nT \ll 1$ шаг спирали пропорционален логарифмическому декременту.

Случай большого сопротивления. Проинтегрировав уравнение (5) при $n>k$ и внеся затем в полученный результат значение z, находим

$$y^2+2n\,xy+k^2x^2=C_1\left[\frac{\frac{y}{x}+n-\sqrt{n^2-k^2}}{\frac{y}{x}+n+\sqrt{n^2-k^2}}\right]^{\frac{n}{\sqrt{n^2-k^2}}}. \tag{14}$$

Правая часть этого уравнения легко раскладывается на множители следующим образом:

$$y^2+2n\,xy+k^2x^2=(y+nx)^2-(n^2-k^2)\,x^2=(y+b_2x)(y+b_1x),$$

где для краткости введены обозначения

$$b_1=n-\sqrt{n^2-k^2},\qquad b_2=n+\sqrt{n^2-k^2}.$$

Тогда уравнение (14) может быть написано в виде

$$(y+b_1x)^{b_1}=C_2\,(y+b_2x)^{b_2}. \tag{15}$$

Если рассматривать x_1 и y_1, тождественно удовлетворяющие равенствам

$$x_1\equiv y+b_1x,\qquad y_1\equiv y+b_2x,$$

как новые прямоугольные координаты, то уравнение (15), определяющее семейство интегральных кривых, примет вид

$$x_1=C_3y_1^s, \tag{16}$$

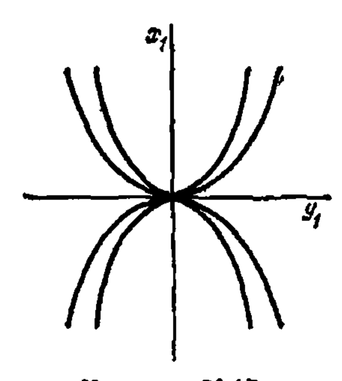
где $s=b_2/b_1>1$. Интегральные кривые представлены на рис. в.

Из (16) видно, что $dx_1/dy_1 = 0$ при $y_1 = 0$ и, следовательно, все кривые касаются оси y_1 в начале координат. Вычислив вторую производную от x_1 по y_1, находим

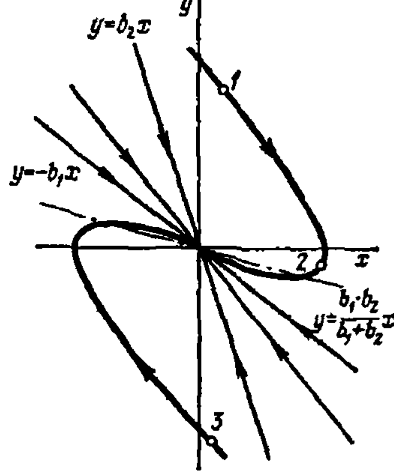
$$\frac{1}{x_1}\frac{d^2x_1}{dy_1^2} = \frac{s(s-1)}{y_1^2}.$$

Эта величина всегда положительна, следовательно, все интегральные кривые обращены выпуклостью к оси y_1.

Возвратившись к фазовой плоскости xy, находим на ней уравнение оси y_1, касательной к интегральным кривым, для чего полагаем



К задаче 20.17, *в*.



К задаче 20.17, *г*.

$$x_1 = y + b_1x = 0;$$

отсюда уравнение искомой прямой будет

$$y = -b_1x.$$

Аналогично мы получим на фазовой плоскости уравнение оси x_1, приравняв нулю y_1:

$$y_1 = y + b_2x = 0.$$

Следовательно, уравнение прямой будет

$$y = -b_2x.$$

Наконец, найдем уравнение прямой, пересекающей интегральные кривые в точках, где касательная горизонтальна. В этих точках равенство (4) обращается в нуль и, следовательно, уравнение прямой будет

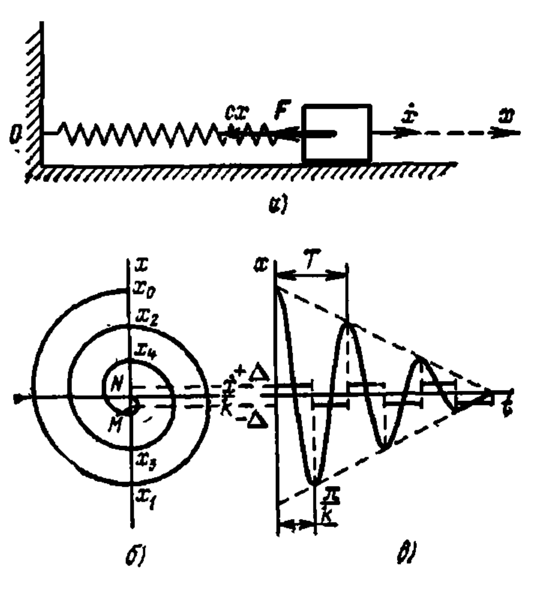
$$y = -\frac{k^2}{2n}x \equiv -\frac{b_1b_2}{b_1+b_2}x.$$

Интегральные кривые показаны на рис. *г*. Следует отметить, что в данном случае каждая интегральная кривая включает три фазовые траектории: ветвь, идущую в начало координат справа, ветвь, идущую

в начало координат слева, и особую точку. В данном случае по всем фазовым траекториям изображающая точка движется в начало координат, к особой точке — *устойчивому узлу.*

Характер апериодического движения, совершаемого исходной механической системой, легко определяется по расположению изображающей точки на фазовой траектории. Если изображающая точка в начальный момент находится в положении *1*, то скорость ее вначале положительна и расстояние исходной системы от положения равновесия возрастает до момента, когда изображающая точка пересечет ось x. После этого скорость становится отрицательной и исходная система асимптотически приближается к положению равновесия.

Если в начальный момент изображающая точка находится в положении *2*, то исходная система будет асимптотически двигаться к положению равновесия, так как отклонение системы положительно, а скорость направлена в отрицательную сторону оси x.



К задаче 20.18.

Задача 20.18. Тело, лежащее на горизонтальной негладкой плоскости, прикреплено пружиной к стене (рис. *а*). Коэффициент жесткости пружины c, максимальное значение силы сухого (кулонова) трения F. Сила трения при движении постоянна по модулю и направлена в сторону, противоположную скорости. Начало координат выбрано в конце нерастянутой пружины. Тело в начальный момент отодвинули на расстояние x_0 и отпустили без начальной скорости.

Найти уравнение движения тела, построить зависимость перемещения от времени и фазовую траекторию, если $x_0 = 12\frac{F}{c}$.

Решение. Составим дифференциальное уравнение движения тела

$$m\ddot{x} = -cx \mp F, \qquad (1)$$

знак минус соответствует положительной проекции скорости, знак плюс отвечает отрицательной проекции скорости на ось x. Обозначим через

$$\Delta = \frac{F}{c} = \mathrm{const}$$

максимальное отклонение тела (от положения при нерастянутой пружине), при котором сила трения будет уравновешивать реакцию

пружины. Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$m\ddot{x}+c(x\pm\Delta)=0 \tag{2}$$

или

$$\ddot{x}+k^2(x\pm\Delta)=0,$$

где обозначено $c/m=k^2$. Полагаем $\dot{x}=y$. Тогда

$$\frac{dy}{dt}=-k^2(x\pm\Delta), \qquad \frac{dx}{dt}=y.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx}=-k^2\frac{x\pm\Delta}{y}$$

или, после интегрирования,

$$\frac{y^2}{k^2}+(x\pm\Delta)^2=C. \tag{3}$$

В этом интеграле знак плюс соответствует $\dot{x}=y>0$ и минус — $\dot{x}=y<0$.

Пусть в начальный момент при $t=0$ мы имеем $x=x_0>0$, $\dot{x}=y=0$. Сразу после начала движения $y=\dot{x}<0$ и в уравнении (3) нужно брать знак минус. Получим уравнение окружности с центром в точке N с координатами $x=\Delta$, $y=0$. При $x=x_1$ тело теряет скорость и затем оно двигается вверх ($\dot{x}=y>0$). В уравнении (3) нужно взять знак плюс. Получим уравнение окружности с центром в точке $M(-\Delta,\ 0)$. Точка x_1 симметрична x_0 относительно N, точка x_2 симметрична x_1 относительно M и т. д. Фазовая траектория представлена на рис, *б*, а зависимость перемещения от времени на рис. *в*.

3°. Дельта-метод. Одним из эффективных способов качественного исследования нелинейных систем с одной степенью свободы является дельта-метод, предложенный в 1952 г. Якобсеном*). Он позволяет приближенно построить фазовый портрет системы, не интегрируя ее дифференциального уравнения, которое часто связано с громоздкими вычислениями.

При построении фазовых траекторий будем исходить из общего дифференциального уравнения, описывающего движение неавтономной нелинейной системы, а именно

$$\ddot{x}+k^2x=f(x,\ \dot{x},\ t), \tag{6*}$$

где x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ — координата системы, ее первая и вторая производные соответственно, k — круговая частота, t — время, f — некоторая нелинейная функция своих аргументов. В частном случае автономной системы эта функция не зависит явно от t.

*) L. S. Jacobsen, On a General Method of Solving Second-order Ordinary Differential Equations by Phase-plane Displacements, J. Appl. Mechanics, vol. 19, N 4, 1952, 543—553.

Преобразуем исходное уравнение (6*) в «дельта-форму». Для этого введем безразмерное время $\tau = kt$ и соответствующую скорость $v = dx/d\tau$, имеющую ту же размерность, что и перемещение x. Тогда будем иметь

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = k\frac{dx}{d\tau} = kv \quad \text{и} \quad \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = k\frac{d(kv)}{d\tau} = k^2\frac{dv}{d\tau} = k^2\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{d\tau} = k^2 v\frac{dv}{dx}.$$

Уравнение (6*) теперь можно записать в виде

$$k^2 v\frac{dv}{dx} = f\left(x,\ kv,\ \frac{\tau}{k}\right) - k^2 x,$$

или

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}\left[\frac{f\left(x,\ kv,\ \frac{\tau}{k}\right)}{k^2} - x\right].$$

Величина

$$\delta = \delta(x,\ v,\ \tau) = -\frac{f\left(x,\ kv,\ \frac{\tau}{k}\right)}{k^2} \tag{7*}$$

называется дельта-функцией, откуда и происходит название самого метода.

Используя обозначение (7*), получим из предыдущего уравнения дифференциальное уравнение фазовых траекторий или дельта-форму уравнения (6*):

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\delta + x}{v}. \tag{8*}$$

Хотя δ является функцией трех аргументов, для малых приращений Δx, Δv, $\Delta\tau$ ее можно считать постоянной. Тогда уравнение (8*) сразу интегрируется разделением переменных, в результате чего получается уравнение фазовых траекторий в конечном виде

$$(x+\delta)^2 + v^2 = C^2, \tag{9*}$$

где C — произвольная постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.

На фазовой плоскости Oxv уравнение (9*) описывает семейство окружностей с центром в точке $Q_0(-\delta;\ 0)$. Таким образом, малые отрезки фазовой траектории могут быть приближенно заменены дугами окружностей с центром в указанной точке. С переходом от одной дуги окружности к следующей изменяются, вообще говоря, абсцисса ее центра и радиус. Однако непрерывность фазовой траектории при этом не нарушается, т. е. начало последующей дуги совпадает с концом предыдущей.

Построение начинается (рис. 20.10) с точки P_0, координаты которой $x_0 = x(0)$ и $v_0 = v(0)$ определяются начальными условиями при

$\tau_0=0$. По этим же данным находятся величина $\delta_0=\delta(x_0;\ v_0;\ \tau_0)$ и радиус $\rho_0=\sqrt{(x_0+\delta_0)^2+v_0^2}$. Впрочем, радиус не имеет смысла вычислять по формуле. Когда точка P_0 и центр окружности Q_0 построены, радиус замеряется циркулем как длина отрезка Q_0P_0. Из точки Q_0 как из центра радиусом $\rho_0=Q_0P_0$ проводится небольшая дуга P_0P_1 окружности в направлении против хода часовой стрелки, что соответствует возрастанию безразмерного времени τ. Длина дуги должна быть выбрана в некоторых оптимальных пределах, так как с ее уменьшением, с одной стороны, увеличивается точность, а с другой стороны, возрастает трудоемкость построения (подробнее об этом см. задачу 20.19).

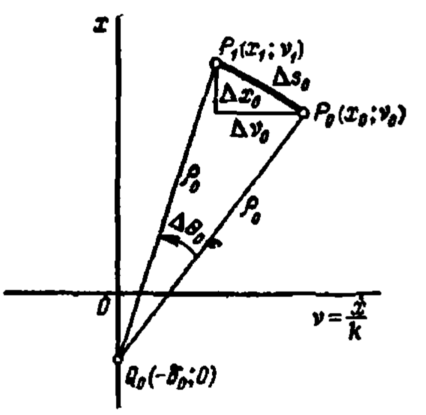


Рис. 20.10.

Чтобы найти абсциссу $(-\delta_1)$ центра следующей дуги окружности, надо снять с чертежа значения x_1 и v_1, а величину τ_1 найти по формуле

$$\tau_1=\tau_0+\Delta\tau_0=\Delta\theta_0 \qquad (\tau_0=0), \qquad (10^*)$$

где $\Delta\theta_0$ — радианная мера первой дуги P_0P_1, и воспользоваться формулой (7^*) для определения $\delta_1=\delta(x_1;\ v_1;\ \tau_1)$. Затем из центра $Q_1(-\delta_1;\ 0)$ радиусом $\rho_1=Q_1P_1$ проводится следующая дуга окружности и т. д.

Формула (10^*) нуждается в некоторых пояснениях. Из нее следует, что приращение безразмерного времени $\Delta\tau$ равно радианной мере соответствующей дуги $\Delta\theta$. Покажем это. Из соотношения $v=dx/d\tau$ следует

$$d\tau=\frac{dx}{v}. \qquad (11^*)$$

С другой стороны, из рассмотрения рис. 20.10, где малые конечные приращения величин могут быть заменены их дифференциалами, имеем

$$d\theta=\frac{ds}{\rho}=\frac{\sqrt{dx^2+dv^2}}{\sqrt{v^2+(x+\delta)^2}}=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}\,dx}{\sqrt{1+\left[\frac{(x+\delta)}{v}\right]^2}\,v}=\frac{dx}{v}. \qquad (12^*)$$

Последний переход в равенстве (12^*) основан на том обстоятельстве, что из уравнения (8^*) следует

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2=\left(\frac{\delta+x}{v}\right)^2.$$

Сравнивая выражения (11^*) и (12^*), получаем, что $d\tau=d\theta$ и, следовательно, $\Delta\tau=\Delta\theta$.

Таким образом, для любого шага построения фазовой траектории имеет место соотношение

$$\tau_{i+1}=\tau_i+\Delta\tau_i=\tau_i+\Delta\theta_i. \qquad (13^*)$$

Часто дельта-функция зависит только от одного аргумента x или v. (Если она зависит только от t, то уравнение (6*) является линейным).

Так, свободные колебания консервативной системы описываются уравнением

$$\ddot{x}+k^2x=f(x) \qquad (14^*)$$

и δ зависит только от x. С другой стороны, колебания диссипативной или автоколебательной (в зависимости от вида функции f) системы описываются уравнением

$$\ddot{x}+k^2x=f(\dot{x}) \qquad (15^*)$$

и δ зависит только от v.

В этих случаях полезно бывает построить графики функций $\delta=\delta(x)$ и $\delta=\delta(v)$. Эти дельта-кривые характеризуют тип системы и степень ее *нелинейности*. В частности, *для линейной системы* δ тождественно равно нулю.

Кроме того, если имеется дельта-кривая, то при построении фазовых траекторий системы можно брать необходимые значения δ непосредственно с чертежа, избегая соответствующих вычислений.

Задача 20.19. Построить фазовую траекторию для нелинейной колебательной системы с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости. Уравнение движения системы имеет вид

$$\ddot{x}+n|\dot{x}|\dot{x}+k^2x=0. \qquad (1)$$

Начальные условия принять равными

$$x_0=x(0)=5{,}00, \quad \dot{x}_0=\dot{x}(0)=0. \qquad (2)$$

Коэффициент $n=3/2x_0$. Исследовать влияние числа шагов (или длин дуг) на точность построения.

Решение. Сравнивая уравнения (1) и (6*), замечаем, что в данном случае

$$f(x,\ \dot{x},\ t)=-n|\dot{x}|\dot{x}$$

и, следовательно, по (7*)

$$\delta=\frac{n|\dot{x}|\dot{x}}{k^2}=n|v|v; \qquad (3)$$

отсюда видно, что сопротивление пропорционально δ. Дельта-кривая, определяемая уравнением (3), показана на рис. *а* сплошной линией.

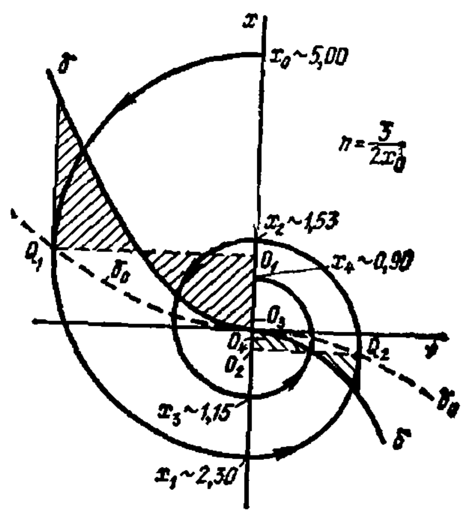
Следует заметить, что на этом и следующих рисунках отклонение x отложено по оси ординат, а пропорциональная скорости вели-

чина v — по оси абсцисс; изображающая точка в соответствии с этим движется против хода часовой стрелки.

Переходя к построению фазовой траектории, заметим, что максимально возможная длина дуги равна полуокружности, что соответствует одному размаху колебания. При такой большой длине дуги представляется разумным за величину δ принять не ее значение в начальной точке, а некоторое среднее значение, найденное с учетом изменения δ в пределах этой дуги. Среднее значение δ_0 величины δ при изменении аргумента от нуля до текущего значения v равно

$$\delta_0=\frac{1}{v}\int_0^v n|v|v\,dv=\frac{1}{3}n|v|v=\frac{1}{3}\delta. \tag{4}$$

График величины δ_0 показан на рис. *а* штриховой линией. Из формулы (4) следует, что площади заштрихованных криволинейных треугольников на этом рисунке равны.



К задаче 20.19, *а*.

Теперь нетрудно построить фазовую траекторию с помощью дуг максимальной длины, т. е. полуокружностей. Для этого с помощью циркуля отыскиваем после ряда попыток центр O_1 первой дуги так, чтобы отрезки O_1x_0 и O_1Q_1 были равны, и проводим дугу $x_0Q_1x_1$. Затем выбираем центр O_2 второй дуги так, чтобы выполнялось равенство $O_2x_1=O_2Q_2$, и строим вторую дугу $x_1Q_2x_2$ фазовой траектории. Продолжая этот процесс дальше, можно построить всю фазовую траекторию, которая представляет собой спиралевидную кривую, накручивающуюся на начало координат. (На рис. *а* построение доведено до точки x_4). Начало координат является здесь особой точкой типа устойчивого фокуса. Она соответствует состоянию устойчивого равновесия ($x=v=0$), к которому система стремится вернуться, будучи из него выведенной.

Рассмотрим теперь другие возможности усреднения величины δ. Работа силы сопротивления за один размах может быть найдена в предположении, что фазовая траектория есть полуокружность радиуса v_{max}. Сила сопротивления, как уже отмечалось, пропорциональна величине δ, а последняя при сделанном предположении равна

$$\delta=nv^2=nv_{max}^2\sin^2 kt,$$

Перемещение, отсчитываемое от крайнего положения, равно

$$\xi = v_{max}(1 - \cos kt),$$

откуда

$$d\xi = v_{max} \sin kt \, d(kt).$$

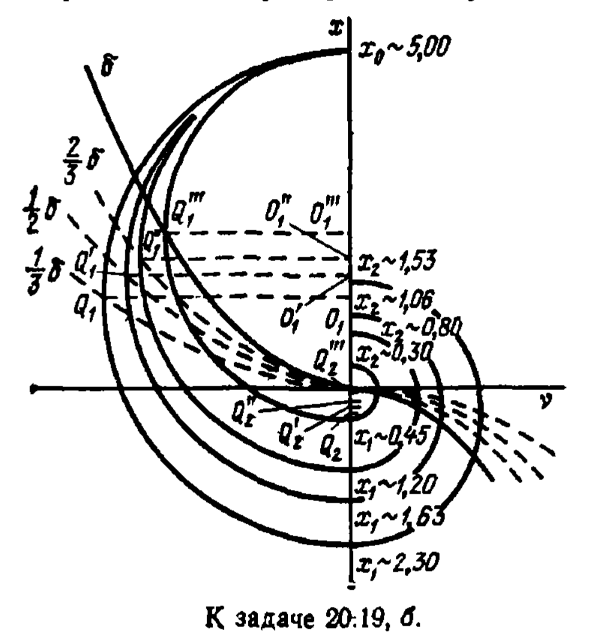
Следовательно, работа W_1 демпфирующей силы за один размах пропорциональна величине

$$\int_0^\pi \delta \, d\xi = n \cdot v_{max}^3 \int_0^\pi \sin^3 kt \, d(kt) = \frac{4}{3} n v_{max}^3,$$

т. е.

$$W_1 \sim \frac{4}{3} n v_{max}^3. \qquad (5)$$

Введем теперь в рассмотрение эквивалентную постоянную силу сопротивления, пропорциональную величине $\delta_{экв}$. Работа W_2, произведенная этой силой за один размах, пропорциональна величине



К задаче 20.19, *б*.

$$\delta_{экв} \int_0^\pi d\xi = \delta_{экв} v_{max} \int_0^\pi \sin kt \, d(kt) = 2\delta_{экв} v_{max},$$

т. е.

$$W_2 \sim 2\delta_{экв} v_{max}. \qquad (6)$$

Приравняв друг другу работы W_1 и W_2, или, что то же самое, правые части соотношений (5) и (6), находим

$$\delta_{экв} = \frac{2}{3} n v_{max}^2. \qquad (7)$$

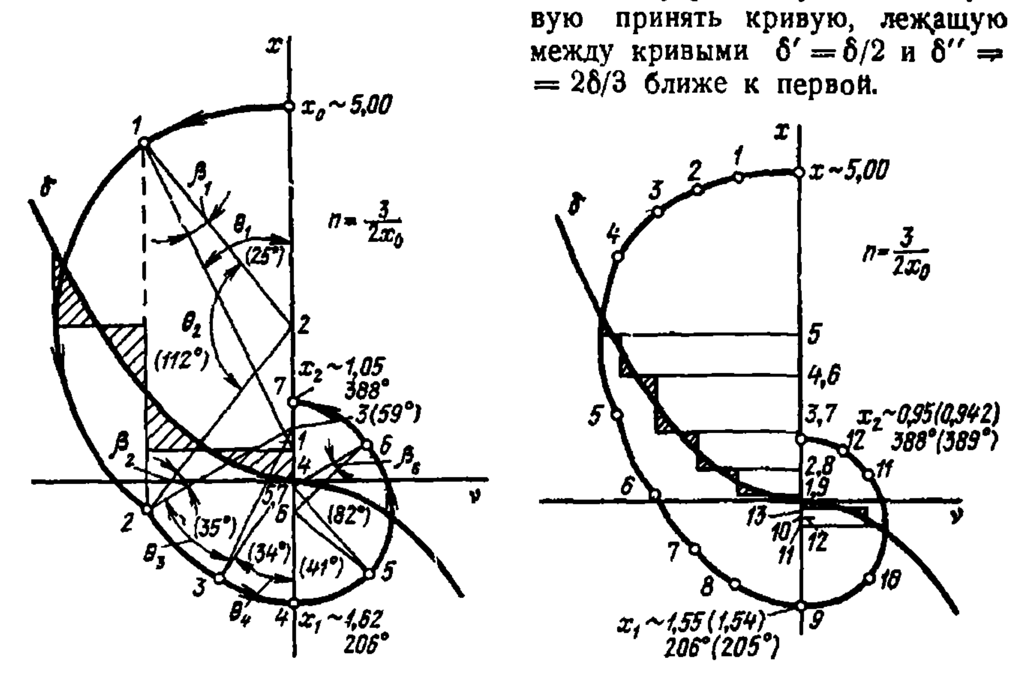
Сравнив полученное равенство с уравнениями (3) и (4), заключаем, что имеют место соотношения

$$\delta_{экв} = \frac{2}{3}\delta = 2\delta_0. \qquad (8)$$

Точность этих вычислений тем больше, чем ближе фазовая траектория для одного размаха к полуокружности.

На рис. *б* построены две первые полуокружности фазовой траектории при различных способах усреднения величины δ, а именно для среднего значения δ по отношению к v, когда $\delta_0 = \delta/3$; для произвольно взятого значения $\delta' = \delta/2$; для значения $\delta'' = 2\delta/3 = \delta_{экв}$ и, наконец, для максимального сопротивления, когда $\delta''' = \delta$.

Возникает вопрос, какая из этих кривых точнее. Ответ, вообще говоря, можно получить, построив фазовую траекторию с помощью большего числа шагов. Однако в данном конкретном случае известно точное (численное) решение задачи, которое дает $x_1 = 1{,}54$ и $x_2 = 0{,}94$. Следовательно, наибольшая точность при выбранном минимальном числе шагов достигается, если за усредненную дельта-кривую принять кривую, лежащую между кривыми $\delta' = \delta/2$ и $\delta'' = 2\delta/3$ ближе к первой.



К задаче 20.19, *в*, *г*.

Вообще решение с минимальным числом шагов, т. е. один шаг на размах, может дать удовлетворительные результаты только в том случае, если найден достаточно надежный способ усреднения величины δ. Кроме того, при таком решении длительность каждого размаха, определяемая углом θ, постоянна и равна π. Это противоречит хорошо известному факту, что при наличии сопротивления, пропорционального квадрату скорости, период колебаний уменьшается одновременно с уменьшением амплитуды, асимптотически приближаясь к величине $2\pi/k$.

На рис. *в* показана фазовая траектория, построенная с помощью четырех неравных шагов по оси v для первого размаха и трех шагов для второго размаха. Амплитуды x_1 и x_2 несколько больше соответствующих величин, полученных точным расчетом, а длительности первого размаха и первого колебания измеряются углами 206° и 388° соответственно. Следовательно, наличие квадратичного сопротивления увеличивает продолжительность первого размаха от величины π/k до

величины $206\pi/180k$, т. е. на 14%, тогда как увеличение продолжительности первого колебания (двух первых размахов) равно $\frac{388-360}{360}$, что составляет 8%.

Наконец, на рис. *г* дано построение фазовой траектории при девяти шагах для первого размаха и четырех шагах — для второго. Величина амплитуды $x_1 = 1{,}55$ при $\theta = 206°$ совпадает очень хорошо с точным значением, указанным в скобках, а значение $x_2 = 0{,}95$ также хорошо согласуется с точной величиной 0,942.

Резюмируя, заключаем, что точность построения фазовой траектории всегда может быть увеличена путем унеличения количества шагов. Однако степень точности данного конкретного построения в случае, если тоиное решение неизвестно, может быть оценена только «экспериментально» путем увеличения числа шагов. Кроме того, очевидно, что влияние длин дуг на точность построения не всюду на фазовой плоскости одинаково. При построении с более чем одним шагом за размах это влияние тем заметнее, чем больше излом траектории в точках сопряжения дуг. Так на рис. *в* этот излом, определяемый углами β_1, β_2 и т. д., примерно одного порядка во всех точках сопряжения (за исключением точки *4*), тогда как на рис. *г*) он более значителен в точках *4*, *5*, *6* и *11*.

Задача 20.20. Движение физического маятника описывается уравнением

$$\ddot{x} + k^2 \sin x = 0. \tag{1}$$

Построить фазовые траектории маятника для следующих начальных условий при $t = 0$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{а)}\ x_0 = 36° = 0{,}2\pi, & v_0 = 0; \\ \text{б)}\ x_0 = 90° = 0{,}5\pi, & v_0 = 0; \\ \text{в)}\ x_0 = 180° = \pi, & v_0 = 0; \\ \text{г)}\ x_0 = 0° = 0, & v_0 = \pm\frac{\dot{x}_0}{k}. \end{array}\right\} \tag{2}$$

В случае г) начальная скорость достаточно велика, чтобы обеспечить непрерывное вращение маятника.

Решение. Преобразуем данное в условии задачи уравнение к виду (1*):

$$\ddot{x} + k^2 x = k^2 (x - \sin x). \tag{3}$$

Поскольку в данном случае

$$f(x,\ \dot{x},\ t) = k^2 (x - \sin x),$$

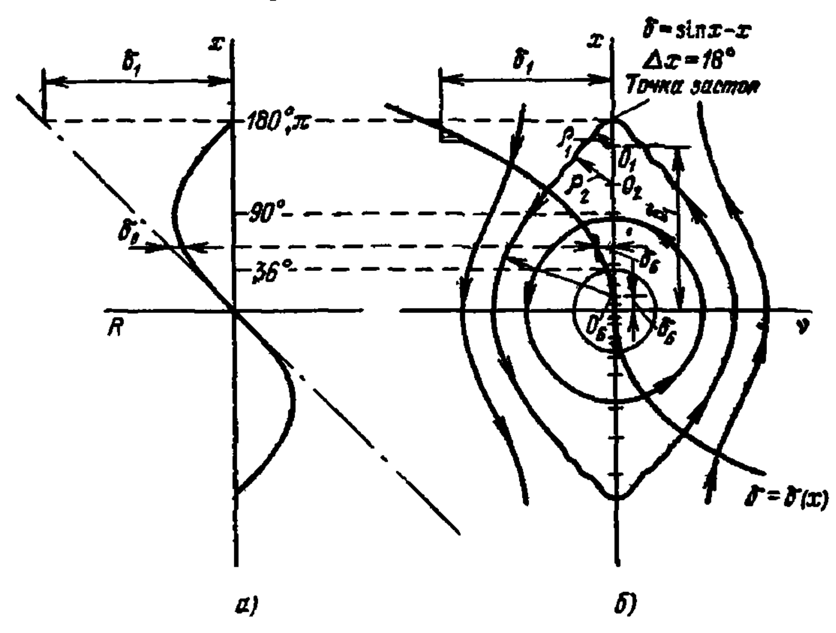
имеем по (2*)

$$\delta = \delta(x) = \sin x - x. \tag{4}$$

Дельта-кривая, построенная по этому уравнению, показана на рис. *б*. Там же построены фазовые траектории для всех заданных

в условии задачи случаев. На рис. *а* приведен график восстанавливающей силы R.

В случае а) отклонения маятника от положения равновесия невелики, величина δ очень близка к нулю, а фазовая траектория незначительно отличается от окружности с центром в начале координат — первая от центра кривая на рис. *б*).



К задаче 20.20.

В случае б) величина δ уже заметно отклоняется от нуля и фазовая траектория принимает форму овала, вытянутого вдоль оси x.

В случае в) фазовую траекторию строим путем разбиения участка $[-\pi, \pi]$ на оси x на 20 равных участков (по $0,1\pi$) и усреднения величины δ на каждом участке по формуле

$$\delta_{\text{ср}} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \delta(x)\, dx.$$

Так, для 1-го участка $0,9\pi \leqslant x \leqslant \pi$ имеем

$$\delta_1 = \frac{1}{0,9\pi - \pi} \int\limits_{\pi}^{0,9\pi} (\sin x - x)\, dx = -\frac{10}{\pi}\left[-\cos x - \frac{x^2}{2}\right]_{\pi}^{0,9\pi} = -2,83.$$

Следовательно, координаты центра O_1 первой дуги фазовой траектории равны $x_1 = -\delta_1 = 2,83$, $v_1 = 0$, а радиус $\rho_1 = x_0 - x_1 = \pi - 2,83 = 0,31$. По этим данным строим первую дугу в интервале $(0,9\pi;\ \pi)$ по оси x.

Аналогично находим для 2-го участка $0,8\pi \leqslant x \leqslant 0,9\pi$

$$\delta_2 = \frac{1}{0,8\pi - 0,9\pi} \int\limits_{0,9\pi}^{0,8\pi} (\sin x - x)\, dx = -\frac{10}{\pi} \left[-\cos x - \frac{x^2}{2} \right]_{0,9\pi}^{0,8\pi} = -2,22.$$

Таким образом, центр O_2 второй дуги фазовой траектории имеет координаты $x_2 = -\delta_2 = 2,22$, $v_2 = 0$. Радиус второй дуги ρ_2 проще всего найти, измерив расстояние от точки O_2 до конца первой дуги. Проделав это, проводим вторую точку в интервале $(0,8\pi;\ 0,9\pi)$ по оси x.

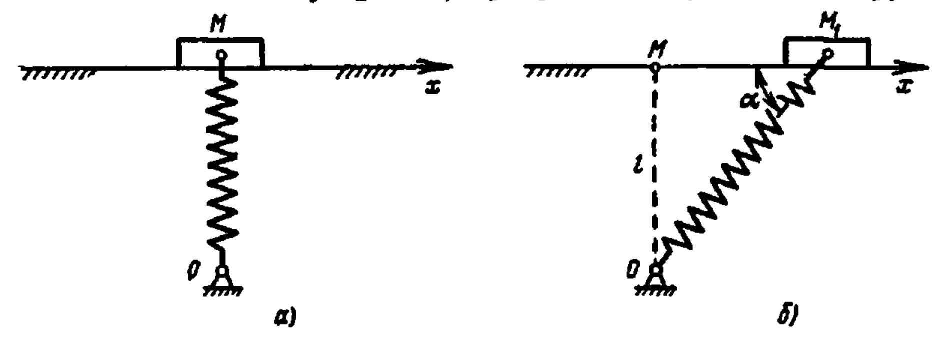
Продолжая так же дальше, строим всю фазовую траекторию, учитывая при этом, что она симметрична относительно обеих координатных осей. Траектория еще более сильно, чем в случае б), вытянута вдоль оси x. Заметим, что вблизи точек $x = \pm\pi$ траектория имеет заведомо неправильную форму. Это видно из того, что при стремлении x к $\pm\pi$ величина δ стремится к $-x$, и, следовательно, радиус фазовой траектории стремится к нулю, так как в этих точках $v = 0$.

Однако эта неточность построения мало сказывается в точках, достаточно удаленных от указанных, например в точках пересечения траектории с осью v, которые определяют максимальную скорость колебания v_{max}, равную в данном случае 2.

Любая фазовая траектория, лежащая внутри траектории для случая в), представляет собой замкнутую кривую, окружающую начало координат. Для всех таких траекторий начало координат является особой точкой типа центра.

Наконец, в случае г) фазовые траектории представляют собой незамкнутые бесконечные кривые, вытянутые вдоль оси x. Маятник не колеблется, а вращается вокруг точки подвеса с переменной угловой скоростью, положительной или отрицательной.

Задача 20.21. Тело M массы m лежит на горизонтальной гладкой плоскости. К телу (рис. *а*) прикреплена вертикальная пружина



К задаче 20.21, *а, б.*

$OM = l$, коэффициент жесткости которой равен c. В исходном, вертикальном положении пружина не натянута.

Составить дифференциальное уравнение малых колебаний тела вдоль горизонтальной прямой x. Построить фазовый портрет динамической системы.

Решение. В произвольном положении M_1 (рис. б), на тело действует восстанавливающая сила пружины F, пропорциональная удлинению пружины, направленная от M_1 к O. Обозначив координату точки M_1 через x, $MM_1 = x$, находим модуль силы F

$$F = c\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l\right). \tag{1}$$

Разложив корень в ряд

$$\sqrt{l^2 + x^2} = l\sqrt{1 + \left(\frac{x}{l}\right)^2} \approx l\left(1 + \frac{x^2}{2l^2} + \ldots\right)$$

и ограничившись первыми двумя членами ряда, находим

$$F = c\left[l\left(1 + \frac{x^2}{2l^2}\right) - l\right] = \frac{c}{2}\frac{x^2}{l}. \tag{2}$$

Следовательно, при малых отклонениях тела от вертикального положения равновесия сила F пропорциональна квадрату отклонения.

Переходим к определению проекции силы F на ось x. Заметив, что

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = \frac{x}{l}\left(1 + \frac{x^2}{l^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{x}{l},$$

находим

$$F_x = F\cos\alpha \approx \frac{c}{2l^2}x^3$$

Дифференциальное уравнение малых колебаний будет

$$m\ddot{x} = -\frac{c}{2l^2}x^3,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{c}{2ml^2}x^3 = 0.$$

Обозначив для краткости $c/2ml^2 = \beta$, получим

$$\ddot{x} + \beta x^3 = 0. \tag{3}$$

Таким образом, восстанавливающая сила в данном случае при малых отклонениях тела от равновесного положения пропорциональна кубу отклонения тела.

Переходим к построению фазового портрета системы. Переписываем уравнение (3) в форме

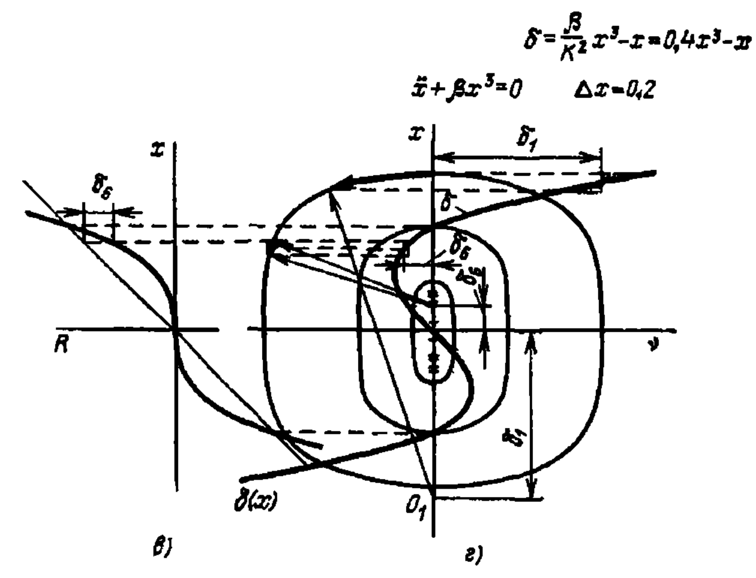
$$\ddot{x} + k^2 x = k^2 x - \beta x^3, \tag{4}$$

откуда находим

$$\delta = \delta(x) = \frac{\beta}{k^2}x^3 - x. \tag{5}$$

Из уравнения (5) следует, что δ равно нулю при $x = \pm k/\sqrt{\beta}$. Это означает, что в соответствующих точках центр дуги окружности, аппроксимирующий фазовую траекторию, лежит в начале координат.

На рис. *в* приведен график восстанавливающей силы — кубическая парабола, а на рис. *г* показаны дельта-кривая и фазовые траектории для трех энергетических уровней (начальных координат и скоростей), причем принято $\beta/k^2 = 0{,}4$. Фазовые траектории построены с помощью равных шагов ($\Delta x = 0{,}2$) по оси x.



К задаче 20.21, *в*, *г*.

На рисунке подробно показаны первый и шестой шаги для самой большой фазовой траектории.

При малых перемещениях и скоростях фазовые траектории имеют форму сильно вытянутых вдоль оси x небольших овалов с центром в начале координат. С возрастанием энергетических уровней траектории приближаются к прямоугольнику, короткая сторона которого параллельна оси x, а центр совпадает с началом координат. Начало координат является здесь особой точкой типа центра, однако движение фазовой точки около него происходит не по окружности.

Заметим, что задача может быть решена точно. Действительно, уравнение (3) можно записать в виде системы

$$\frac{dy}{dt} = -\beta x^3, \tag{6}$$

$$\frac{dx}{dt} = y. \tag{7}$$

Разделив (6) на (7), найдем

$$\frac{dy}{dx} = -\beta\frac{x^3}{y}. \tag{8}$$

Отделив переменные и проинтегрировав, получим точное уравнение фазовой траектории

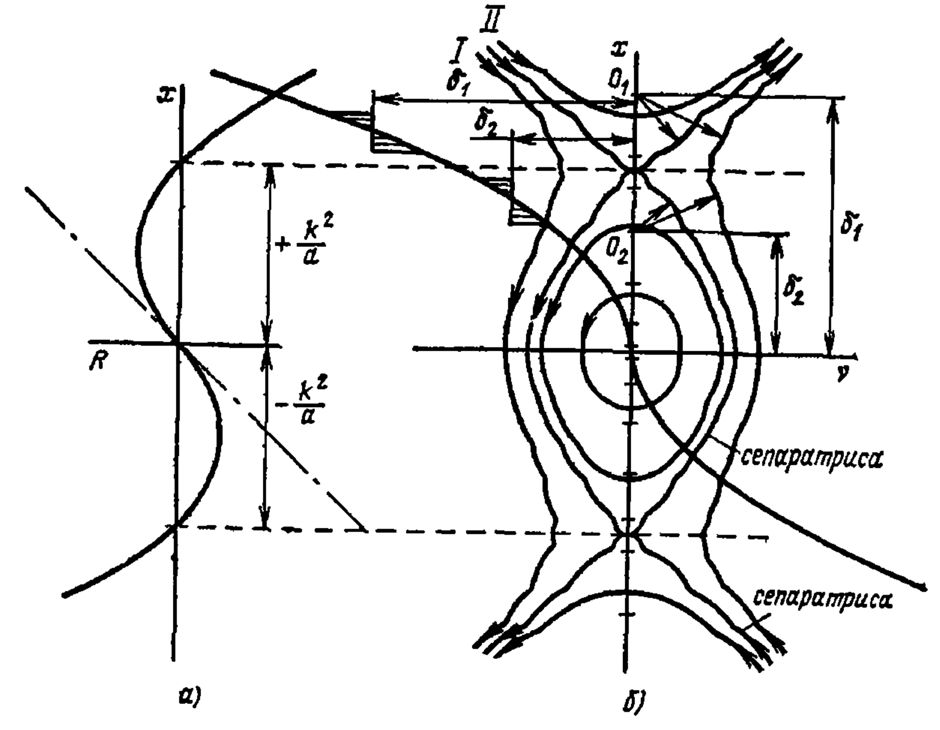
$$y^2+\beta\frac{x^4}{2}=C, \tag{9}$$

которое позволяет при сопоставлении его с приближенным решением оценить точность дельта-метода.

Задача 20.22. Построить фазовый портрет нелинейной колебательной системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x}+k^2x-a|x|x=0. \tag{1}$$

Решение. График восстанавливающей силы приведен слева на рис. *а*. Эта сила положительна при $x<-k^2/a$ и $0<x<k^2/a$ и



К задаче 20.22.

отрицательна в интервале $-k^2/a<x<0$ и при $x>k^2/a$. Следовательно, система может быть неустойчивой. Величина δ в данном случае определяется уравнением

$$\delta=\frac{1}{k^2}(k^2x-a|x|x-k^2x)=-\frac{a}{k^2}|x|x. \tag{2}$$

Соответствующая дельта-кривая показана на рис. *б*. На том же рисунке имеется и фазовый портрет системы. Он построен с помощью

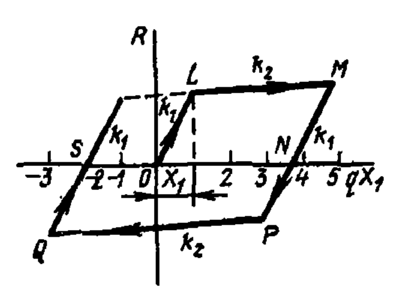
малых и не равных между собой шагов Δx, так чтобы яснее была видна изломанность приближенных фазовых траекторий.

Характерными точками на фазовой плоскости являются точки $x = \pm k^2/a$, $v = 0$. Они могут быть названы «точками застоя», так как в них фазовая точка становится неподвижной и, следовательно, графическое определение времени невозможно. Однако даже выполненное довольно грубое геометрическое построение доставляет весьма точную информацию о внутренних свойствах системы. Фазовая траектория, проходящая через упомянутые точки застоя, называется *сепаратрисой*. Она не только отделяет внутреннюю область — область замкнутых фазовых траекторий — от внешней — области незамкнутых траекторий, — но и разделяет эту последнюю область. Так, например, если движение системы начинается из точки *I* фазовой плоскости, то фазовая траектория уходит в бесконечность в третьем квадранте, а если исходной точкой служит точка *II*, то фазовая траектория удаляется в бесконечность в первом квадранте. Точки *I* и *II* лежат по разные стороны от сепаратрисы.

Внутренняя замкнутая часть сепаратрисы отделяет область устойчивых колебаний — внутреннюю область — от области неустойчивого движения — внешней области.

Время, как и всегда при фазовых представлениях, определяется углами, стягиваемыми дугами окружностей, т. е. $\Delta t = \Delta\theta/k$. Это обстоятельство указывает на то, что радиусы дуг должны быть конечными.

Задача 20.23. Построить фазовую характеристику системы, восстанавливающая сила которой дается графиком, приведенным на рис. *а*, если к системе внезапно приложена постоянная возмущающая сила F.



К задаче 20.23, *а*.

Решение. График на рис. *а* изображает петлю гистерезиса. Такую характеристику имеет любой упругий элемент, в котором в процессе колебаний достигается предел упругости материала и, следовательно, имеют место пластические деформации.

При перемещении системы из начала координат в направлении оси x с положительной скоростью восстанавливающая сила достигает предела упругости в точке L при $x = X_1$, затем линейно возрастает с угловым коэффициентом c_2 до точки M при $x = 5X_1$. В этой точке система останавливается, скорость изменяет знак, и восстанавливающая сила затем линейно убывает вдоль прямой MP. Если движение заканчивается в какой-либо точке этой прямой и внешняя сила устраняется, то возникает остаточное перемещение QN и теряется внутренняя работа гистерезиса, пропорциональная площади $OLMN$. Если движение не заканчивается на отрезке MP, а продолжается с отрицательной скоростью, новый предел упругости

достигается в точке P, причем $MP = -2OL$. Дальнейшее движение влево переводит систему в точку Q, где происходит вторичная остановка. Если внешнюю силу устранить в этой точке, то система будет колебаться с собственной частотой между точками $-3X_1$ и $-X_1$, причем в конце концов придет к состоянию покоя в точке S. Остаточным перемещением будет тогда OS и дополнительное количество потерянной работы гистерезиса будет пропорционально площади $NPQS$.

Гистерезисная диаграмма, изображенная на рис. *а*, сильно упрощена. На практике пределы упругости не так четко выражены и угловые коэффициенты c_2 обычно не постоянны. Кроме того, наклоны линий PM и QS часто больше, чем c_1 благодаря наклепу материала и длина отрезка MP не всегда равна $2OL$. Следует отметить, что все эти отступления от идеализированной гистерезисной диаграммы могут быть учтены при использовании дельта-метода и вызовут только простые изменения дельта-кривой.

Представленная на рис. *а* зависимость восстанавливающей силы от перемещения является кусочно-линейной. Колебания такой системы, вызванные внезапно приложенной постоянной силой, могут быть исследованы аналитически. Однако при большом числе линейных участков на диаграмме зависимости восстанавливающей силы от перемещения (на рис. *а* пять участков) аналитическое исследование громоздко, и целесообразнее провести построение фазового портрета системы при помощи дельта-метода.

В случае свободных гармонических колебаний дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + k_1^2 x = 0, \quad \text{где } k_1^2 = \frac{c_1}{m}. \tag{1}$$

Уравнение линейно, и для него $\delta = 0$. Для того чтобы использовать и в этом случае δ-метод, введем в уравнение (1) произвольный новый параметр $k_2^2 = c_2/m$, не равный k_1, где c_2 — коэффициент жесткости некоторой фиктивной пружины. Сделаем это следующим образом. Запишем (1) в виде

$$\ddot{x} + k_1^2 x + k_2^2 x - k_2^2 x = 0 \tag{2}$$

или

$$\ddot{x} + k_2^2 (x + \delta) = 0, \tag{3}$$

где обозначено

$$\delta = \left(\frac{k_1^2}{k_2^2} - 1\right) x = \left(\frac{c_1}{c_2} - 1\right) x. \tag{4}$$

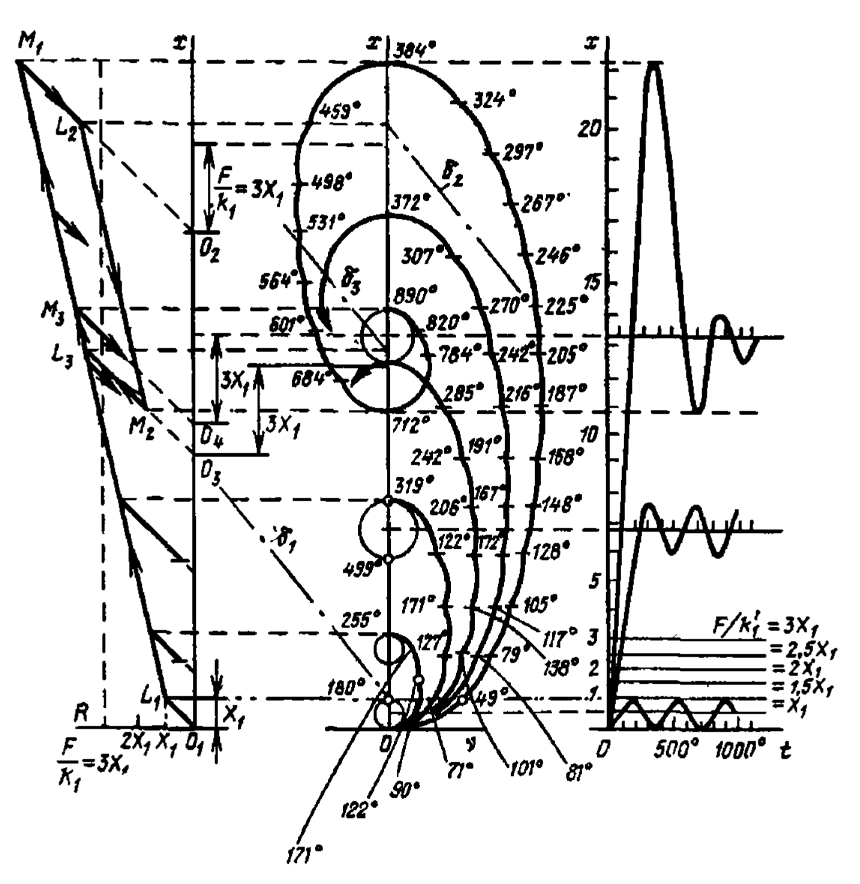
Применяя этот способ к рассматриваемой билинейной задаче, выберем c_1 и c_2 из диаграммы, представленной на рис. *а*.

Семейство фазовых кривых для шести различных значений величины F/c_1 построено с помощью дельта-метода на рис. *в* при значении $c_1/c_2 = 4{,}8$. На рис. *б* приведена диаграмма восстанавливающей силы. Четыре из фазовых траекторий доведены до конечной конфигурации. Шаги построения фазовых траекторий изменяются от вели-

чины, меньшей чем X_1, до величины $5/3X_1$; углы в градусах указаны на концах каждого шага. Дельта-кривые представляют собой прямые линии с угловым коэффициентом

$$1-\frac{c_2}{c_1}=1-\frac{1}{4,8}=0,79.$$

Рассмотрим подробнее фазовую кривую, соответствующую наибольшему значению $F/c_1=3X_1$. Вначале движение гармоническое вплоть



К задаче 20.23, *б*, *в*, *г*.

до смещения X_1, что соответствует углу $\theta_1=49°$. В этой точке достигается предел упругости и начинается эллиптическая фазовая траектория, протекающая в пластической области фазовой плоскости, где угловой коэффициент восстанавливающей силы равен c_2. Далее фазовая траектория аппроксимируется тринадцатью дугами окружностей с использованием кривой δ_1. Она дает максимальное смещение $x=22,3X_1$ в момент времени, определяемый углом 384°. Это соответствует точке M_1 на диаграмме восстанавливающей силы, которая дает силу, в 5,6 раза превышающую предел упругости.

Возвратное движение происходит вдоль силовой линии M_1L_2, центр дуги окружности на фазовой плоскости находится путем продолжения этой линии до пересечения с осью x в точке O_2 и добавления смещения $3X_1$, вызванного возмущающей силой. В точке L_2 угол равен 459° и система опять входит в пластическую область c_2. Это означает, что должна быть построена кривая δ_2, как показано на рисунке. С помощью этой кривой построена эллиптическая траектория, аппроксимированная шестью дугами окружностей. В конце ее смещение составляет примерно $10{,}6X_1$ в момент времени, соответствующий углу 712°. Восстанавливающая сила, определяемая линией L_2M_2, убывает до величины, примерно равной 1,5 предела упругости или половины величины F.

Затем опять начинается движение в сторону увеличения координаты x, при котором восстанавливающая сила определяется линией M_2L_3. Центр соответствующей дуги траектории, как и прежде, находим путем продолжения прямой M_2L_3 до точки O_3 и добавления смещения $3X_1$, вызываемого возмущающей силой. В точке L_3 система в третий раз входит в пластическую область c_2, где эллиптическая траектория аппроксимируется двумя дугами окружностей между углами 784° и 890° с использованием кривой δ_3. В конце этой траектории восстанавливающая сила определяется точкой M_3.

Дальнейшее движение системы представляет собой свободное колебание, при котором зависимость восстанавливающей силы от перемещения дается линией M_3O_4. Центр соответствующей окружности на фазовой плоскости определяется, как и ранее, и расположен в точке $x \approx 13{,}2X_1$. Эта точка определяет остаточную деформацию упругого элемента системы.

На рис. *г* построены графики зависимости перемещения от времени, поясняющие характер движения системы. Из их рассмотрения видно, что внезапно приложенная возмущающая сила, величина которой равна трехкратному пределу упругости, вызывает вначале максимальное перемещение, в 22,3 раза большее смещения, соответствующего пределу упругости, и в конце концов приводит систему к колебаниям с частотой c_1 около точки, соответствующей остаточному смещению, равному $13{,}2X_1$.

В задачах этого пункта даны основные результаты Якобсена, автора дельта-метода.

§ 6. Автоколебания

1°. Примеры автоколебательных систем. Известно, что свободные линейные колебания при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, затухают. Для того чтобы колебания не затухали, они должны быть вынужденными, т. е. должна также действовать возмущающая сила. Но существуют нелинейные системы, которые при отсутствии возмущающей силы могут колебаться, не затухая.

Напомним, что свободные линейные колебания, происходящие при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$$

и в случае $n<k$ затухают по закону

$$x=ae^{-nt}\cdot\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}t+\alpha\right),\qquad \text{где } n>0.$$

Если параметр n был бы отрицательным, то колебания не затухали бы, а неограниченно возрастали.

Рассмотрим случай, когда при силе сопротивления, изменяющейся по нелинейному закону, дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+\gamma\dot{x}^3+k^2x=0,$$

т. е.

$$\ddot{x}+(2n+\gamma\dot{x}^2)\,\dot{x}+k^2x=0, \tag{1*}$$

где $n<0$, а $\gamma>0$.

Нетрудно видеть, что при малых значениях $\dot{x}$ коэффициент, стоящий в скобке при $\dot{x}$, отрицателен, т. е. колебания возрастают, а при больших значениях $\dot{x}$ этот коэффициент положителен и, значит, колебания затухают. В итоге амплитуда изменяется до некоторого предела и затем сохраняет постоянное значение, не зависящее от начальных условий движения. Возникают устойчивые, не зависящие от начальных условий периодические незатухающие свободные колебания, которые называются *автоколебаниями*.

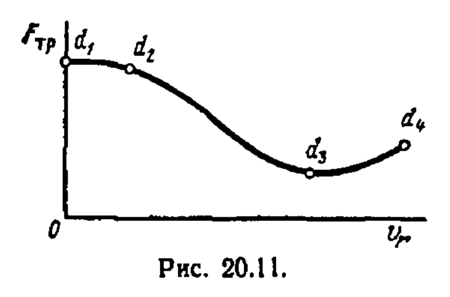


Рис. 20.11.

Так, автоколебания появляются в случаях, когда модуль силы трения $F_{тр}$ изменяется в зависимости от модуля относительной скорости v_r скольжения одного тела по отношению к другому. На рис. 20.11 изображена нелинейная характеристика изменения модуля силы трения $F_{тр}$ в зависимости от величины относительной скорости v_r скольжения одного тела по отношению к другому. При малых скоростях скольжения (участок d_1d_2) сила трения примерно постоянна, затем с увеличением скорости (нисходящая ветвь d_2d_3) сила трения уменьшается, но при последующем увеличении скорости (восходящая ветвь d_3d_4) сила трения возрастает.

Если колебания происходят со скоростями, соответствующими нисходящей ветви d_2d_3, то с уменьшением силы трения скорость движения и, значит, амплитуда колебаний увеличиваются. Однако при этом скорость попадает в зону, соответствующую восходящей ветви d_3d_4, и сила трения начинает возрастать. Это в свою очередь ведет к уменьшению амплитуды колебаний. Так происходит процесс

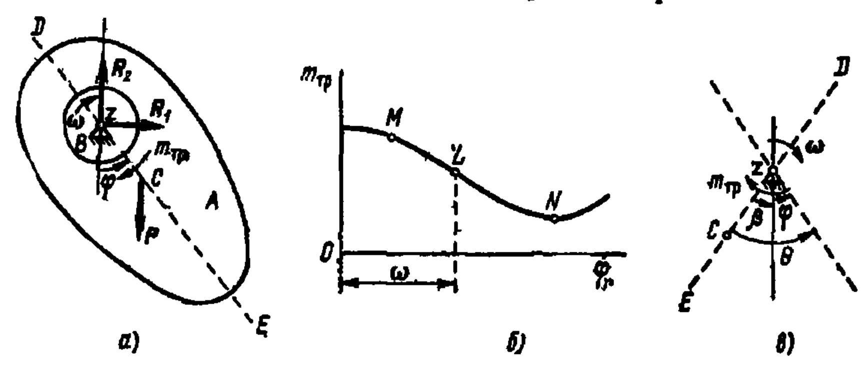
установления колебаний и появляется установившийся режим автоколебаний, не зависящий от начальных условий движения.

Системы, в которых происходят автоколебания, называются *автоколебательными*. Эти системы имеют широкое распространение в различных областях техники. Так, автоколебания возникают в электрических генераторах, в системах автоматического регулирования, в металлорежущих станках при снятии резцом стружки. При движении смычка по струне появляется сила трения, вызывающая автоколебания и звучание струны. Сердечно-сосудистая система также является автоколебательной: движение крови в сосудах вызывает поперечные колебания их стенок, которые в свою очередь способствуют движению крови в сосудах.

При решении задач на автоколебания можно пользоваться изложенными выше приближенными методами интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений. Так, в п. 2° показано применение аналитических методов, а в п. 3° — графического метода на фазовой плоскости.

2°. Исследование автоколебаний аналитическими методами.

Задача 20.24. На рис. *а* изображен физический маятник A веса P, насаженный на вал B, который вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси z. При этом между валом B и маятником A возникает момент силы трения $m_{тр}$.



К задаче 20.24.

На рис. *б* приведена характеристика изменения момента силы трения $m_{тр}$ в зависимости от $\dot\varphi_r$ — относительной угловой скорости вращения маятника по отношению к валу (см. описание соответствующей характеристики в п. 1°). Значению постоянной угловой скорости ω вала соответствует точка перегиба L на нисходящей ветви MN характеристики. Этой ветви соответствует уравнение $m_{тр} = f(\dot\varphi_r)$.

Найти уравнение установления автоколебаний маятника, а также амплитуду его установившихся автоколебаний, если I_z — момент инерции маятника относительно оси вращения z; l — расстояние от точки привеса до центра тяжести C маятника.

В начальный момент маятник находился в покое и был отклонен от вертикали на угол φ_0. Радиусом вала пренебречь.

Решение. Положение маятника определяется углом поворота φ, отсчитываемым от вертикали. Проекция его угловой скорости на ось z равна $\dot\varphi$. Разложим вращение маятника на переносное вращательное вместе с валом с угловой скоростью ω и относительное по отношению к валу с угловой скоростью ω_r. Так как $\omega_{az}=\omega_{ez}+\omega_{rz}$, то $\omega_{rz}=\omega_{az}-\omega_{ez}$. В данном случае $\omega_{rz}=\dot\varphi_r$, $\omega_{az}=\dot\varphi$, $\omega_{ez}=-\omega$. Поэтому получим

$$\dot\varphi_r=\dot\varphi+\omega. \qquad (1)$$

Использовав формулу (1), разложим момент трения $m_{\text{тр}}=f(\dot\varphi_r)$ в ряд Тейлора по степеням $\dot\varphi$:

$$m_{\text{тр}}=f(\dot\varphi_r)=f(\omega+\dot\varphi)=f(\omega)+f'(\omega)\dot\varphi+\frac{1}{2}f''(\omega)\dot\varphi^2+\\+\frac{1}{6}f'''(\omega)\dot\varphi^3+\ldots \qquad (2)$$

Здесь штрихами обозначены производные по $\dot\varphi$.

По условию величина постоянной угловой скорости ω соответствует точке перегиба L на ветви MN характеристики момента трения (см. рис. б) $m_{\text{тр}}=f(\dot\varphi_r)$. Как известно, в точке перегиба

$$f''(\omega)=0. \qquad (3)$$

Учтя, что ветвь MN является нисходящей, имеем

$$f'(\omega)<0,\ f'''(\omega)>0. \qquad (4)$$

Приняв во внимание равенство (3) и ограничившись в вычислениях членами разложения, содержащими $\dot\varphi$ в третьей степени включительно, запишем формулу (2) в виде

$$m_{\text{тр}}=f(\omega)+f'(\omega)\dot\varphi+\frac{1}{6}f'''(\omega)\dot\varphi^3. \qquad (5)$$

Перейдем к составлению дифференциального уравнения вращения маятника вокруг неподвижной оси z. При отклонении маятника в сторону возрастания угла поворота φ к маятнику со стороны вала приложен момент трения $m_{\text{тр}}$ в направлении хода часовой стрелки (см. рис. а). Дифференциальное уравнение вращения имеет вид

$$I_z\ddot\varphi=m_z(P)+m_z(R_1)+m_z(R_2)+m_{\text{тр}z}.$$

Приняв во внимание, что $m_z(P)=-Pl\sin\varphi$, $m_z(R_1)=m_z(R_2)=0$, $m_{\text{тр}z}=-m_{\text{тр}}$, использовав формулу (5), а также приближенно приняв $\sin\varphi\approx\varphi$, запишем:

$$I_z\ddot\varphi=-Pl\varphi-f(\omega)-f'(\omega)\dot\varphi-\frac{1}{6}f'''(\omega)\dot\varphi^3. \qquad (6)$$

На рис. *в* изображено положение статического равновесия оси DE маятника при вращающемся вале в направлении хода часовой стрелки с угловой скоростью ω. В этом положении маятник отклонен на угол β. Итак, при $\dot{\varphi}=0$ и $\ddot{\varphi}=0$ имеем $\varphi=-\beta$. Подставив эти значения в формулу (6), найдем условие статического равновесия

$$Pl\beta - f(\omega) = 0. \tag{7}$$

Перейдем к отсчету угла поворота θ маятника от положения статического равновесия. Воспользовавшись рис. *в*, имеем

$$\varphi = \theta - \beta \tag{8}$$

и, следовательно,

$$\dot{\varphi} = \dot{\theta}, \qquad \ddot{\varphi} = \ddot{\theta}. \tag{9}$$

Внеся соотношения (8) и (9) в уравнение (6), найдем

$$I_z\ddot{\theta} = -Pl\theta + Pl\beta - f(\omega) - f'(\omega)\dot{\theta} - \frac{1}{6}f'''(\omega)\dot{\theta}^3. \tag{10}$$

Использовав условие (7), запишем уравнение (10) в виде

$$\ddot{\theta} + (2n_1 + n_3\dot{\theta}^2)\dot{\theta} + k^2\theta = 0, \tag{11}$$

где обозначено

$$k^2 = \frac{Pl}{I_z}, \quad 2n_1 = \frac{f'(\omega)}{I_z}, \quad n_3 = \frac{1}{6}\frac{f'''(\omega)}{I_z}. \tag{12}$$

Приняв во внимание неравенства (4), найдем

$$n_1 < 0, \quad n_3 > 0. \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (10) и уравнение (1*), приведенное в обзоре теории, тождественны. Следовательно, маятник совершает автоколебания.

Запишем уравнение (11) в виде

$$\ddot{\theta} + k^2\theta = -2n_1\dot{\theta} - n_3\dot{\theta}^3. \tag{14}$$

Аналогичное уравнение [1] в задаче 20.6 было проинтегрировано методом эквивалентной линеаризации. Различие между этими уравнениями заключается лишь в том, что в задаче 20.6 было $n_1 > 0$, а в данном случае $n_1 < 0$.

Подобно формулам (3) задачи 20.6, будем искать θ и $\dot{\theta}$ в виде

$$\theta = a\sin\varphi, \qquad \dot{\theta} = a\omega\cos\varphi. \tag{15}$$

Не повторяя решения задачи 20.6, используем ее уравнения [8] и [9]:

$$\dot{a} = -\left(n_1 + \frac{3}{8}n_3a^2k^2\right) = a, \tag{16}$$

$$\dot{\psi} = k. \tag{17}$$

Из дифференциального уравнения (17) следует

$$\psi = kt + C_1, \tag{18}$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Напомним, что в задаче 20.6 имело место $n_1 > 0$, $n_3 > 0$. В данном случае $n_1 < 0$, $n_3 > 0$ (см. (13)). Поэтому интегрирование уравнения (16) дает отличный от решения уравнения [8] результат.

Разделив в дифференциальном уравнении (16) переменные, запишем

$$\frac{da}{a\left(1 + \frac{3}{8}\frac{n_3}{n_1}a^2k^2\right)} = -n_1\,dt. \tag{19}$$

Введя обозначения

$$-n_1 = \nu > 0, \qquad \lambda^2 = \frac{3}{8}\frac{n_3}{\nu}a^2 k^2, \tag{20}$$

представим уравнение (19) в виде

$$\frac{da}{a(1-\lambda^2a^2)} = \nu\,dt. \tag{21}$$

Приняв во внимание при интегрировании уравнения (21), что

$$\frac{1}{a(1-\lambda^2a^2)} = \frac{1}{a} + \frac{\lambda}{2(1-\lambda a)} - \frac{\lambda}{2(1+\lambda a)},$$

найдем

$$\frac{C_2 a}{\sqrt{1-\lambda^2a^2}} = e^{\nu t}.$$

Решив это уравнение относительно a, получим

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + C_2^2e^{-2\nu t}}}. \tag{22}$$

Внесем результаты (18) и (22) в уравнения (15):

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + C_2^2e^{-2\nu t}}}\sin(kt + C_1),$$
$$\dot\theta = \frac{k}{\sqrt{\lambda^2 + C_2^2e^{-2\nu t}}}\cos(kt + C_1). \tag{23}$$

Во втором уравнении (23) учтена вторая формула [7] задачи 20.6: $\omega = k$.

Согласно условию задачи при $t = 0$ имеем $\varphi = \varphi_0$, $\dot\varphi = 0$. Использовав (8) и (9), запишем эти начальные условия движения в виде: при $t = 0$ имеем $\theta = \varphi_0 + \beta$, $\dot\theta = 0$. Подстановка их в (23) приводит к системе уравнений

$$\varphi_0 + \beta = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + C_2^2}}\sin C_1, \qquad 0 = \frac{k}{\sqrt{\lambda^2 + C_2^2}}\cos C_1.$$

Решив эту систему, найдем

$$C_2^2=\frac{1-\lambda^2(\varphi_0+\beta)^2}{(\varphi_0+\beta)^2},\quad C_1=\frac{\pi}{2}. \tag{24}$$

После подстановки значений (24) в первое уравнение (23), учтя, что $\theta=\varphi+\beta$, получим

$$\varphi=\frac{\varphi_0+\beta}{\sqrt{\lambda^2(\varphi_0+\beta)^2+[1-\lambda^2(\varphi_0+\beta)^2]e^{-2\nu t}}}\cos kt-\beta, \tag{25}$$

где, согласно формуле (7), $\beta=f(\omega)/Pl$.

Уравнение (25) описывает искомый режим установления автоколебаний маятника. Эти колебания, вызванные моментом силы трения между валом и маятником, происходят с постоянной круговой частотой k и переменной «амплитудой»

$$a(t)=\frac{\varphi_0+\beta}{\sqrt{\lambda^2(\varphi_0+\beta)^2+[1-\lambda^2(\varphi_0+\beta)^2]e^{-2\nu t}}}.$$

С течением времени $a(t)$ увеличивается и стремится к пределу, равному

$$\lim_{t\to\infty}a(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi_0+\beta}{\sqrt{\lambda^2(\varphi_0+\beta)^2+[1-\lambda^2(\varphi_0+\beta)^2]e^{-2\nu t}}}=\frac{1}{\lambda}.$$

Учтя выражение (20) для λ^2, получим

$$a=\lim_{t\to\infty}a(t)=\frac{2}{k}\sqrt{\frac{2\nu}{3n_3}}, \tag{26}$$

где

$$k=\sqrt{\frac{Pl}{I_z}},\quad \nu=-n_1=-\frac{f'(\omega)}{2I_z},\quad n_3=\frac{1}{6}\frac{f'''(\omega)}{I_z}.$$

Итак, процесс установления приводит к автоколебаниям с постоянной угловой амплитудой (26), не зависящей от φ_0 — начального положения маятника.

Если бы по условию задачи требовалось определить только амплитуду установившегося режима автоколебаний, то, минуя интегрирование уравнений (16) и (17), можно было бы сразу получить искомый результат. Действительно, при постоянной амплитуде a ее первая производная $\dot{a}$ по времени равна нулю. Поэтому, приравняв нулю правую часть уравнения (16), и учтя, что $-n_1=\nu$, непосредственно придем к результату (26).

В заключение рассмотрим движение маятника, на который, помимо момента силы трения между валом и маятником, действует также момент вязкого трения, изменяющийся по закону $m_{\text{в.т.}z}=-b\dot{\varphi}$, где $b>0$, а $\dot{\varphi}$ — проекция угловой скорости маятника на ось z. При наличии этого дополнительного момента уравнение (6) примет вид

$$I_z\ddot{\varphi}=-Pl\varphi-f(\omega)-[b+f'(\omega)]\dot{\varphi}-\frac{1}{6}f'''(\omega)\dot{\varphi}^3.$$

Перейдя к углу поворота θ, отсчитываемому от положения статического равновесия, получим уравнение (11), в котором k^2 и n_3 имеют значения, указанные в формуле (12), а через $2n_1$ обозначено не $f'(\omega)/I_z$, а

$$2n_1=\frac{b+f'(\omega)}{I_z}. \tag{27}$$

Так как $b>0$, а $f'(\omega)<0$, то коэффициент $2n_1$ может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Повторив решение уравнения (11), придем к уравнению (19), которое выше было проинтегрировано для случая $n_1<0$. Итак, в соответствии с обозначением (27) при $b+f'(\omega)<0$ маятник совершает автоколебания амплитуды $a=\frac{2}{k}\sqrt{\frac{2\nu}{3n_3}}$ (см. формулу (26)), где $\nu=-n_1=-\frac{b+f'(\omega)}{2I_z}$.

Дополнительно рассмотрим следующие случаи.

При $n_1>0$, т. е. при $b+f'(\omega)>0$ уравнение (19) примет вид

$$\frac{da}{a(1+\gamma^2a^2)}=-n_1\,dt, \tag{28}$$

где обозначено

$$\gamma^2=\frac{3}{8}\frac{n_3}{n_1}k^2. \tag{29}$$

Уравнение (28) было проинтегрировано в ходе решения задачи 20.4. Запишем его решение (см. формулу (12) задачи 20.4 на стр. 390)):

$$a=\frac{e^{-n_1t}}{\sqrt{C_1^2-\gamma^2e^{-2n_1t}}}, \tag{30}$$

где n_1 и γ даны формулами (27) и (29). При $t\to\infty$ имеем $a\to0$, т. е. движение маятника затухает.

В случае $n_1=0$, т. е. при $b+f'(\omega)=0$ из уравнения (16) найдем

$$\dot a=-\rho a^3,$$

где обозначено

$$\rho=\frac{3}{8}n_3k^2>0. \tag{31}$$

Отделим переменные: $da/a^3=-\rho\,dt$; проинтегрировав, получим

$$a=\frac{1}{\sqrt{2\rho t+C_1}}, \tag{32}$$

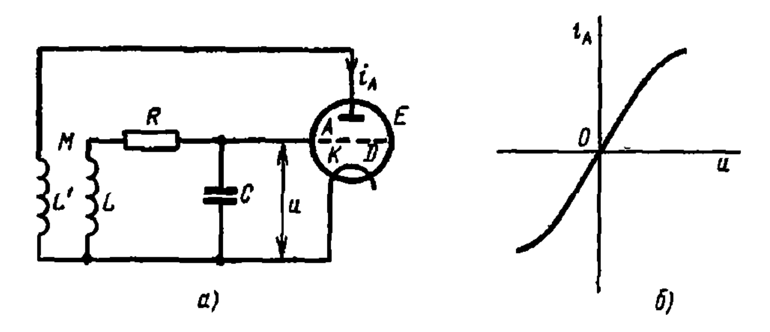
где ρ дано формулой (31). При $t\to\infty$ имеем $a\to0$, т. е. движение маятника затухает.

Итак, при наличии дополнительного момента вязкого трения $m_{в.т.z}=-b\dot\varphi$, где $b>0$, при условии $n_1<0$, т. е. $b+f'(\omega)<0$ маятник совершает автоколебания по закону (26) при $\nu=-n_1=$

$= -\frac{b+f'(\omega)}{2I_z}$. В случаях же $n_1 > 0$ и $n_1 = 0$, т. е. при $b+f'(\omega) > 0$ и $b+f'(\omega) = 0$ колебания маятника затухают (см. формулы (30) и (32)).

Обычно в автоколебательных системах различают три элемента: 1) *источник питания* (в данном случае — вал B, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω), 2) *нелинейный или чувствительный элемент* (момент трения между маятником A и валом B), 3) *колебательный контур* (маятник A).

Задача 20.25. На рис. *а* изображена упрощенная схема лампового генератора. Основными элементами электронной лампы — триода E — являются катод K, анод A и сетка D.



К задаче 20.25.

На аноде A за счет внешней батареи, не показанной на рисунке, создается положительный потенциал по отношению к катоду. Таким образом в лампе имеется электрическое поле, направленное от анода к катоду.

Катод K нагревается при пропускании по нему тока от внешнего источника (батареи канала, не показанной на рисунке). При нагреве катода начинается термоэмиссия электронов, которые увлекаются к аноду имеющимся внутри лампы электрическим полем. На пути электронов расположена проволочная сетка D.

В цепь сетки D включен контур, состоящий из конденсатора емкостью C, сопротивления R и катушки с индуктивностью L. Анодная цепь лампы содержит катушку индуктивности L', имеющую индуктивную связь с катушкой сеточного контура. Взаимная индуктивность двух контуров равна M.

Любое изменение напряжения u на сетке ведет к изменению потока электронов внутри лампы и, следовательно, к изменению тока i_A в анодной цепи. Это в свою очередь вновь, за счет взаимной индуктивности M, изменяет напряжение u на сетке D и т. д., что приводит к возникновению и установлению автоколебаний.

Зависимость анодного тока i_A от напряжения u на сетке D определяется экспериментально и называется характеристикой триода.

Типовая характеристика лампы показана на рис. *б* и приближенно аппроксимируется уравнением

$$i_A = \beta_1 u - \frac{1}{3}\beta_3 u^3,$$

где β_1 и β_3 — положительные постоянные.

Найти закон изменения сеточного напряжения u при установлении автоколебаний, а также постоянную величину амплитуды напряжения установившегося режима. Выяснить условия как затухания, так и самовозбуждения колебаний.

Даны начальные условия: при $t=0$ имеем $u=u_0$, $\dot{u}=\dot{u}_0$.

Решение. Применим 3-й закон Кирхгофа к сеточному контуру: при отсутствии в нем источника э. д. с. сумма падений напряжений в этом замкнутом контуре должна быть равна нулю, т. е.

$$u_L + u_R + u_C + u_M = 0. \tag{1}$$

Падение напряжения u_L на катушке равно

$$u_L = L\ddot{q}, \tag{2}$$

где L — самоиндукция катушки, а q — заряд.

Падение напряжения u_R на сопротивлении R дается формулой

$$u_R = R\dot{q}. \tag{3}$$

Падение напряжения u_C на конденсаторе определяется зависимостью

$$u_C = \frac{q}{C}, \tag{4}$$

где C — емкость конденсатора.

Падение напряжения за счет явления взаимной индуктивности равно

$$u_M = M\frac{di_A}{dt}, \tag{5}$$

где M — взаимная индуктивность двух катушек, а i_A — анодный ток цепи.

Внеся результаты (2) — (5) в уравнение (1), найдем

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q + M\frac{di_A}{dt} = 0. \tag{6}$$

Разделив уравнение (6) на LC и произведя замену переменных по формуле $u(t) = q/C$, где u — напряжение на сетке, получим

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2u + Mk^2\frac{di_A}{dt} = 0. \tag{7}$$

Здесь обозначено

$$2n = \frac{L}{R}, \quad k^2 = \frac{1}{LC}. \tag{8}$$

Характеристика триода задана уравнением $i_A = \beta_1 u - \frac{1}{3}\beta_3 u^3$. Вычислив производную i_A по времени, запишем

$$\frac{di_A}{dt} = \frac{di_A}{du}\dot{u} = (\beta_1 - \beta_3 u^2)\dot{u}.$$

Использовав этот результат в уравнении (7), найдем нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее процесс автоколебаний

$$\ddot{u} + k^2 u = -\rho\dot{u} + M\beta_3 k^2 u^2 \dot{u}, \tag{9}$$

где обозначено

$$\rho = 2n + M\beta_1 k^2. \tag{10}$$

Для интегрирования нелинейного уравнения (9) применим метод медленно меняющихся амплитуд Ван-дер-Поля (см. п. 3° § 2 этой главы).

Будем искать решение уравнения (9) $u(t)$ и первую производную $\dot{u}(t)$ по времени в виде

$$u(t) = a(t)\sin[kt + \alpha(t)], \qquad \dot{u} = a(t)\,k\cos[kt + \alpha(t)], \tag{11}$$

где $a(t)$ и $\alpha(t)$ — медленно изменяющиеся функции времени, подлежащие последующему определению.

Обозначив правую часть уравнения (9) через $f(u, \dot{u})$ и подставив в нее $u = a\sin\varphi$, $\dot{u} = ak\cos\varphi$, получим

$$f(u, \dot{u}) = f(a\sin\varphi,\ ak\cos\varphi) = -\rho ak\cos\varphi + M\beta_3 a^3 k^3 \sin^2\varphi\cos\varphi. \tag{12}$$

Затем, воспользовавшись выражением (12), вычислим определенные интегралы

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\varphi,\ ak\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi =$$
$$= -\rho ak\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi + M\beta_3 a^3 k^3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi, \tag{13}$$

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\varphi,\ ak\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi =$$
$$= -\rho ak\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi + M\beta_3 a^3 k^3\int_0^{2\pi}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi. \tag{14}$$

При вычислении интеграла (13) учтем, что

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi),\quad \sin^2\varphi\cos^2\varphi = \frac{1}{8}(1 + \cos 4\varphi),$$

а в интеграле (14) применим подстановку $\sin\varphi = z$. В результате получим

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\varphi,\ ak\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = -\pi\rho ak + \frac{\pi}{4}M\beta_3 a^3 k^3, \tag{15}$$

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\varphi,\ ak\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi = 0. \tag{16}$$

Напомним, что «укороченные» уравнения Ван-дер-Поля имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \dot a &= \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} f(a\sin\varphi,\ ak\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi, \\ \dot\alpha &= -\frac{1}{2\pi ka}\int_0^{2\pi} f(a\sin\varphi,\ ak\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Использовав в уравнениях (17) выражения (15) и (16), получим

$$\dot a = -\frac{\rho}{2}a(1-\lambda^2a^2),\quad \dot\alpha = 0, \tag{18}$$

где обозначено

$$\lambda^2 = \frac{M\beta_3k^3}{4\rho}. \tag{19}$$

Из второго уравнения (18) сразу найдем

$$\alpha = C_2. \tag{20}$$

После отделения переменных первое уравнение (18) примет вид

$$\frac{da}{a(1-\lambda^2a^2)} = -\frac{\rho}{2}dt. \tag{21}$$

После интегрирования уравнения (21), учтя, что

$$\frac{1}{a(1-\lambda^2a^2)} = \frac{1}{a} + \frac{\lambda}{2(1-\lambda a)} - \frac{\lambda}{2(1+\lambda a)},$$

получим

$$\frac{C_1a}{\sqrt{1-\lambda^2a^2}} = e^{-\frac{\rho}{2}t}.$$

Решив это уравнение относительно a, определим

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+C_1^2e^{\rho t}}}. \tag{22}$$

Теперь внесем результаты (20) и (22) в уравнения (11):

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+C_1^2e^{\rho t}}}\sin(kt+C_2), \\ \dot u(t) &= \frac{k}{\sqrt{\lambda^2+C_1^2e^{\rho t}}}\cos(kt+C_2). \end{aligned} \tag{23}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 подставим в уравнения (22) начальные условия $t=0$, $u=u_0$, $\dot u=\dot u_0$. Получим систему уравнений

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+C_1^2}}\sin C_2,\quad \dot u_0 = \frac{k}{\sqrt{\lambda^2+C_1^2}}\cos C_2.$$

Решив эту систему, найдем

$$C_1^2=\frac{k^2-\lambda^2(k^2u_0^2+\dot u_0^2)}{k^2u_0^2+\dot u_0^2},\qquad C_2=\operatorname{arctg}\frac{ku_0}{\dot u_0}.$$

Для определения искомого процесса установления автоколебаний подставим эти значения C_1^2 и C_2 в первое уравнение (11) и приведем его к виду

$$u(t)=\frac{\sqrt{k^2u_0^2+\dot u_0^2}}{\sqrt{\lambda^2(k^2u_0^2+\dot u_0^2)+[k^2-\lambda^2(k^2u_0^2+\dot u_0^2)]e\rho^t}}\sin\left(kt+\operatorname{arctg}\frac{ku_0}{\dot u_0}\right). \quad (24)$$

Остается выяснить условия затухания, а также условия самовозбуждения колебаний. Для этого, воспользовавшись формулой (22), совершим предельный переход при $t\to\infty$. Нетрудно видеть, что при $\rho>0$ мы получим $\lim\limits_{t\to\infty}a(t)=0$ и, значит, $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=0$, т. е. колебания затухают, изменяясь по закону (24). Из неравенства $\rho>0$, использовав (10), найдем $2n+M\beta_1k^2>0$, откуда $M>-2n/\beta_1k^2$. Приняв во внимание (8), запишем

$$M>-\frac{RC}{\beta_1}. \quad (25)$$

Соблюдение неравенства (25) является условием затухания колебаний.

В случае $\rho<0$ из формулы (22) получим: $\lim\limits_{t\to\infty}a(t)=1/\lambda$. Воспользовавшись выражениями (8), (10) и (19), найдем

$$\lim_{t\to\infty}a(t)=2\sqrt{\frac{RC+M\beta_1}{M\beta_3}}=\text{const}. \quad (26)$$

Итак, при $\rho<0$ амплитуды постепенно увеличиваются, имея пределом величину (26), которая не зависит от начальных условий u_0 и $\dot u_0$. Переход к автоколебаниям происходит по закону (24). Заметим, что автоколебания обусловлены наличием нелинейности в характеристике триода, т. е. членом $-\frac{1}{3}\beta_3u^3$ в выражении $i_A=\beta_1u-\frac{1}{3}\beta_3u^3$. Действительно, в случае линейной характеристики $i_A=\beta_1u$, $\beta_3=0$ и формула (26) примет вид: $\lim\limits_{t\to\infty}a(t)=\infty$, т. е. колебания неограниченно возрастают.

Из неравенства $\rho<0$, учтя (10), запишем $2n+M\beta_1k^2<0$, откуда $M<-2n/\beta_1k^2$. Приняв во внимание (8), получим

$$M<-\frac{RC}{\beta_1}. \quad (27)$$

Соблюдение неравенства (27) является условием самовозбуждения автоколебаний.

В заключение заметим, что если бы по условию задачи требовалось найти только амплитуду установившегося режима автоколебаний,

то, минуя интегрирование системы дифференциальных уравнений (17), можно было бы непосредственно получить результат из первого уравнения (17). Действительно, при установившемся режиме, т. е. при $a(t) = \text{const}$, имеем: $\dot{a} = 0$. Поэтому, в соответствии с первым уравнением (17), находим

$$\int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi,\ ak \cos \varphi) \cos \varphi \, d\varphi = 0.$$

Воспользовавшись формулой (15), запишем

$$-\pi \rho a k + \frac{\pi}{4} M \beta_3 a^3 k^3 = 0.$$

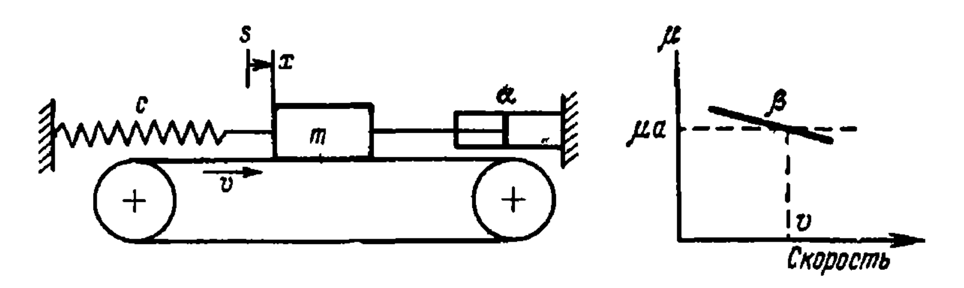
Отбросив нулевой корень при решении этого уравнения относительно a, получим

$$a = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{\rho}{M \beta_3}}.$$

Подставив в эту формулу значения (8) и (10), найдем результат (26).

3°. Исследование автоколебаний на фазовой плоскости.

Задача 20.26. Построить фазовую траекторию системы, изображенной на рис. *а*. Нелинейное сопротивление, действующее на массу,



К задаче 20.26, *а*, *б*.

пропорционально скорости колебания $\dot{x}$ в степени 3/2. К системе подводится энергия приводным ремнем, движущимся с постоянной скоростью v и воздействующим на массу m с силой трения, равной mgf. Коэффициент трения f не постоянен; он равен постоянной f_a, если масса находится в абсолютном покое или, другими словами, если относительная скорость ремня и массы равна v. Если $\dot{x}$ положительна, относительная скорость $v - \dot{x}$ будет меньше, а если $\dot{x}$ отрицательно, то больше v. Предполагая, что диапазон изменения относительной скорости $v \pm \dot{x}$ не слишком велик, принять, в хоро-

шем соответствии с действительностью, линейную зависимость коэффициента трения от $\dot{x}$, т. е. (рис. б)

$$f = f_a + \beta\dot{x}. \tag{1}$$

Первоначально масса находится в покое в начале координат. В момент $t = 0$ к ней внезапно приложен малый положительный импульс 0,0445 *нсек*.

Решение. Дифференциальное уравнение движения системы запишем в виде

$$m\ddot{x} + \alpha m\,|\dot{x}|^{1/2}\dot{x} + cx = mg\,(f_a + \beta\dot{x}). \tag{2}$$

Разделив обе части уравнения на m и перегруппировав члены, получим

$$\ddot{x} + (\alpha\,|\dot{x}|^{1/2} - \beta g)\,\dot{x} + k^2x = f_a g. \tag{3}$$

Это уравнение ясно показывает, что принятая в задаче линейная зависимость коэффициента трения от относительной скорости ремня и массы приводит к появлению члена $-\beta g\dot{x}$ и что динамический эффект этого члена равносилен эффекту отрицательного вязкого сопротивления; если наклон β отрицателен, то демпфирующий член $\beta g\dot{x}$ положителен и система не может совершать автоколебания.

Отклоняясь несколько в сторону, предположим, что сопротивление системы пропорционально первой степени скорости $\dot{x}$, а не степени три вторых. В этом случае знак величины $\alpha - \beta g$ определяет положительное или отрицательное вязкое трение. Это в свою очередь показывает, будет ли движение системы динамически устойчиво или неустойчиво, т. е. будут ли произвольно малые возмущения исчезать или раскачивать систему с непрерывно возрастающей амплитудой. Очевидно, что в действительности ни α, ни βg не остаются постоянными в достаточно широком диапазоне движений системы, и следовательно, знак их разности легко может измениться с плюса на минус и наоборот.

Ввиду этого следует заключить, что при изучении автоколебаний нелинейные члены в дифференциальных уравнениях движения играют первостепенную роль и пренебрежение ими недопустимо.

Возвращаясь к рассматриваемой системе, используем дельта-метод для решения уравнения (3). Переписав его в стандартной дельта-форме, получим

$$\ddot{x} + k^2(x + \delta) = f_a g, \tag{4}$$

где

$$\delta = \frac{1}{k^2}(\alpha\,|\dot{x}|^{1/2} - \beta g)\,\dot{x} = \left[\frac{\alpha}{k^{1/2}}\left|(v)^{1/2}\right| - \frac{\beta g}{k}\right]v. \tag{5}$$

Уравнение (4) ясно показывает, что система имеет «среднее» равновесное смещение, равное $f_a g/k^2$ (рис. в). Поэтому помещаем начало

координат на фазовой плоскости в точку $x = f_a g/k^2$ и строим дельта-кривую (см. рис. *в*). Численные значения величин приняты следующие:

$$mg = 4{,}45\ н, \quad f_a = 0{,}5, \quad c = 175\ н/м, \quad \alpha = 15{,}7\ (смсек)^{-1/2},$$
$$\beta = 2{,}0\ сек/м.$$

При этих данных абсцисса среднего равновесного положения равна

$$x = \frac{f_a g}{k^2} = 1{,}27\ см,$$

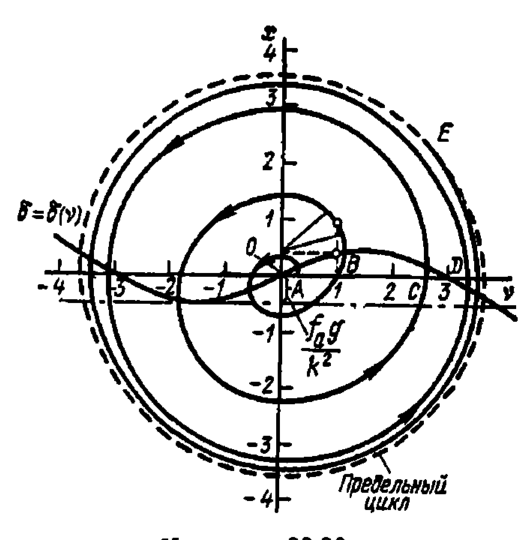
собственная частота системы $k = 19{,}7\ сек^{-1}$, а уравнение (5) для δ принимает вид

$$\delta = \delta(\nu) = 3{,}54\nu^{3/2} - 0{,}98\nu\ м. \tag{6}$$

При действии на массу указанного в условии задачи импульса мгновенно возникает положительная скорость, равная $\dot{x} = 0{,}098\ м/сек$, а соответствующая координата равна приблизительно

$$\nu = \frac{\dot{x}}{k} = 0{,}00497\ м$$

— фазовая точка A. Отправляясь от этой точки, строим фазовую траекторию ранее рассмотренным графическим методом.



К задаче 20.26, *в*.

Фазовая траектория развертывается в виде спирали, достигая через один оборот точки B, через два оборота точки C и через четыре с небольшим оборота точки E. После этого она все больше и больше приближается к штриховой предельной траектории. Штриховая траектория описывает установившееся движение системы. Она соответствует автоколебаниям с амплитудой, равной примерно семикратному среднему равновесному смещению. Эта траектория не является окружностью, несмотря на то, что точки пересечения ее с координатными осями равноудалены от начала координат. Поэтому движение системы только приблизительно синусоидальное. Эта фазовая траектория, описывающая установившееся автоколебание системы, называется *предельным циклом*.

Очень важным является то обстоятельство, что траектория предельного цикла не зависит от начальных условий и от любых последующих возмущений движения. Если начальные условия таковы, что исходная фазовая точка A лежит вне предельного цикла, то фазовая точка будет двигаться снаружи по спирали, приближающейся

все ближе и ближе к штриховой траектории. Покажем это. Пусть к массе m в начальный момент времени приложен положительный импульс, равный 1,35 *нсек*. Тогда в момент времени $t=0$ масса будет иметь положительную скорость $\dot{x}_0=1{,}35/0{,}454=2{,}96$ *м/сек*, а координата $v_0=\dot{x}_0/k$ будет равна $v_0=2{,}96/19{,}7=0{,}15$ *м*.

Построим фазовую траекторию для этих начальных условий: $v_0=0{,}15$, $x_0=0$. Изображающая точка в начальный момент находится вне предельного цикла. Фазовую траекторию будем строить с помощью произвольных шагов по оси v.

1) Первый шаг: $0{,}1 \leqslant v \leqslant 0{,}15$.

Среднее значение δ-функции в этом интервале, согласно (6), будет

$$\delta_1=\frac{1}{v_1-v_0}\int_{v_0}^{v_1}\delta(v)\,dv=\frac{1}{v_1-v_0}\int_{0,15}^{0,1}(3{,}54v^{3/2}-0{,}98v)\,dv=0{,}035 \text{ м}.$$

Координата x_1 центра O_1 первой дуги фазовой траектории будет $x_1=-\delta_1=-0{,}035$ *м*. Из центра с координатами $(-0{,}035;\ 0)$, через начальную точку фазовой траектории с координатами $(0;\ 0{,}15)$ проводим первую дугу в интервале $v=0{,}15\div 0{,}1$.

2) Второй шаг: $0{,}05 \leqslant v \leqslant 0{,}1$.

Среднее значение δ-функции в этом интервале находится аналогично первому шагу: $\delta_2=0{,}0005$. Координата x_2 центра O_2 второй дуги будет $x_2=-\delta_2=-0{,}0005$ *м*. Таким образом, координаты второго центра O_2 будут $(-0{,}0005;\ 0)$. Из этого центра через конец первой дуги фазовой траектории проводим вторую дугу в интервале $v=0{,}1\div 0{,}05$.

3) Третий шаг: $0 \leqslant v \leqslant 0{,}05$.

Среднее значение δ-функции для третьего интервала будет $\delta_3=-0{,}0085$ *м*. Третью дугу строим аналогично предыдущим.

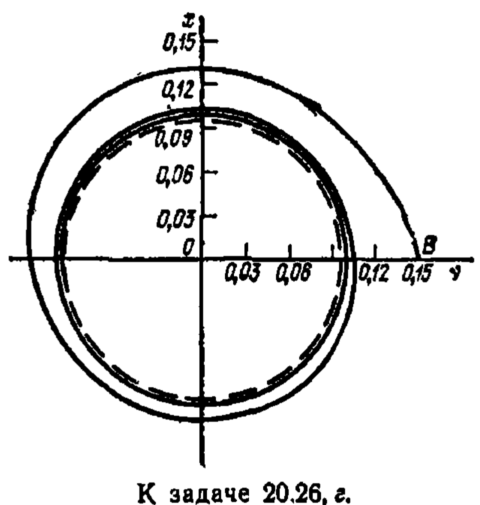
Данные для дальнейших шагов сведены в таблицу, которая приводится для проверки самостоятельной работы читателя:

4) $-0{,}05 \leqslant v \leqslant 0$,	$x_4=-0{,}0085$ *м*,
5) $-0{,}1 \leqslant v \leqslant -0{,}05$,	$x_5=0{,}0005$ *м*,
6) $-0{,}12 \leqslant v \leqslant -0{,}1$,	$x_6=0{,}02$ *м*,
7) $-0{,}12 \leqslant v \leqslant -0{,}1$,	$x_7=0{,}02$ *м*,
8) $-0{,}1 \leqslant v \leqslant -0{,}05$,	$x_8=-0{,}0005$ *м*,
9) $-0{,}05 \leqslant v \leqslant 0$,	$x_9=-0{,}0085$ *м*,
10) $0 \leqslant v \leqslant 0{,}05$,	$x_{10}=0{,}0085$ *м*,
11) $0{,}05 \leqslant v \leqslant 0{,}1$,	$x_{11}=-0{,}0005$ *м*,
12) $0{,}1 \leqslant v \leqslant 0{,}11$,	$x_{12}=-0{,}0158$ *м*,
13) $0{,}1 \leqslant v \leqslant 0{,}1$,	$x_{13}=-0{,}0158$ *м*,
14) $0{,}05 \leqslant v \leqslant 0{,}1$,	$x_{14}=-0{,}0005$ *м*,

15) $0 \leqslant v \leqslant 0{,}05$, $x_{15} = 0{,}0085$ *м*,
16) $-0{,}05 \leqslant v \leqslant 0$, $x_{16} = -0{,}0085$ *м*,
17) $-0{,}1 \leqslant v \leqslant -0{,}05$, $x_{17} = -0{,}0005$ *м*,
18) $-0{,}105 \leqslant v \leqslant -0{,}1$, $x_{18} = 0{,}012$ *м*,
19) $-0{,}105 \leqslant v \leqslant -0{,}1$, $x_{19} = 0{,}012$ *м*,
20) $-0{,}1 \leqslant v \leqslant -0{,}05$, $x_{20} = -0{,}0005$ *м*,
21) $-0{,}05 \leqslant v \leqslant 0$, $x_{21} = -0{,}0085$ *м*,
22) $0 \leqslant v \leqslant 0{,}05$, $x_{22} = 0{,}0085$ *м*,
23) $0{,}05 \leqslant v \leqslant 0{,}1$, $x_{23} = 0{,}0005$ *м*,
24) $0{,}05 \leqslant v \leqslant 0{,}1$, $x_{24} = 0{,}0005$ *м*,
25) $0 \leqslant v \leqslant 0{,}05$, $x_{25} = 0{,}0085$ *м*

и т. д.

На рис. *г* представлена фазовая траектория, полученная в результате построения. Это скручивающаяся спираль все более и более приближающаяся к тому же предельному циклу, обозначенному на рис. *г* штриховой линией.



К задаче 20.26, *г*.

Исходя из сказанного, заключаем, что предельный цикл описывает *единственное установившееся движение* системы и, следовательно, все фазовые точки, не лежащие на штриховой траектории, включая точку среднеравновесного положения, изображают динамически неустойчивые состояния системы.

В рассмотренном примере траектория предельного цикла почти круговая, установившееся движение поэтому почти синусоидальное, а частота автоколебаний очень близка к величине k, собственной частоте системы без сопротивления. Однако во многих других задачах на автоколебания траектория предельного цикла сильно отличается от окружности, а частота автоколебаний может совсем не совпадать с величиной k.

ПРИЛОЖЕНИЕ

МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ (СИ)

В декабре 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла единую Международную систему единиц (СИ), которая должна применяться как предпочтительная во всех областях науки, техники и народного хозяйства.

Процесс введения этой системы в практику (и особенно тех ее единиц, которые еще не получили широкого распространения) будет осуществляться постепенно в течение ряда лет — в переходный период, конечно, будут сохраняться и традиционные единицы систем СГС и МкГС, использованные в настоящей книге.

Приведем для справок таблицу Международной системы единиц по ГОСТу 9867—61:

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенные обозначения единицы	
		русские	латинские или греческие
Основные единицы			
Длина	Метр	*м*	m
Масса	Килограмм	*кг*	kg
Время	Секунда	*сек*	s
Сила электрического тока	Ампер	*а*	A
Дополнительные единицы			
Плоский угол	Радиан	*рад*	rad
Телесный угол	Стерадиан	*стер*	sr

Продолжение

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенные обозначения единицы	
		русские	латинские или греческие
Производные единицы			
Площадь	Квадратный метр	$м^2$	m^2
Объем	Кубический метр	$м^3$	m^3
Частота	Герц (1/*сек*)	*гц*	Hz
Объемная масса (плотность)	Килограмм на куб. метр	$кг/м^3$	kg/m^3
Скорость	Метр в секунду	*м/сек*	m/s
Угловая скорость	Радиан в секунду	*рад/сек*	rad/s
Ускорение	Метр на секунду в квадрате	$м/сек^2$	m/s^2
Угловое ускорение	Радиан на секунду в квадрате	$рад/сек^2$	rad/s^2
Сила	Ньютон ($кг \cdot м/сек^2$)	*н*	N
Давление (механическое напряжение)	Ньютон на кв. метр	$н/м^2$	N/m^2
Динамическая вязкость	Ньютон-секунда на кв. метр	$н\ сек/м^2$	Ns/m^2
Кинематическая вязкость	Кв. метр на секунду	$м^2/сек$	m^2/s
Работа, энергия, количество теплоты	Джоуль ($н \cdot м$)	*дж*	J
Мощность	Ватт (*дж/сек*)	*вт*	W
Количество электричества	Кулон ($а \cdot сек$)	*к*	C
Электрическое напряжение, разность потенциалов, электродвижущая сила	Вольт (*вт/а*)	*в*	V
Напряженность электрического поля	Вольт на метр	*в/м*	V/m
Электрическое сопротивление	Ом (*в/а*)	*ом*	Ω
Электрическая емкость	Фарада (*к/в*)	*ф*	F
Поток магнитной индукции	Вебер (*к/ом*)	*вб*	Wb
Индуктивность	Генри (*вб/а*)	*гн*	H
Магнитная индукция	Тесла ($вб/м^2$)	*тл*	T
Напряженность магнитного поля	Ампер на метр	*а/м*	A/m

Определения основных единиц

Метр — длина, равная 1 650 763,73 длины волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86.

Килограмм — единица массы — представлен массой международного прототипа килограмма.

Секунда — 1/31 556 925,9747 часть тропического года для 1900 г. января 0 в 12 часов эфемеридного времени.

Ампер — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 *м* один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ единиц силы Международной системы на каждый метр длины.

Некоторые переводные множители

1 *кГ* = 9,80665 *н* ≈ 9,81 *н*	1 *кГм* = 9,80665 *дж* ≈ 9,81 *дж*
1 *дина* = 10^{-5} *н*	1 *эрг* = 10^{-7} *дж*
1 *кГ/см*^{2} = 98 066,5 *н/м*^{2}	1 *кал* = 4,1868 *дж*
1 *дина/см*^{2} = 0,1 *н/м*^{2}	

Моисей Иосифович Бать
Георгий Юстинович Джанелидзе
Анатолий Саулович Кельзон

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

в примерах и задачах

Том III

М., 1973 г., 488 стр. с илл.

Редактор *А. Г. Мордвинцев.*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*
Корректор *Т. А. Панькова.*

Сдано в набор 20/VI 1973 г. Подп. к печати 31/X 1973 г. Бумага 60×90[1]/16. Тип. № 3. Физ. печ. л. 30,5. Условн. печ. л. 30,5. Уч-изд. л. 27,64. Тираж 100 000 экз. Т-16936. Цена книги 87 коп. Заказ № 883.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ленинград, Гатчинская ул., 26.